

**Кураев А.А.  
Попкова Т.Л.  
Синицын А.К.**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

Допущено Министерством образования Республики  
Беларусь в качестве учебного пособия для студентов  
Специальностей «Радиотехника» и «Радиотехнические  
системы» учреждений, обеспечивающих  
получение высшего образования

Минск  
«Бестпринт»  
2004

УДК 537.87  
ББК 32.86-01  
К98

Рецензенты:  
Кафедра радиофизики БГУ.  
Воропаев Ю.П. доктор технических наук,  
профессор Военной Академии Р.Б.

### **К93 Кураев А.А.**

Электродинамика и распространение радиоволн / А.А. Кураев,  
Т. Л. Попкова, А. К. Сеницын. –Мн.: Бестпринт. 2004-357с.

ISBN 985-6722-89-6

Излагаются основы теории электромагнетизма. Рассматриваются процессы излучения, отражения и преломления волн, дифракция, распространение волн в волноводах различной конфигурации, включая нерегулярные структуры, в тропосфере и ионосфере, электромагнитные колебания в резонаторах, процессы в интегральных схемах СВЧ. Излагается теория возбуждения регулярных и нерегулярных волноводов и резонаторов с учетом потерь в стенках. Описываются в виде законов сохранения особенности взаимодействия заряженных частиц с полями, имеющими пространственно-временную симметрию. Обсуждаются машинно-ориентированные методы оптимизации и синтеза электродинамических систем.

Книга предназначена для студентов, магистрантов и аспирантов радиотехнических специальностей.

**ISBN 985-6722-89-6**

**УДК 537.87  
ББК 32.86-01**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее десятилетие существенно расширилась область использования электромагнитных волн сверхвысоких частот (СВЧ) и крайне высоких частот (КВЧ). Наряду с традиционными направлениями применения волн СВЧ и КВЧ диапазонов – наземные и космические телекоммуникационные системы, радиолокация, телеметрия, радионавигация, телевидение, появились новые области: медицина (диагностика и терапия), промышленность и сельское хозяйство (системы СВЧ обработки и синтеза материалов, продуктов и т.д.), информатика (тактовые частоты процессоров достигли СВЧ и КВЧ диапазонов), термоядерный синтез (нагрев термоядерной плазмы в КВЧ диапазоне), системы ПРО и ПВО нового поколения. Одновременно расширился круг электродинамических задач и методов их решения. Возникли задачи синтеза конфигураций (профилей) электродинамических систем, что потребовало создания теории произвольно-нерегулярных электродинамических систем с некоординатными границами, развития адекватных методов решения соответствующих граничных задач электродинамики. Повысились требования к точности и сходимости методов. Оказалось, что некоторые традиционно входящие в учебники решения не вполне корректны и соответствующие разделы должны быть заменены и изложены на основе современных достижений электродинамики (в частности, теория возбуждения электродинамических систем с омическими потерями). Кроме того, в истекшее десятилетие приобрели важное значение вычислительные методы, опирающиеся на использование современных ЭВМ. Применение вычислительного эксперимента, методов оптимизации лежит в основе современных разработок и проектирования радиоэлектронной аппаратуры СВЧ и КВЧ. В этой связи немаловажное значение приобретают математические модели систем и устройств СВЧ – их точность и адекватность, удобная для применения вычислительных методов форма становятся необходимыми критериями их оценки. Методы решения краевых задач электродинамики также должны быть машинно-ориентированными.

Между тем, за последнее десятилетие учебная литература по электродинамике и распространению радиоволн не издавалась и все перечисленные достижения в этой области, новые направления, а также и определенная переориентация приоритетов остались вне доступной для студентов литературе. Предлагаемое читателю учебное пособие восполняет в определенной степени сложившийся информационный дефицит в указанной области.

Учебное пособие «Электродинамика и распространение радиоволн» соответствует типовой программе одноименного курса, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь 24 июня 2001г. (регистрационный № ТД-164/тип).

Учебное пособие написано на основе лекций по курсам «Электродинамика и распространение радиоволн», «Электромагнитные поля и волны»,

«Основы информационных технологий», читаемых авторами в течение ряда лет студентам БГУИР, и предназначено для широкого ряда специальностей: 39.01.01 «Радиотехника», 39.01.03 «Радиоинформатика», 31.04.02 «Радиофизика», 39.01.02 «Радиоэлектронные системы», 95.02.31 «Телекоммуникационные системы», 36.04.01 «Электронно-оптическое аппаратостроение», 36.04.02 «Промышленная электроника», 02.05.01 «Математика», 02.05.03 «Математика. Физика», 31.03.03 «Прикладная математика», 02.05.02 «Физика», 02.05.04 «Физика. Дополнительные специальности», 38.01.03 «Электронные приборы», 53.01.02 «Автоматизированные системы обработки информации».

Авторы придерживались концепции максимально возможного баланса двух сторон описания электромагнитных явлений – математического и физического. Необходимость первого очевидна: задачи электродинамики составляют неотъемлемую часть математической физики и являются фундаментом расчета и проектирования систем и устройств СВЧ. Физическое же описание электромагнитных явлений формирует специфическое «электродинамическое мышление», определяющее творческий подход в решении исследовательских и инженерных задач в области радиоэлектроники и радиоинформатики СВЧ и КВЧ. Для улучшения восприятия физической картины электромагнитных полей и волн в книге принято их описание с помощью потенциалов Герца, которые, после определенных доказательств, позволяют изобразить геометрическую структуру волн целиком, без покомпонентного синтеза.

В книге проведена градация материала по сложности: специальные главы, содержащие более сложный материал и громоздкие выкладки, помечены звездочкой. Эти главы необходимы для углубленного изучения материала студентами и аспирантами, ведущими научные исследования в области электромагнитной теории и техники СВЧ и КВЧ. Это также должно помочь преподавателям оптимальным образом формировать свои курсы лекций. Некоторые второстепенные вопросы, подробно представленные в старой литературе, изложены конспективно. В списке литературы наряду с традиционными учебниками даны специальные монографии, а также прекрасные труды основоположников электродинамики сороковых-пятидесятых лет прошлого века. Они дают хороший материал для организации на высоком уровне самостоятельной работы студентов.

Авторы выражают благодарность профессору кафедры радиотехники Военной академии Республики Беларусь, доктору технических наук Воропаеву Юрию Павловичу и коллективу кафедры радиофизики Белорусского государственного университета за полезные замечания, которые были учтены при доработке текста рукописи учебного пособия.

А.А. Кураев, Т.Л. Попкова, А.К. Сеницын

## ЧАСТЬ 1

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### ГЛАВА I

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Под электромагнитным полем (ЭМП) следует понимать среду, пространственно-временное состояние которой полностью определяется (задается) четырьмя векторами:

$\vec{E}(x,y,z,t)$  – вектор напряженности электрического поля  $\left[ \frac{B}{m} \right]$ .

$\vec{D}(x,y,z,t)$  – вектор электрического смещения  $\left[ \frac{K}{m^2} \right]$ .

$\vec{B}(x,y,z,t)$  – вектор индукции магнитного поля  $\left[ \frac{B\delta}{m^2} \right]$ .

$\vec{H}(x,y,z,t)$  – вектор напряженности магнитного поля  $\left[ \frac{A}{m} \right]$ .

Будем рассматривать ЭМП в объеме  $V$  с граничной поверхностью  $S$ , на которой происходит скачок свойств среды.

Во всех внутренних точках  $V$ , т.е. точках, не принадлежащих  $S$ , векторы поля непрерывны вместе с первой и второй производными по координатам, а также конечны. Эти векторы удовлетворяют четырем уравнениям Максвелла (УМ):

$$1) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \quad 2) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad (1.1)$$

$$3) \operatorname{div} \vec{D} = \rho ; \quad 4) \operatorname{div} \vec{B} = 0 ;$$

Здесь  $\vec{\delta}$  - вектор плотности электрического тока  $\left[ \frac{A}{m^2} \right]$ ,

$\rho$  - объемная плотность электрического заряда  $\left[ \frac{K}{m^3} \right]$ .

УМ являются фундаментальными законами для ЭМП в макроскопическом приближении, и в настоящее время не существует более общих законов, следствиями которых они бы являлись.

Теория Максвелла содержит ряд постулатов, не следующих из каких-либо опытов, но ее предсказания привели к открытию ЭМП и до сих пор нет опытов или приборов, опровергающих теорию Максвелла.

## 1.1. Интегральная формулировка УМ

Первое УМ – обобщение закона Ампера, в соответствии с которым

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}.$$

В первом же УМ

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

дополнительный член справа  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  именуется плотностью тока смещения.

Для перехода к интегральной форме записи первого УМ воспользуемся теоремой Стокса для некоторой поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $\ell$ . Проинтегрируем обе части уравнения по  $S$ :

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{\delta} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Применяя к левой части теорему Стокса, получим

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{l} = I + I_{cm}, \quad (1.2)$$

где  $I$  – электрический ток через поверхность  $S$ ,  $I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}$ ,

$I_{cm}$  – ток смещения через эту же поверхность,  $I_{cm} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ .

Второе УМ – обобщение закона электромагнитной индукции в том смысле, что имеется в виду справедливость этого закона для любого (не обязательно проводящего) контура  $\ell$  и любой среды. Интегральная форма этого уравнения получается из дифференциальной тем же путем, что и первое уравнение. В результате применения теоремы Стокса в левой части получаем

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \Phi_M, \quad (1.3)$$

где  $\Phi_M$  – магнитный поток через поверхность  $S$ . Полная производная в правой части подразумевает, что  $S$  может зависеть от  $t$  (меняется во времени).

Третье уравнение Максвелла является обобщением уравнения Гаусса-Кулона на случай произвольной среды. Применяя интегрирование по  $V$  с границей  $S$  к обеим частям уравнения и используя теорему Остроградского-Гаусса к левой части, получим

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV = q, \quad (1.4)$$

$q$  – полный заряд, содержащийся внутри  $S$ .

Четвертое уравнение Максвелла утверждает отсутствие магнитных зарядов и одновременно постулирует его справедливость для любой среды. Те же действия, как и в предыдущем случае, дают интегральную форму этого уравнения:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (1.5)$$

## 1.2. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности

Центральным постулатом теории Максвелла является закон сохранения заряда. Полагается, что сумма электрических зарядов (положительных и отрицательных) в мировом пространстве постоянна.

Заряды не возникают и не исчезают (т.е. могут возникать или исчезать одновременно равные количества положительных и отрицательных зарядов, например, при ионизации, рекомбинации, аннигиляции и т.д.). Причиной изменения величины заряда в данном объеме  $V$  является перемещение зарядов, т.е. электрический ток через ограничивающую этот объем поверхность  $S$ . Иначе говоря, можно утверждать для  $V$  с границей  $S$ :

$$\frac{dq}{dt} = -I. \quad (1.6)$$

Распишем  $q$  и  $I$  через удельные величины  $\rho, \vec{\delta}$ :

$$q = \int_V \rho dV, \quad I = \oint_S \vec{\delta} d\vec{S}.$$

$$\text{Тогда } \oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Применим в левой части теорему Остроградского-Гаусса и положим, что  $V$  не изменяется во времени, т.е.  $V \neq V(t)$ . При этом получим

$$\int_V \left( \operatorname{div} \vec{\delta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Поскольку  $V$  произволен, последнее равенство возможно только при выполнении условия

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Последнее условие называется уравнением непрерывности и является выражением закона сохранения заряда.

### 1.3. Физическое содержание первого УМ

Рассмотрим вначале закон Ампера, установленный для стационарных токов:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (1.8)$$

Применяя к обеим частям уравнения [\(1.8\)](#) операцию  $\operatorname{div}$  и учитывая, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ , получаем

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

Для стационарных процессов, когда накопления зарядов нет и  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ,

этот результат не противоречит уравнению непрерывности.

Ситуация, однако, меняется в электромагнитных процессах, когда завесомо  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$  и закон Ампера противоречит уравнению непрерывности.

Теперь сделаем ту же операцию с первым УМ. Тогда получим

$$\operatorname{div} \left( \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Считая систему отсчета неподвижной, во втором члене уравнения [\(1.9\)](#) поменяем местами операции  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\operatorname{div}$ :

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}.$$

Но в соответствии с третьим УМ  $div \vec{D} = \rho$ . Поэтому получаем

$$div \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ - уравнение непрерывности.}$$

Таким образом, смысл введенной Максвеллом плотности тока смещения, дополняющей в законе Ампера плотность электрического тока, становится понятным: эта величина необходимо возникает, если принять закон сохранения заряда.

С физической точки зрения существование этой величины приводит к возможности существования ЭМП. Действительно, теперь наряду с электро-

магнитной индукцией  $\left( rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$  имеет место симметричное явление

магнитоэлектрической индукции  $\left( rot \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ при } \vec{\delta} = 0 \right)$ . Взаимовоз-

буждение переменных электрического и магнитного полей и образует электромагнитный процесс ЭМП.

Физическое содержание второго, третьего и четвертого уравнений Максвелла указывалось выше и не требует дополнительных пояснений.

Вернемся к формальной стороне системы УМ – ее полноты.

Применим к первому УМ операцию  $div$ . Получим  $div \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\delta} \right) = 0$ .

Меняем порядок дифференцирования в первом члене и используем уравнение непрерывности. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (div \vec{D} - \rho) = 0.$$

Если  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$  (чисто переменные во времени процессы), то мы получаем третье УМ:  $div \vec{D} = \rho$ . Таким образом, для чисто переменных процессов третье УМ не независимое, т.к. является следствием первого УМ. Точно так же можно доказать, что при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$  четвертое УМ следует из второго.

Таким образом, при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$  независимы только первые два УМ, а неизвестных, входящих в них, - пять:  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{\delta}$  (учитывая, что  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div \vec{\delta}$ ).

Для пустоты (вакуума), однако, имеют место связи  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  ( $\epsilon_0, \mu_0$  - соответственно, диэлектрическая и магнитная проницаемости пустоты), а ток проводимости  $\vec{\delta} = 0$  (электронные конвенционные токи удобно

рассматривать как сторонние по отношению к данному полю). Эта ситуация наводит на мысль, что в любой среде должны быть связи типа

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \vec{\delta} = \vec{\delta}(\vec{E}). \quad (1.10)$$

Таким образом, УМ следует дополнить уравнениями связи, определяемыми свойствами среды и называемыми материальными уравнениями.

#### 1.4. Материальные уравнения

В общем случае зависимости  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \vec{\delta} = \vec{\delta}(\vec{E})$  имеют нелинейный характер.

Рассмотрим векторную функцию  $\vec{D}(\vec{E})$  и разложим ее в ряд Маклорена:

$$\vec{D}(\vec{E}) = \vec{D}(0) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{E}} \Big|_0 \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{E}^T \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial \vec{E}^2} \Big|_0 \vec{E} + \dots \quad (1.11)$$

Здесь

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = (E_i), \quad \vec{E}^T = (E_x, E_y, E_z), \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{E}} = \left( \frac{\partial D_j}{\partial E_i} \right), \quad \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial \vec{E}^2} = \left( \frac{\partial^2 D_i}{\partial E_j \partial E_k} \right).$$

В случаях, когда нет сторонних по отношению к данному полю других полей,  $\vec{D}(0) = 0$ .

Рассмотрим линейный случай, когда квадратичным и высшими членами разложения можно пренебречь:

$$\vec{D}(\vec{E}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{E}} \Big|_0 \vec{E}. \quad (1.12)$$

Или в подробной записи

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_x}{\partial E_x} & \frac{\partial D_x}{\partial E_y} & \frac{\partial D_x}{\partial E_z} \\ \frac{\partial D_y}{\partial E_x} & \frac{\partial D_y}{\partial E_y} & \frac{\partial D_y}{\partial E_z} \\ \frac{\partial D_z}{\partial E_x} & \frac{\partial D_z}{\partial E_y} & \frac{\partial D_z}{\partial E_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial D_x}{\partial E_x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial D_x}{\partial E_y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial D_x}{\partial E_z}, \dots, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial D_z}{\partial E_z}. \quad (1.13)$$

Введем тензор

$$\vec{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Здесь индекс « $a$ » означает абсолютное (полное) значение величины  $\vec{\varepsilon}_a$ , а не относительное (по отношению к  $\varepsilon_0$ ) значение, которое мы в дальнейшем будем записывать без индекса.

Используя тензор диэлектрической проницаемости  $\vec{\varepsilon}_a$ , уравнение для линейных сред можно записать в форме

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon}_a \vec{E}. \quad (1.15)$$

Аналогичным образом вводятся тензоры магнитной проницаемости  $\vec{\mu}_a$  и удельной проводимости  $\vec{\sigma}$ .

Соответственно

$$\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H}, \quad \vec{\delta} = \vec{\sigma} \vec{E}. \quad (1.16)$$

Среда называется изотропной, если  $\varepsilon_{ij} = 0$ , при условии

$$i \neq j, \quad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_a, \quad \mu_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \mu_{ii} = \mu_a \text{ и } \sigma_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \sigma_{ii} = \sigma. \quad (1.17)$$

Тогда  $\vec{D} \parallel \vec{E}$ ,  $\vec{B} \parallel \vec{H}$ ,  $\vec{\delta} \parallel \vec{E}$  и материальные уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{\delta} = \sigma \vec{E}. \quad (1.18)$$

Среда называется однородной, если  $\vec{\varepsilon}_a$ ,  $\vec{\mu}_a$ ,  $\vec{\sigma}$  не зависят от координат в рассматриваемом объеме  $V$ . В противном случае  $\vec{\varepsilon}_a(x, y, z)$ ,  $\vec{\mu}_a(x, y, z)$ ,  $\vec{\sigma}(x, y, z)$  и среда – неоднородная.

Обычно рассматриваются случаи, когда элементы среды мгновенно реагируют на ЭМП, и поэтому обычно  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma \neq f(t)$ .

Однако важны и противоположные ситуации, которые мы далее отдельно рассмотрим.

Дополним изложенное некоторыми элементарными физическими представлениями.

Как указывалось выше, в вакууме имеют место связи

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Во всех других средах имеются связанные (или свободные) заряды, а также элементарные замкнутые токи, образующие магнитные диполи. Под действием внешнего электрического поля  $\vec{E}$  происходит смещение связан-

ных зарядов или переориентация электрических диполей элементарных частиц, что приводит к поляризации в среде, которая характеризуется вектором поляризации среды  $\vec{P}$ , который в общем случае (наличие внутренних полей) не коллинеарен  $\vec{E}$ . Точно также под действием магнитного поля  $\vec{H}$  возникает преимущественная ориентация магнитных диполей, т.е. происходит намагничивание среды, характеризуемое вектором намагничивания  $\vec{J}$ . По определению  $\vec{p} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{i \in \Delta V} \vec{P}_i / \Delta V \right)$ ,  $\vec{P}_i$  – элементарные электрические моменты в объеме  $\Delta V$ , т.е.  $\vec{p}$  – удельный электрический момент в среде, инициируемый внешним полем  $\vec{E}$ . Поэтому разумно предположить, что  $\vec{p} = \vec{p}(\vec{E})$  и в линейном приближении  $\vec{p} = \vec{\aleph}_\varepsilon \vec{E}$ , где  $\vec{\aleph}_\varepsilon$  – тензор диэлектрической восприимчивости вещества.

Аналогично  $\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{i \in \Delta V} \vec{M}_i / \Delta V \right)$ ,  $\vec{M}_i$  – элементарные магнитные моменты в объеме  $\Delta V$  и  $\vec{J} = \vec{\aleph}_m \vec{H}$ ,  $\vec{\aleph}_m$  – тензор магнитной восприимчивости вещества.

Таким образом, в отличие от пустоты (вакуума) в среде имеют место связи

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p} = (\varepsilon_0 + \vec{\aleph}_\varepsilon) \vec{E} = \vec{\varepsilon}_a \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = (\mu_0 + \vec{\aleph}_m) \vec{H} = \vec{\mu}_a \vec{H}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Однако существует класс сред, называемых киральными (хиральными, чиральными – chiral), в которых имеют место более общие связи типа  $\vec{D}(\vec{E}, \vec{H})$ ,  $\vec{B}(\vec{H}, \vec{E})$ . Такие среды могут быть естественными (например, биологические – их особые оптические свойства открыты Пастером еще в 1848 г.) или искусственными – композитными. На примере последних проиллюстрируем свойства киральных сред. Пусть в изотропном диэлектрическом наполнителе равномерно расположены упорядоченно (бианизатропная среда) или стохастически (биизотропная среда) медные спиральки с размерами, зна-

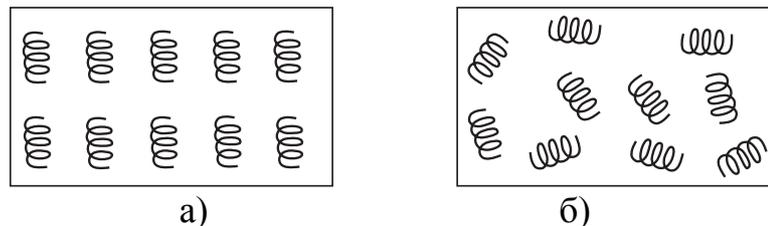


Рис. 1.1

чительно меньшими рабочей длины волны – [рис.1.1. а, б.](#)

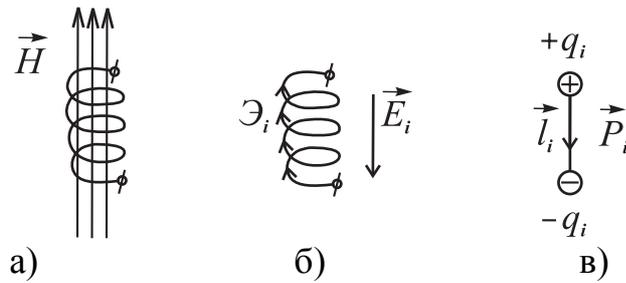


Рис. 1.2

Механизм образования киральной поляризации под действием внешнего магнитного поля  $\vec{H}$  иллюстрирует [рис.1.2](#). Переменное магнитное поле  $\vec{H}$  ([рис. 1.2а](#)) индуцирует в соответствии законом электромагнитной индукции Фарадея ЭДС  $\mathcal{E}_i$  в каждом из витков спиральки ([рис. 1.2б](#)). В результате вдоль длины спиральки образуется электрическое поле  $\vec{E}_i$ , которое эквивалентно полю электрического диполя ([рис. 1.2б](#)). Таким образом, за счет магнитного поля  $\vec{H}$  образуется элементарный диполь  $\vec{P}_i(\vec{H})$ . В результате возникает киральная составляющая вектора поляризованности среды

$$\vec{p}_k(\vec{H}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{i \in \Delta V} \vec{P}_i(\vec{H}) / \Delta V \right). \quad (1.20)$$

На [рис.1.3](#) иллюстрируется процесс возникновения киральной намагниченности. За счет действия внешнего электрического поля  $\vec{E}$  ([рис. 1.3а](#)) в проводящей спиральке возникают токи  $i_\phi$  ([рис. 1.3б](#)), образующие вокруг спиральки магнитное поле  $\vec{H}_i$ , аналогичное полю магнитного диполя ([рис. 1.3в](#)). В результате возникает магнитный момент  $\vec{M}_i$  ([рис. 1.3г](#)). Следствием этого является образование киральной намагниченности

$$\vec{J}_k(\vec{E}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_{i \in \Delta V} \vec{M}_i(\vec{E}) / \Delta V \right). \quad (1.21)$$

Таким образом, в киральных средах следует записывать материальные уравнения в виде

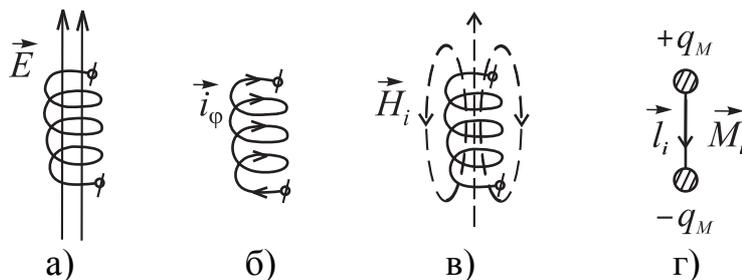


Рис. 1.3

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) + \vec{P}_k(\vec{H}), \\ \vec{B}(\vec{H}, \vec{E}) &= \mu_0 \vec{H} + \vec{J}(\vec{H}) + \vec{J}_k(\vec{E}).\end{aligned}\tag{1.22}$$

Уравнения Друде-Борна-Федорова дают эти связи в случае биизотропных сред (изотропных киральных сред) в виде

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_a \vec{E} + \beta \varepsilon_a \operatorname{rot} \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H} + \beta \mu_a \operatorname{rot} \vec{H},\end{aligned}\tag{1.23}$$

где  $\beta$  - коэффициент киральности.

Резко возросший в последнее время интерес к киральным средам связан, с одной стороны, с биологическими исследованиями влияния СВЧ излучений и, с другой стороны, с военными технологиями в связи с созданием «невидимых» бомбардировщиков типа «Стелс», Б-2.

## ГЛАВА II

### ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭМП

Во многих задачах электродинамики вводятся границы раздела двух сред, обладающих различными электрическими и магнитными свойствами, т.е.  $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$  для двух сред различны (достаточно, конечно, различия и одного из параметров).

В связи с тем, что свойства среды меняются скачкообразно в макроскопическом приближении, вектора ЭМП терпят разрыв на границе раздела двух сред. Это означает, что дифференциальные соотношения на границе теряют смысл. Поэтому здесь в дополнение к УМ вводятся граничные условия (ГУ), связывающие тангенциальные (касательные) и нормальные составляющие векторов поля на обеих сторонах границы.

Эти ГУ устанавливаются с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

#### 2.1. ГУ для тангенциальных составляющих векторов ЭМП

*Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля*

Рассмотрим границу раздела двух сред ([рис. 2.1.](#))

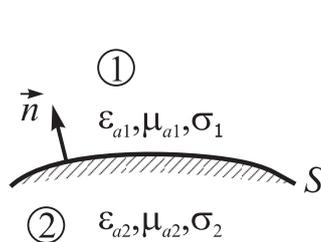


Рис. 2.1.

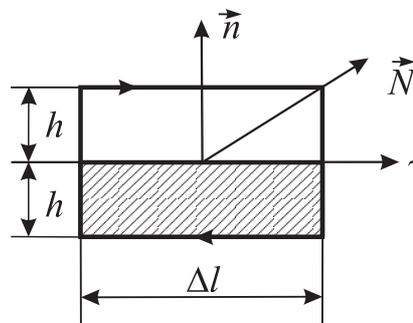


Рис. 2.2.

Выделим элементарный плоский прямоугольный участок вблизи границы, отвечающий следующим трем условиям:

- 1) границу в его пределах можно считать плоской;
- 2) среды 1 и 2 в пределах этого участка однородны;
- 3) поля в пределах этого участка не изменяются.

Введем систему векторов, определяющих ориентацию плоскости участка и направление обхода его границы ([рис. 2.2.](#)):

- 1)  $\vec{n}$  - вектор нормали к  $S$ , направление и антинаправление вертикальных перемещений по контуру участка;

- 2)  $\vec{\tau}$  - тангенциальный к  $S$  вектор, направление и антинаправление горизонтальных перемещений по контуру участка;  
 3)  $\vec{N}$  - вектор бинормали, направление вектор-площади участка.  
 Три вектора образуют правую тройку:  $\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$ .

Запишем второе УМ в интегральной форме:

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS \vec{N}.$$

Применим его к выделенному элементарному участку, используя его свойства:

$$\Delta \ell \vec{\tau} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) + \Delta_{hE} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} h \Delta \ell \vec{N}, \quad (2.1)$$

$\Delta_{hE}$  - элемент циркуляции  $\vec{E}$  по вертикальным участкам контура.

Перейдем к пределу  $h \rightarrow 0$ . Учтем при этом, что на границе

$\vec{E}_{1,2} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \infty$ , и поэтому правая часть уравнения и  $\Delta_{hE}$  обращаются в нуль. В итоге получаем

$$\vec{\tau} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \text{ или } E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0, \quad (2.2)$$

т.е. тангенциальные составляющие  $\vec{E}$  непрерывны при переходе границы раздела любых двух сред. Физически это связано с тем, что поверхностных магнитных токов не существует. Придадим общность полученному результату. Учтем, что  $\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$ . Тогда

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) [\vec{N}, \vec{n}] = [\vec{n}, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] \vec{N} = 0.$$

Наши результаты справедливы для любой ориентации  $\vec{N}$  площадки. Ввиду произвольности  $\vec{N}$  получаем:

$$[\vec{n}, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)]_S = 0. \quad (2.3)$$

*Граничные условия для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля*

Запишем первое УМ в интегральной форме:

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{\delta} \cdot dS\vec{N} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dS\vec{N}.$$

Применим это уравнение к ранее рассмотренному элементарному участку, используя его три свойства:

$$\Delta \ell \vec{\tau} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) + \Delta_{hH} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \vec{D}_i}{\partial t} h \Delta \ell \vec{N} + \sum_{i=1}^2 \vec{\delta}_i \Delta \ell h \vec{N}. \quad (2.4)$$

Перейдем к пределу  $h \rightarrow 0$ . При этом  $\vec{H}_{1,2} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\partial \vec{D}_i}{\partial t} \rightarrow \infty$  на  $S$ .

Но для тока такое утверждение неверно, поскольку при определенной идеализации ток может протекать по поверхности, не занимая объем (поверхностный ток).

Такая ситуация возникает в случае, когда одна из сред предполагается идеально проводящей. Введем понятие поверхностного тока:

$$\vec{\delta}_S = \lim_{h \rightarrow 0} h \vec{\delta} \left[ \frac{A}{M} \right]. \quad (2.5)$$

С учетом сказанного в пределе  $h \rightarrow 0$  получаем

$$\vec{\tau} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\delta}_S \vec{N}, \text{ или } H_{1\tau} - H_{2\tau} = \vec{\delta}_S \vec{N}, \quad (2.6)$$

т.е. разрыв тангенциальных составляющих  $\vec{H}$  равен поверхностному электрическому току.

Проведем обобщение:

$$[\vec{N}, \vec{n}] (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = [\vec{n}, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \vec{N} = \vec{\delta}_S \vec{N}.$$

В связи с произвольной ориентацией  $\vec{N}$  имеем

$$[\vec{n}, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] = \vec{\delta}_S. \quad (2.7)$$

Физически этот разрыв обусловлен возникновением двойного магнитного слоя на поверхности, где протекает поверхностный ток.

## 2.2. ГУ для нормальных составляющих векторов ЭМП

*ГУ для нормальных составляющих векторов  $\vec{D}$*

Рассмотрим цилиндрический объем  $\Delta V$  с основанием  $\Delta S$  и высотами  $h$  в 1 и 2 средах (Рис.2.3).

Объем будем считать элементарным со следующими признаками:

- 1) в пределах  $\Delta V$  -  $\Delta S$  – плоская;
- 2) в пределах  $\Delta V$  среды 1 и 2 однородные;
- 3) в пределах  $\Delta V$  поля в средах 1 и 2 не изменяются

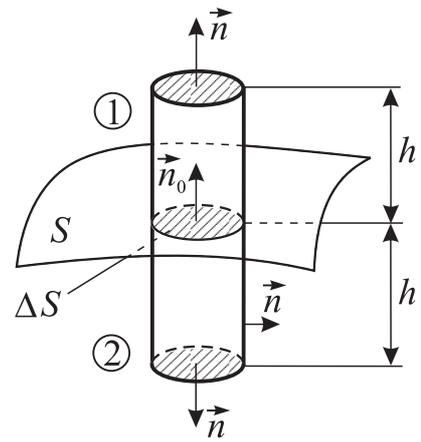


Рис. 2.3.

Запишем третье УМ в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{D} dS \vec{n} = q = \int_{\Delta V} \rho dV.$$

Поскольку существуют поверхностные заряды, введем понятие о плотности поверхностного заряда:

$$\rho_S = \lim_{h \rightarrow 0} h \rho \left[ \frac{K}{M^2} \right]. \quad (2.8)$$

Перепишем третье УМ, учитывая все признаки элементарности  $\Delta V$ :

$$\vec{n}_0 \Delta S (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) + \Phi_{бок}^e = \sum_{i=1}^2 \rho_i \Delta S h, \quad (2.9)$$

$\Phi_{бок}^e$  - электрический поток через боковую поверхность цилиндра.

Перейдем теперь к пределу  $h \rightarrow 0$ , учитывая, что  $\vec{D}_{1,2} \rightarrow \infty$  и поэтому  $\Phi_{бок}^e \rightarrow 0$ . При этом получим

$$\vec{n}_0 (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S, \quad (2.10)$$

т.е. разрыв нормальных составляющих  $\vec{D}$  равен поверхностной плотности электрического заряда на граничной поверхности.

Если  $\rho_S = 0$ , то  $D_{1n} = D_{2n}$  или  $\varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n}$  и имеет место разрыв нормальных составляющих вектора  $\vec{E}$ :

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}. \quad (2.11)$$

Аналогичные действия с третьим УМ приводят к следующему результату для  $H_n$ :

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \quad (2.12)$$

Важным частным случаем является тот, когда среда 2 идеализируется как бесконечно проводящая. В этом случае на любой частоте поле в эту среду не проникает. Тогда полученная система ГУ преобразуется в следующую:

$$[\vec{n}, \vec{E}]_S = 0, [\vec{n}, \vec{H}]_S = \vec{\delta}_S, D_{1n} = \rho_S, H_{1n}|_S = 0. \quad (2.13)$$

В этом случае достаточно двух условий:

$$E_\tau|_S = 0, H_n|_S = 0. \quad (2.14)$$

В заключение необходимо отметить, что ГУ, сформулированные выше, относятся к простейшему случаю: граница S гладкая (т.е. не имеет изломов), а среды 1 и 2 – изотропные. В общем случае следует обратиться к специальной литературе, например:

Вайнштейн Л.А., Журав С.М., Суков А.И., К расчету омических потерь на краях тонких металлических полосок. Докл. АН СССР, 1986, т.289, №6, с. 1338-1342. Курушин Е.П., Нефедов Е.И. Электродинамика анизотропных волноведущих структур. М.: Наука, 1983. – 223 с.

## ГЛАВА III

### ЭНЕРГИЯ ЭМП

#### 3.1. Удельная мощность сторонних источников в ЭМП Мощность сторонних источников

ЭМП, как один из видов материи, является носителем энергии. Электромагнитная энергия может преобразовываться в любой другой вид энергии: механическую (ускорение зарядов), тепловую, химическую, внутреннюю энергию кристалла, молекулы, атома и т.д. И, наоборот, все перечисленные виды энергии могут преобразовываться в электромагнитную энергию.

Рассмотрим произведение  $\vec{\delta} \vec{E}$  и распишем его в конечных приращениях:

$$\vec{\delta} \vec{E} = \rho \vec{v} \vec{E} \equiv \frac{\Delta q}{\Delta V} \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \vec{E} = \frac{\Delta A}{\Delta t \Delta V} = \vec{p}_{\Pi}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\Delta A$  – работа силы поля в объеме  $\Delta V$  за время  $\Delta t$ ,  $p_{\Pi}$  – удельная мощность потерь (в пределе  $\Delta V \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим джоулевы потери:  $\vec{\delta} = \sigma \vec{E}$ . Тогда

$$p_{\Pi\sigma} = \sigma \vec{E} \vec{E} = \sigma E^2. \quad (3.2)$$

Однако плотность тока  $\vec{\delta}$  может создаваться не только рассматриваемым полем, но и сторонними по отношению к этому полю силами, которые могут иметь и не электромагнитную природу (например, силы инерции движущихся электронов в электронных приборах типа «О»).

Поэтому плотность тока  $\vec{\delta}$  можно представить в виде  $\vec{\delta} = \sigma \vec{E} + \vec{\delta}_{cm}$ , где  $\vec{\delta}_{cm}$  характеризует действие сторонних источников. Теперь полная удельная мощность в данном поле может быть записана как

$$p = \vec{\delta} \vec{E} = \delta E^2 + \vec{\delta}_{cm} \vec{E} = p_{\Pi\sigma} - p_{cm}, \quad (3.3)$$

где  $p_{cm}$  – мощность сторонних источников, отдаваемая данному полю (этим определяется знак  $p_{cm}$ ). Таким образом, мощность сторонних источников определяется как  $p_{cm} = -\vec{\delta}_{cm} \vec{E}$ .

#### 3.2. Баланс энергии в ЭМП. Теорема Умова-Пойтинга

Вначале докажем следующее векторное тождество:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] &= \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} \\ \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] &= \nabla [\vec{E}, \vec{H}] = \nabla \left[ \begin{array}{c} \downarrow \\ \vec{E}, \vec{H} \end{array} \right] + \nabla \left[ \begin{array}{c} \downarrow \\ \vec{E}, \vec{H} \end{array} \right] = \\ &= \vec{H} [\nabla, \vec{E}] - \vec{E} [\nabla, \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}. \end{aligned}$$

Здесь  $\nabla$  - вектор-оператор типа

$$\nabla = \vec{X}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{Y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{Z}_0 \frac{\partial}{\partial z},$$

стрелки сверху указывают вектор, на который действует  $\nabla$ .

Составим баланс энергии. Для этого первое УМ умножим на  $(-\vec{E})$ , второе на  $\vec{H}$  и сложим, используя затем доказанное векторное тождество. При этом получим

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = - \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} - \delta \vec{E}. \quad (3.4)$$

Перейдем к интегральной формулировке полученного уравнения, интегрируя левую и правую части по объему  $V$  с граничной поверхностью  $S$  и используя в левой части теорему Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned} \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} &= - \int_V \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV - \int_V \delta \vec{E} dV = \\ &= - \int_V \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV + P_{cm} - P_{\pi 6}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В записанном уравнении нам известен смысл только последних двух членов справа – это мощность сторонних источников и омических потерь в объеме  $V$ . Для того чтобы установить физический смысл остальных членов, рассмотрим два следующих предельных случая.

Первый случай.

Пусть имеется объем  $V$ , в котором

$$1) P_{cm} = 0,$$

2)  $V$  изолирован от внешнего пространства непрозрачной  $S$ , так что на внешней стороне  $S$   $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] \vec{n} dS = 0$ .

Тогда имеем

$$P_{\text{п6}} = - \int_V \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV.$$

Но мощность потерь в изолированном объеме  $V$  должна быть численно равна скорости убывания запасенной энергии  $-\frac{dW}{dt}$ . Следовательно,

$$\int_V \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} dV = \frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV,$$

где  $w$  – удельная энергия ЭМП.

Таким образом,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w_{\text{э}}}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{м}}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Положим, что  $\varepsilon_a \neq f(t)$  и  $\mu_a \neq f(t)$  (диэлектрических и магнитных потерь нет). Тогда

$$\frac{\partial w_{\text{э}}}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \varepsilon_a \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_a}{2} \frac{\partial (\vec{E} \vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right).$$

Таким образом, удельная энергия электрического поля из УМ определяется как

$$w_{\text{э}} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}. \quad (3.7)$$

Аналогичным путем находим формулу удельной энергии магнитного поля:

$$w_{\text{м}} = \frac{\mu_a H^2}{2}. \quad (3.8)$$

Второй случай:

1)  $P_{\text{см}} \neq 0$ ;

- 2) процесс установился, т.е.  $\frac{dW}{dt} = 0$ ;
- 3)  $P_{п6} = 0$ ;
- 4)  $S$  прозрачна для ЭМП.

В этом случае имеем

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = P_{cm}. \quad (3.9)$$

С другой стороны, поскольку в рассматриваемом случае в объеме  $V$  нет потерь и нет накопления электромагнитной энергии,  $P_{cm} = P_{\Sigma}$ , где  $P_{\Sigma}$  - мощность излучения через граничную поверхность  $S$ . Следовательно,  $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} = P_{\Sigma} = \oint_S \vec{S}_0 d\vec{S}$  где  $\vec{S}_0$  - плотность потока энергии через  $S$ . Таким образом,  $\vec{S}_0 = [\vec{E}, \vec{H}]$ . Эта величина называется вектором Умова-Пойнтинга. Этот вектор указывает величину плотности потока энергии и направление распространения энергии ЭМП.

Возвращаясь к исходному уравнению баланса энергии ЭМП, имеем

$$\oint_S \vec{S}_0 d\vec{S} + P_{п6} + \frac{dW}{dt} = P_{cm}. \quad (3.10)$$

Этот закон сохранения энергии для ЭМП носит название теоремы Умова-Пойнтинга.

В дифференциальной форме он выражается в виде

$$\text{div} \vec{S}_0 + p_{п6} + \frac{\partial w}{\partial t} = p_{cm}. \quad (3.11)$$

Получим теперь выражение для диэлектрических и магнитных потерь, что соответствует случаю  $\varepsilon_a(t)$  и  $\mu_a(t)$ . Будем иметь в виду периодические электромагнитные процессы с периодом  $T$ . Рассмотрим случай, когда

$\oint_S \vec{S}_0 d\vec{S} = 0$ ,  $P_{п6} = 0$ , среднее за период значение  $\overline{W}^T$  постоянно, поэтому сред-

нее значение  $\frac{\overline{dW}^T}{dt} = 0$ .

Таким образом имеем

$$p_{cm} = \left\{ \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\}.$$

Найдем среднее за период  $T$  значение величин:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T p_{cm} dt &= \bar{p}_{cm} = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \vec{E} \frac{\partial D}{\partial t} dt + \vec{H} \frac{\partial B}{\partial t} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \oint_{\ell_{\varepsilon}} \vec{E} d\vec{D} + \frac{1}{T} \oint_{\ell_M} \vec{H} d\vec{B} = \bar{p}_{\varepsilon}^T + \bar{p}_{\mu}^T, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\ell_{\varepsilon}$  - контур диэлектрического гистерезиса,  $\ell_M$  - магнитного.

Таким образом,  $\bar{p}_{\varepsilon}^T = \frac{1}{T} S_{\varepsilon}$ ,  $\bar{p}_{\mu}^T = \frac{1}{T} S_M$ , т.е. среднее за период  $T$  удельные диэлектрические потери  $\bar{p}_{\varepsilon}^T$  пропорциональны «площади» петли

диэлектрического гистерезиса  $S_{\varepsilon} = \oint_{\ell_{\varepsilon}} \vec{E} d\vec{D}$ , магнитные -  $\bar{p}_{\mu}^T$  соответственно площади  $S_M = \oint_{\ell_M} \vec{H} d\vec{B}$  петли магнитного гистерезиса.

## ГЛАВА IV

### КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ И ТЕОРЕМА О КОМПЛЕКСНОЙ МОЩНОСТИ

#### 4.1. УМ в комплексной форме

В большинстве случаев электродинамические задачи решаются, как и в радиотехнике, в спектральной области и решение ищется для гармонических процессов. Предполагается, что ЭМП имеет монохроматический характер, т.е. частота колебаний векторов ЭМП постоянна. В этом случае используется метод комплексных амплитуд (МКА). При этом имеется в виду

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \psi_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \operatorname{Re} \dot{\psi}_m e^{j\omega t} = \operatorname{Re} \dot{\psi}. \quad (4.1)$$

Величина  $\dot{\psi}_m = \psi_m e^{j\varphi}$  называется комплексной амплитудой функции  $\psi$ . Символ  $\operatorname{Re}$  обозначает выделение действительной части комплексного числа  $\dot{\psi}$ .

Аналогично можно записать в комплексной форме и векторную величину

$$\vec{V} = \vec{V}_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \dot{\vec{V}}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{\vec{V}}_m = \vec{V}_m e^{j\varphi}. \quad (4.2)$$

Для дальнейшего анализа важны следующие свойства комплексных представлений гармонических процессов.

1. Дифференцирование  $\dot{\vec{V}}(t)$  по времени  $t$  равносильно умножению  $\dot{\vec{V}}$  на  $j\omega$ :

$$\frac{\partial \dot{\vec{V}}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{V}}. \quad (4.3)$$

2. Интегрирование  $\dot{\vec{V}}(t)$  по  $t$  равносильно делению  $\dot{\vec{V}}$  на  $j\omega$ :

$$\int \dot{\vec{V}} dt = \frac{\dot{\vec{V}}}{j\omega}. \quad (4.4)$$

3. Справедливо следующее соотношение:

$$\overline{\vec{V}_1(\omega t)\vec{V}_2(\omega t)^T} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{V}}_1 \dot{\vec{V}}_2^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{V}}_1^* \dot{\vec{V}}_2),$$

(4.5)

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ , знак  $\overline{\quad}^T$  означает усреднение по  $t$  в интервале  $t \in [0, T]$ .

В дальнейшем будем пользоваться комплексными векторами  $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{D}}, \dot{\vec{H}}, \dot{\vec{B}}$ .

Обратимся к вычислению диэлектрических и магнитных потерь в комплексной форме.

#### *Диэлектрические потери*

В этом случае вектор  $\vec{D}$  запаздывает относительно  $\vec{E}$  на угол диэлектрических потерь  $\Delta_E$ :

$$\dot{\varepsilon}_{1a} = \frac{\dot{\vec{D}}}{\dot{\vec{E}}} = \frac{\vec{D}_m}{\vec{E}_m} e^{-j\Delta_E} = \varepsilon'_{1a} - j\varepsilon''_{1a}. \quad (4.6)$$

Индекс «1» здесь поставлен затем, чтобы выделить диэлектрические потери из общих электрических потерь, куда входят и джоулевы.

#### *Магнитные потери*

В этом случае вектор  $\vec{B}$  запаздывает относительно  $\vec{H}$  на угол магнитных потерь  $\Delta_H$ :

$$\dot{\mu}_a = \frac{\dot{\vec{B}}}{\dot{\vec{H}}} = \frac{\vec{B}_m}{\vec{H}_m} e^{-j\Delta_H} = \mu'_a - j\mu''_a. \quad (4.7)$$

Таким образом, в комплексной форме УМ сводятся к первым двум и записываются в следующей форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\varepsilon}_{1a} \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{\delta}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Преобразуем первое УМ с учетом того, что  $\dot{\vec{\delta}} = \sigma \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{\delta}}_{cm}$ :

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \left( \dot{\varepsilon}_{1a} - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{\delta}}_{cm}.$$

Обозначим

$$\left( \dot{\varepsilon}'_{1a} - j \frac{\sigma}{\omega} \right) = \dot{\varepsilon}'_a = \varepsilon'_a - j \varepsilon''_a = \varepsilon'_{1a} - j \left( \varepsilon''_{1a} + \frac{\sigma}{\omega} \right),$$

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_{1a}, \quad \varepsilon''_a = \varepsilon''_{1a} + \frac{\sigma}{\omega}.$$

С учетом этого обозначения УМ в комплексной форме приобретают вид

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{H} = j\omega \dot{\varepsilon}'_a \dot{E} + \dot{\delta}_{cm}, \\ \text{rot } \dot{E} = -j\omega \dot{\mu}'_a \dot{H}. \end{cases} \quad (4.9)$$

## 4.2. Теорема о комплексной мощности

Составим баланс энергии в комплексной форме. Для этого умножим первое комплексно сопряженное УМ на  $(-\dot{E})$ , второе – на  $\dot{H}^*$  и сложим. В результате получим

$$\begin{aligned} \text{div} \left[ \dot{E}, \dot{H}^* \right] &= -j\omega \left\{ \dot{\mu}'_a H_m^2 - \dot{\varepsilon}'_a E_m^2 \right\} - \dot{E} \dot{\delta}_{cm}^* = \\ &= -j\omega \left\{ \mu'_a H_m^2 - \varepsilon'_a E_m^2 \right\} - \omega \left\{ \mu''_a H_m^2 + \varepsilon''_a E_m^2 \right\} - \dot{\delta}_{cm}^* \dot{E}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Определим среднее за период  $T$  величины:

$$\overline{S}_0^T = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \dot{E}, \dot{H}^* \right] = \text{Re} \dot{S}_0, \quad \dot{S}_0 = \frac{1}{2} \left[ \dot{E}, \dot{H}^* \right],$$

$$\overline{w}_\varepsilon^T = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\dot{\varepsilon}'_a \dot{E} \dot{E}^*}{2} \right) = \frac{\varepsilon'_a E_m^2}{4},$$

$$\overline{w}_\mu^T = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\dot{\mu}'_a \dot{H} \dot{H}^*}{2} \right) = \frac{\mu'_a H_m^2}{4},$$

$$\overline{p}_{cm}^T = \frac{1}{2} \text{Re} \left( -\dot{\delta}^* \dot{E} \right) = \text{Re} \overline{P}_{cm}, \quad p_{cm} = -\frac{\dot{E} \dot{\delta}^*}{2} = p_a + jp_r,$$

$$\overline{p}_\pi^T = \frac{1}{2} \omega \left\{ \mu''_a H_m^2 + \varepsilon''_a E_m^2 \right\}.$$

Учитывая перечисленное, баланс энергии в дифференциальной форме можно записать в виде

$$\operatorname{div} \dot{\vec{S}}_0 + \bar{P}_\Pi^T + 2j\omega \left\{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_\Delta^T \right\} = P_{cm}.$$

В интегральной форме баланс энергии имеет вид

$$\oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + \bar{P}^T + 2j\omega \left\{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_\Delta^T \right\} = P_{cm}.$$

Разделяя действительную и мнимую части уравнения, получаем теорему об активной мощности :

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + \bar{P}_\Pi^T = P_a,$$

и теорему о реактивной мощности :

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + 2\omega \left\{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_\Delta^T \right\} = P_r.$$

Теорему об активной мощности можно более подробно записать так :

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + \frac{\omega}{2} \int_V \left\{ \mu''_a H_m^2 + \varepsilon''_a E_m^2 \right\} dV = P_a. \quad (4.12)$$

Смысл теоремы об активной мощности : активная мощность  $P_a$ , развиваемая в объеме  $V$ , расходуется на потери в  $V$  и активную мощность излучения через граничную поверхность  $S$ .

Для выяснения смысла теоремы о реактивной мощности рассмотрим случай, когда поток реактивной мощности через граничную поверхность  $S$  отсутствует. Тогда

$$2\omega \left\{ \bar{W}_M^T - \bar{W}_\Delta^T \right\} = P_r.$$

Если частота источника  $\omega$  соответствует одной из резонансных частот объема  $V - \omega_{oi}$ ,  $\bar{W}_M^T = \bar{W}_\Delta^T$  и реактивная мощность  $P_r = 0$ .

При  $\omega < \omega_{oi}$   $\bar{W}_M^T > \bar{W}_\Delta^T$  и нужен сторонний накопитель электрической энергии, которым становится источник питания данного объема (причем обмен энергии происходит дважды за период). Таким образом, реактивная мощность  $P_r$  количественно описывает колебания энергии между источником и нагрузкой при  $\omega \neq \omega_{oi}$ .

## ГЛАВА V

### ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

#### 5.1. Волновые уравнения

Запишем четыре УМ в действительной форме, полагая  $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma = Const$ . Последнее означает, что среда однородна, а диэлектрических и магнитных потерь нет, есть только джоулевы потери. Систему отсчета будем считать неподвижной.

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\delta}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5.4)$$

Применим к обеим частям уравнения (5.2) операцию  $\operatorname{rot}$ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Используя (5.1), тождество  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$ , а также (5.3), получаем

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho + \mu_a \frac{\partial \vec{\delta}}{\partial t}.$$

Учтем проводимость среды:  $\vec{\delta} = \sigma \vec{E} + \vec{\delta}_{cm}$ . Тогда имеем

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_a} \operatorname{grad} \rho + \mu_a \frac{\partial \vec{\delta}_{cm}}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Векторное уравнение Д'Аламбера (5.5) является волновым уравнением для вектора  $\vec{E}$  ЭМП. Заметим, что в правой части уравнения (5.5) стоят толь-

ко функции источников поля, поскольку токи проводимости сами по себе не создают  $\rho_{пров}$ . Докажем это.

В соответствии с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_{пров}}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\delta}_{пров} = -\sigma \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_a} \rho_{пров}.$$

В последнем приравнивании учтено (5.3) при условии  $\rho_{стор} = 0$ . Таким образом, для  $\rho_{пров}$  имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \rho_{пров}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_a} \rho_{пров} = 0, \quad (5.6)$$

которое имеет такое решение:  $\rho_{пров} = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_a} t}$ , где  $\rho_0$  - начальное возмущение  $\rho_{пров}$ . Таким образом, в установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ )  $\rho_{пров} = 0$ . Поэтому  $\rho_{пров} \neq 0$  только в присутствии сторонних источников, тогда в уравнении (5.6) появляется ненулевая величина  $-\frac{\sigma}{\varepsilon_a} \rho_{стор}$ .

Получим волновое уравнение для вектора  $\vec{H}$ . С этой целью применим к обеим частям уравнения (5.1) операцию rot:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{D} + \operatorname{rot} \vec{\delta}.$$

Далее воспользуемся уравнениями (5.2), (5.4), а также тождеством  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$ . При этом получим, учитывая, что  $\vec{\delta} = \sigma \vec{E} + \vec{\delta}_{см}$

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{\delta}_{см}. \quad (5.7)$$

Левые части волновых уравнений для вектора  $\vec{E}$  (5.5) и вектора  $\vec{H}$  (5.7) идентичны. Это свидетельствует о том, что в пространстве, свободном от источников (т.е. когда правые части (5.5) и (5.6) равны нулю) вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеют одинаковый волновой характер. Как следует из теории волновых уравнений, коэффициент при вторых производных по времени равен  $V_\phi^{-2}$  ( $V_\phi$  - фазовая скорость волнового процесса в среде). Таким образом, фазовая скорость волнового электромагнитного процесса в свободном пространстве

$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$ . Коэффициент при первых производных по времени определяет пространственное затухание волнового процесса в среде с джоулевыми потерями.

Таким образом, из УМ непосредственно следует, что электромагнитные процессы имеют волновой характер и, следовательно, любое ЭМП представимо как некоторое наложение электромагнитных волн.

## 5.2. Электродинамические потенциалы

Установим далее формулы, выражающие напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  через электродинамические потенциалы  $\vec{A}$  (векторный) и  $\Phi$  (скалярный). Для этого обратимся к системе уравнений Максвелла.

Четвертое уравнение Максвелла утверждает, что поле  $\vec{B}$  чисто вихревое:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5.8)$$

Из (5.8) следует, что поле  $\vec{B}$  следует определить как

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (5.9)$$

так как  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ .

Воспользуемся теперь вторым уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Подставляя в (5.10) выражение  $\vec{B}$  (5.9) и имея в виду, что координаты и время в используемой лабораторной системе отсчета независимы, получим

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.11)$$

Из (5.11) с учетом того, что  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$ , следует

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi. \quad (5.12)$$

Введенные таким образом функции координат и времени  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ,  $\Phi(\vec{r}, t)$  (с традиционным следованием знаков), как известно, и являются векторным ( $\vec{A}$ ) и скалярным ( $\Phi$ ) потенциалами электромагнитного поля  $\vec{E}, \vec{B}$ .

Заметим, что такое определение потенциалов является очевидным образом неоднозначным. Действительно, поле  $\vec{E}, \vec{B}$  не изменяется, если вместо исходных  $\vec{A}, \Phi$  использовать  $\vec{A}', \Phi'$ , определенные следующим образом:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f(x, y, z, t), \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}. \quad (5.13)$$

Таким образом, векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции  $f(x, y, z, t)$ , а скалярный – с точностью до производной той же функции по времени  $\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}$ . Это означает, что

электродинамические потенциалы могут быть доопределены путем наложения на них любого условия связи, ненарушающего (5.13). Это весьма важный момент, позволяющий существенно улучшить вычислительную процедуру при решении электродинамических задач путем соответствующего выбора указанного условия.

Налагаемые на электродинамические потенциалы условия или связи называются условиями калибровки потенциалов. Из (5.13) очевидно, что всегда можно  $f(x, y, z, t)$  выбрать так, что  $\Phi'(x, y, z, t) = 0$ , (т.е. чисто переменное электромагнитное поле  $\vec{E}, \vec{B}$ , когда  $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ , может быть в принципе описано полностью одним векторным потенциалом  $\vec{A}'$ ).

Сформулируем теперь уравнения, определяющие электродинамические потенциалы  $\vec{A}, \Phi$ . Для этого используем первое и третье уравнения Максвелла

$$\frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\delta}, \quad (5.14)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (5.15)$$

Здесь  $\varepsilon_a, \mu_a$  - соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости пространства, которые при записи (5.14), (5.15) считались постоянными,  $\vec{\delta}$  - плотность электрического тока,  $\rho$  - плотность электрического заряда.

Подставляя в уравнение (5.14) выражения (5.9) и (5.12), а в уравнение (5.15) – (5.12), получим уравнения, определяющие  $\vec{A}$ ,  $\Phi$ :

$$\text{rot rot } \vec{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi + \mu_a \vec{\delta}, \quad (5.16)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (5.17)$$

Наиболее простой вид принимает уравнения (5.16), (5.17), если использовать условие калибровки Лоренца:

$$\text{div} \vec{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (5.18)$$

При условии (5.18) получим

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta} \quad (5.19)$$

$$\nabla^2 \Phi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (5.20)$$

При записи (5.19) использовано векторное тождество:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}.$$

Однако в случае, когда необходимо выделение содержащей разрыв на границах источников квазистатической составляющей электрического поля  $\vec{E}$ , можно воспользоваться кулоновской калибровкой потенциалов:

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (5.21)$$

В этом случае уравнения (5.16), (5.17) принимают вид

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \left( \vec{\delta} - \varepsilon_a \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_a \vec{\delta}', \quad (5.22)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (5.23)$$

Соответственно квазистатическая часть электрического поля  $\vec{E}^1$  определяется только через  $\Phi$ , а динамическая  $\vec{E}^2$  - только через  $\vec{A}$  :

$$\vec{E}^1 = -\nabla\Phi, \quad \vec{E}^2 = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{E} = \vec{E}^1 + \vec{E}^2. \quad (5.24)$$

В дальнейшем мы будем использовать калибровку Лоренца (5.18), поскольку уравнения (5.19), (5.20) в этом случае наиболее просто связывают электродинамические потенциалы с их источниками -  $\vec{\delta}$  и  $\rho$ .

### 5.3. Электрический вектор Герца или поляризационный потенциал

Определим векторный потенциал через электрический вектор Герца  $\vec{\Pi}^e$  следующим образом:

$$\vec{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}.$$

Скалярный потенциал  $\Phi$  определим через  $\vec{\Pi}^e$  так, чтобы выполнялось условие калибровки Лоренца (5.18) :

$$\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\text{div} \vec{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{\Pi}^e,$$

тогда  $\Phi = -\text{div} \vec{\Pi}^e$ .

Подчеркнем, что указанные определения возможны только при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ , т.е. для чисто переменных полей. В общем случае, когда имеются статические и стационарные компоненты ЭМП, нужны все четыре составляющие потенциалов, т.е. и  $\vec{A}$ , и  $\Phi$ .

При введении  $\vec{\Pi}^e$  поля  $\vec{E}, \vec{H}$  определяются только через один вектор  $\vec{\Pi}^e$  :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \vec{A} = \varepsilon_a \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \right), \quad (5.25)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} + \text{grad } \text{div } \vec{\Pi}^e . \quad (5.26)$$

Выясним физический смысл  $\vec{\Pi}^e$ . Для этого установим его источник. Обратимся к понятию поляризованности среды и вектору поляризации  $\vec{p}$ .

$$\oint_S \vec{p} d\vec{S} = -q_{\text{связ}} = -\int_V \rho_{\text{связ}} dV . \quad (5.27)$$

Здесь  $q_{\text{связ}}$  - связанный заряд, пересекающий  $S$  при поляризации. Уравнение (5.27) можно переписать, используя теорему Остроградского – Гаусса:

$$\int_V \text{div } \vec{p} dV = -\int_V \rho_{\text{связ}} dV .$$

Ввиду произвольности  $V$  получаем дифференциальный эквивалент (5.27):

$$\text{div } \vec{p}_{\text{см}} = -\rho_{\text{связ}} . \quad (5.28)$$

Если действуют сторонние источники, создающие  $\vec{p}_{\text{см}}$  и  $\rho_{\text{см}}$ , то между ними, очевидно, должна существовать идентичная (5.28) связь:

$$\text{div } \vec{p}_{\text{см}} = -\rho_{\text{см}} . \quad (5.29)$$

Дифференцируя по времени (5.29) и, используя уравнение непрерывности, имеем

$$\text{div } \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_{\text{см}}}{\partial t} = \text{div } \vec{\delta}_{\text{см}} . \quad (5.30)$$

Из уравнения (7.6) с учетом тождества  $\text{div } \text{rot } \vec{a} \equiv 0$  получаем

$$\vec{\delta}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{p}_{\text{см}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{a} = \vec{\delta}_{\text{см}}^P + \vec{\delta}_{\text{см}}^3 .$$

Здесь  $\vec{\delta}_{\text{см}}^P = \frac{\partial \vec{p}_{\text{см}}}{\partial t}$  - разомкнутая плотность тока, образующая  $\rho_{\text{см}}$ ,  $\vec{\delta}_{\text{см}}^3$  - замкнутая, вихревая плотность тока, для которой  $\text{div } \vec{\delta}_{\text{см}}^3 = 0$ .

Рассмотрим далее процессы, связанные только с  $\vec{\delta}_{\text{см}}^P$ . Для этого случая УМ принимают вид

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_{cm}}{\partial t}, \quad (5.31)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.32)$$

Рассматриваемый случай может соответствовать, например, возбуждению ЭМП с помощью системы диполей, образованных разомкнутыми проводниками с возбужденным в них от источника сторонним током.

Подставим в (5.31) выражения  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  (5.25) и (5.26):

$$\varepsilon_a \text{rot rot} \left( \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t} \right) = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left( -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} + \text{grad div } \vec{\Pi}^e \right) + \frac{\partial \vec{P}_{cm}}{\partial t}.$$

Используя в левой части записанного уравнения тождество  $\text{rot rot } \vec{\Pi}^e = \text{grad div } \vec{\Pi}^e - \nabla^2 \vec{\Pi}^e$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\nabla^2 \vec{\Pi}^e + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} - \frac{\vec{P}_{cm}}{\varepsilon_a} \right\} = 0.$$

В случае, который мы рассматриваем  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ , и поэтому окончательно

имеем

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}_{cm}}{\varepsilon_a}. \quad (5.33)$$

Полученное волновое уравнение для  $\vec{\Pi}^e$  (5.33) по структуре не отличается от уравнения для  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\Phi$ . Источником же  $\vec{\Pi}^e$ , как следует из (5.33), является сторонняя поляризация  $\vec{p}_{cm}$ , откуда и название этого вектора – поляризационный потенциал. Простая связь  $\vec{\Pi}^e$  и  $\vec{p}_{cm}$  весьма полезна при решении конкретных задач. Например, если  $\vec{p}_{cm} = \vec{Z}_0 p_{cm}$  (т.е.  $\vec{p}_{cm}$  имеет только  $Z$  – компоненту) из (7.9) очевидно, что для описания возбуждаемого ЭМП достаточно использовать только одну компоненту  $\vec{\Pi}^e = Z_0 \Pi_z^e$ . Т.е. в этом случае векторная задача сводится к скалярной! Заметим, что в этом случае ЭМП имеет только пять компонент: в  $\vec{H}$  отсутствует в соответствии с (5.25) продольная компонента  $H_z$ . Такое поле можно назвать поперечно – магнитным.

#### 5.4. Фиктивные магнитные точки и заряды. Перестановочная двойственность УМ. Магнитный вектор Герца

Обратимся теперь к замкнутым токам. Как известно из решения задач магнитостатики, магнитное поле рамки с током  $i$  соответствует полю магнитного диполя, т.е. магнитный момент  $\vec{M}$  замкнутого тока определяется как

$$\vec{M} = i\mu_a S\vec{n},$$

где  $S\vec{n}$  - вектор-площадка, охватываемая током  $i$ . С другой стороны, можно представить, что

$$\vec{M} = i\mu_a S\vec{n} = \vec{\ell}q_m,$$

где  $q_m$  – магнитные заряды диполя длиной  $\vec{\ell}$ .

В свою очередь,  $i_m = \frac{dq_m}{dt}$ , где  $i_m$  – разомкнутый магнитный ток.

Таким образом, замкнутый ток  $i$  создает поле, подобное тому, которое возбуждает разомкнутый магнитный ток  $i_m$ . Такие эквивалентные  $q_m$  и  $i_m$  называются фиктивными магнитными зарядами и токами. В ряде случаев такая замена эффективна, поскольку позволяет не решать непосредственно поставленную задачу, а воспользоваться уже решенной с соответствующими переобозначениями.

При введении фиктивных магнитных токов и зарядов УМ переписываются следующим образом:

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.34)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{\delta}_m, \quad (5.35)$$

$$\text{div } \vec{D} = 0, \quad (5.36)$$

$$\text{div } \vec{B} = \rho_m. \quad (5.37)$$

Очевидно от системы (5.34)...(5.37) можно перейти к исходным УМ путем следующих переобозначений:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow \vec{E}, \quad \varepsilon_a \rightarrow -\mu_a, \quad \mu_a \rightarrow -\varepsilon_a, \quad \vec{\delta}_m \rightarrow -\vec{\delta}, \quad \rho_m \rightarrow -\rho.$$

Это свойство называется перестановочной двойственностью УМ. Это свойство позволяет, как указывалось выше, не решать ряд задач непосредственно, а воспользоваться переобозначениями в решении, относящемся к “двойственной” задаче. В частности, очевидно, что задачу возбуждения ЭМП замкнутыми токами решать нет смысла как самостоятельную, т.к. она формулируется как задача возбуждения ЭМП разомкнутыми магнитными токами, т.е. в виде двойственной уже решенной задаче возбуждения ЭМП разомкнутыми электрическими токами.

Для разомкнутых магнитных токов, как и в электрическом случае, имеет место связь

$$\vec{\delta}_m^P = \frac{\partial \vec{J}_{cm}}{\partial t},$$

где  $\vec{J}_{cm}$  - намагниченность среды, создаваемая  $\vec{\delta}_m^P$ .

Второе УМ при этом записывается в виде

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{J}_{cm}}{\partial t}. \quad (5.38)$$

По аналогии с “электрической” задачей введем магнитный вектор Герца  $\vec{\Pi}^m$  :

$$\vec{E} = -\mu_a \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t} \right), \quad (5.39)$$

$$\vec{H} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} + \text{grad } \text{div } \vec{\Pi}^m. \quad (5.40)$$

Подставляя (5.39), (5.40) в (5.38), получаем при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$  следующее волновое уравнение для  $\vec{\Pi}^m$  :

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^m - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} = -\frac{\vec{J}_{cm}}{\mu_a}. \quad (5.41)$$

Структура уравнения (5.41) полностью идентична (5.33), что непосредственно может быть использовано при решении двойственных задач путем переобозначений.

Опять можно отметить, что если специфика задачи такова, что при  $\vec{J}_{cm} = \vec{Z}_0 J_{cm}$ , достаточно использовать только одну компоненту  $\vec{\Pi}^m = \vec{Z}_0 \Pi_z^m$ . Компонентой  $\Pi_z^m$  определяются в соответствии с (5.39) ЭМП, в которых отсутствует компонента  $E_z$ . Такие поля называются поперечно-электрическими.

### 5.5. Граничные условия для $\Pi_z^m$ и $\Pi_z^e$ на идеально проводящих продольных и поперечных поверхностях

Для большой группы задач, относящихся к регулярным волноводам и резонаторам, ЭМП может быть представлено в виде суперпозиции поперечно-электрических (ТЕ) и поперечно-магнитных (ТМ) полей (Самарский А.А., Тихонов А.Н. «О представлении полей в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ, ЖТФ 1948 – т.18, №7 – с.959-970»). Поскольку эти поля выражаются соответственно через  $\Pi_z^m$  и  $\Pi_z^e$ , важнейшее значение приобретает формулировка граничных значений (ГУ) для этих функций на идеально проводящих продольных и поперечных стенках указанных устройств.

Введем обобщенно-цилиндрическую систему координат  $q_1, q_2, Z$ , где  $q_1, q_2$  - обобщенные криволинейные в общем случае координаты в поперечной к  $Z$  плоскости  $Q_3$ .

Координатные поверхности в этой системе определяются следующим образом :

$$Q_1 : q_1 = Const; Q_2 : q_2 = Const; Q_3 : Z = Const .$$

Соответственно направляющие вектора системы определяются как

$$\vec{e}_1 \| d\vec{q}_1 |_{Q_1}, \vec{e}_2 \| d\vec{q}_2 |_{Q_2}, \vec{Z}_0 .$$

**ГУ для  $\Pi_z^e$ .**

Будем исходить из того, что тангенциальная составляющая  $\vec{E}$  на идеально проводящей поверхности  $S$  равна нулю. Таким образом,

$$E_z |_{Q_1, Q_2} = 0, E_{q_1, q_2} |_{Q_3} = 0 .$$

Запишем  $\vec{E}$ , выраженное через  $\vec{Z}_0 \Pi_z^e$ :

$$\vec{E} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial t^2} \vec{Z}_0 + grad \left( \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right) .$$

Полагая процессы гармоническими  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = j\omega\right)$ , имеем

$$\vec{E} = k^2 \vec{Z}_0 \Pi_z^e + \text{grad} \left( \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right), \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a,$$

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right) = \vec{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right) + \vec{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right) + \vec{Z}_0 \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2},$$

$h_1, h_2$  – соответственно метрические коэффициенты Ламэ обобщенных координат  $q_1, q_2$ .

Таким образом, имеем

$$E_z|_{Q_1, Q_2} = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_z^e|_{Q_1, Q_2} = 0.$$

Это условие должно выполняться при любых  $Z, q_1$  или  $Z, q_2$ , следовательно, необходимо потребовать

$$\Pi_z^e|_{Q_1, Q_2} = 0. \quad (5.42)$$

Иначе говоря, на идеально проводящих боковых стенках  $Q_1, Q_2$   $\Pi_z^e$  обращается в ноль.

Условие на поперечной стенке  $Q_3$  имеет вид

$$E_{q_1, q_2}|_{Q_3} = \frac{1}{h_{1,2}} \frac{\partial}{\partial q_{1,2}} \left( \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \right) \Big|_{Q_3} = 0.$$

Таким образом, если  $\frac{\partial}{\partial q_{1,2}} \neq 0$ , получаем

$$\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z} \Big|_{Q_3} = \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial \vec{n}} \Big|_{Q_3} = 0. \quad (5.43)$$

**ГУ для  $\Pi_z^m$ .**

Будем исходить из ГУ для нормальной составляющей  $\vec{H}$  на идеально проводящей поверхности:

$$H_{q_1}|_{Q_1} = 0, \quad H_{q_2}|_{Q_2} = 0, \quad H_z|_{Q_3} = 0.$$

Для составляющей  $H_z$  имеем

$$H_z|_{Q_3} = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_z^m|_{Q_3} = 0,$$

Откуда ввиду того, что  $\left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \neq 0$ , получаем

$$\Pi_z^m|_{Q_3} = 0. \quad (5.44)$$

Для составляющих  $H_{q_1}$ ,  $H_{q_2}$  можно записать

$$H_{q_1}|_{Q_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial z} \right) \Big|_{Q_1} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial q_1} \right) \Big|_{Q_1} = 0,$$

$$H_{q_2}|_{Q_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial z} \right) \Big|_{Q_2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial q_2} \right) \Big|_{Q_2} = 0.$$

Из этих условий при  $\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$  следует

$$\frac{1}{h_{1,2}} \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial q_{1,2}} \Big|_{Q_1, Q_2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_{\text{бок}}} = 0 \quad (5.45)$$

ГУ (5.42)..(5.45) вместе с уравнениями (5.33) и (5.41) формулируют краевую задачу для определения ЭМП в регулярных волноводах и резонаторах.

## ЧАСТЬ 2

### НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ИЛИ ВОЛНОВОДЫ

#### ГЛАВА VI

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

#### 6.1. Типы направляющих систем

Для минимизации потерь в устройствах СВЧ используются направляющие системы или волноводы (ВВ). Волны в ВВ занимают конечное поперечное сечение, они неоднородны в этом сечении и не рассеиваются в окружающее пространство. Назначение ВВ: линии связи; связь элементов СВЧ устройств; электродинамические системы в электронных приборах СВЧ; ускорители; системы СВЧ обработки в машиностроении, деревообработке, пищевой промышленности, сельском хозяйстве.

Рассмотрим некоторые типы ВВ. Вообще говоря, ВВ можно разделить на «открытые», в которых замкнутый внешний экран отсутствует, а поле концентрируется вблизи направляющих структур, и «закрытые», в которых в той или иной форме присутствует экран, ограничивающий поперечное распределение поля. Конечно, это разграничение достаточно условно: в «открытых» ВВ может быть поставлен экран, в «закрытых» - экран в определенных диапазонах может быть «прозрачным».

Начнем с систем, условно относимых к «открытым».

На рис.6.1. изображена двухпроводная линия.

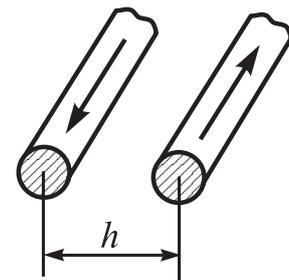


Рис. 6.1.

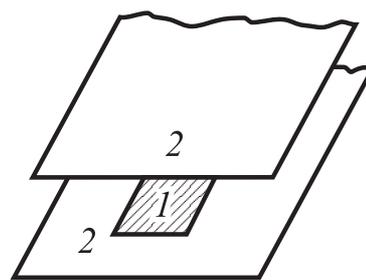


Рис. 6.2.

При  $h \ll \lambda$  ввиду противофазности токов в проводах линии излучение в окружающее пространство весьма мало. На [рис. 6.2](#) показана симметричная полосковая линия: 1 – токонесущая полоска, 2 – экран.

Несимметричная полосковая линия или микрополосковая изображена на [рис.6.3](#). Здесь 1 – токонесущая полоска, 2 – диэлектрическая подложка, 3 – экран. Все поперечные размеры весьма малы по сравнению с длиной волны, излучение во внешнее пространство практически отсутствует. Указанные структуры нашли очень широкое распространение в микромощной технике.

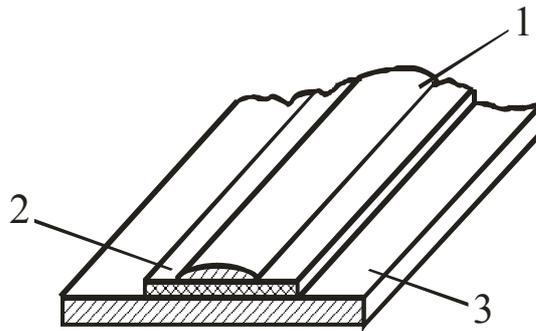


Рис. 6.3.

Нетрудно увидеть развитие структуры микрополосок: экранированная микрополосковая линия (рис.6.4), щелевая линия (рис.6.5), копланарная линия (рис.6.6), полосково – щелевая экранированная линия (рис.6.7),

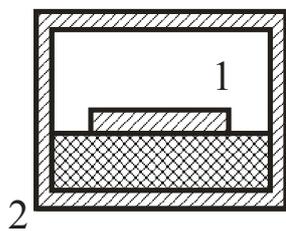


Рис. 6.4.

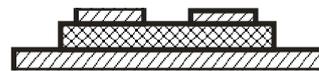


Рис. 6.5.

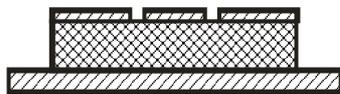


Рис. 6.6.

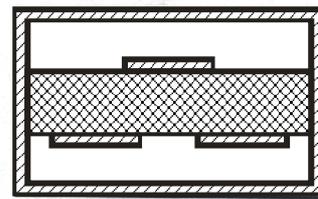


Рис. 6.7.

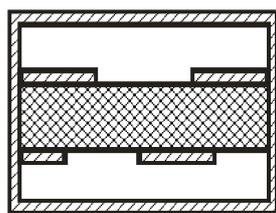


Рис. 6.8.

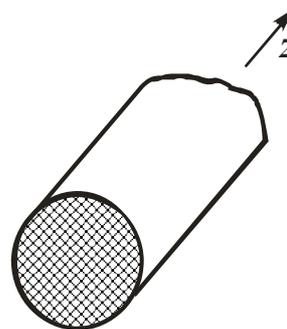


Рис. 6.9.

двущелевая линия (рис.6.8). В коротковолновом диапазоне (вплоть до светового) используются диэлектрические волноводы (рис.6.9), на рабочих частотах

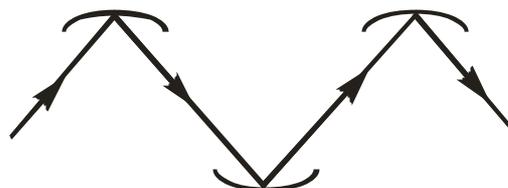


Рис. 6.10.

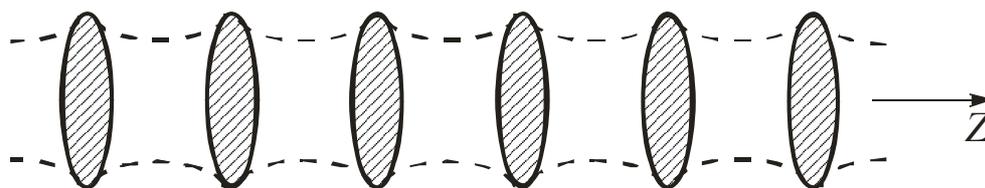


Рис. 6.11.

тах которого на границе диэлектрика имеет место полное внутреннее отражение волн.

К открытым относятся и лучевые ВВ: зеркальный ВВ ([рис. 6.10](#)), линзовая линия ([рис.6.11](#)).

На [рис.6.12](#) показана экранированная двухпроводная линия – «закрытая» система. Естественное ее развитие – коаксиальная линия ([рис.6.13](#)), весьма широко распространенная. Дальнейшее развитие ВВ большой мощности – полые ВВ.

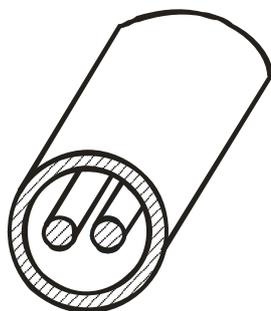


Рис. 6.12.

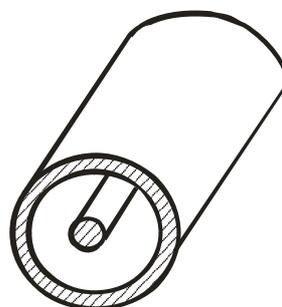


Рис. 6.13.

На [рис.6.14](#) изображен ВВ круглого сечения, на [рис.6.15](#) – прямоугольного.

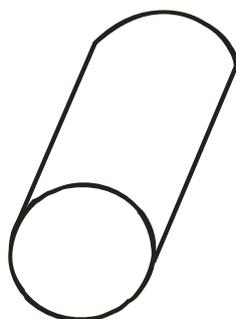


Рис. 6.14.

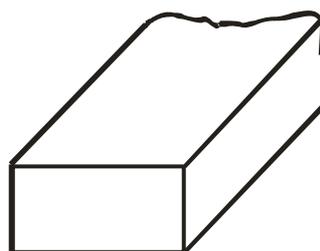


Рис. 6.15.

Находят применение и волноводы специального сечения: эллиптические ([рис.6.16](#)), ребристые: П – ([рис. 6.17](#)) и Н – образного сечения ([рис.6.18](#)).

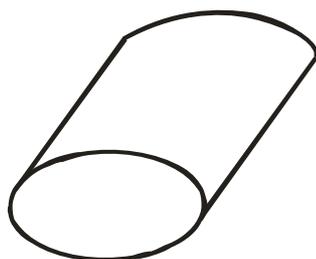


Рис. 6.16.

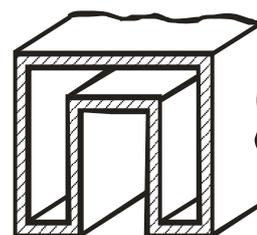


Рис. 6.17.

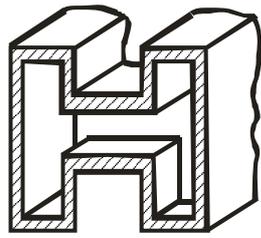


Рис. 6.18.

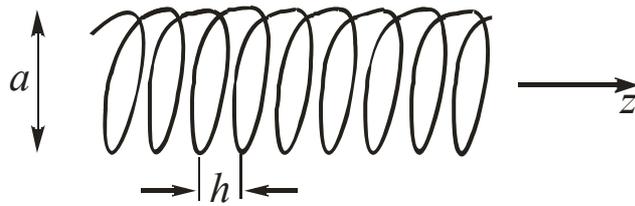


Рис. 6.19.

В СВЧ электронных приборах с черенковским излучением (лампы бегущей и обратной волн) используются замедляющие системы.

На [рис.6.19](#) изображена широко применяемая в приборах средней мощности спиральная замедляющая система. Ее замедление можно оценить приближенно чисто геометрически:  $V_\phi/c = h/\pi a$ , где  $V_\phi$  - фазовая скорость распространения основной пространственной гармоники вдоль оси системы  $Z$ ,  $c$  – скорость электромагнитных волн в пустоте. В мощных приборах используются системы типа гофрированных или диафрагмированных волноводов.

Такие же системы используются и в ускорителях заряженных частиц.

## 6.2. Постановка и схема решения волноводных задач (регулярные ВВ)

ВВ будем называть регулярным в случае, когда конфигурация поперечного сечения ВВ  $S_\perp$  и свойства заполняющей ВВ среды  $\epsilon_a, \mu_a$  не зависят от координаты  $Z$ , отождествляемой с осью волновода, т.е.

$S_\perp, \epsilon_a, \mu_a \neq f(Z)$ , но может быть  $\epsilon_a, \mu_a = f(q_1, q_2)$ , где  $q_1, q_2$  – обобщенные координаты в  $S_\perp$ .

Как указывалось выше, все поля в регулярных волноводах могут быть представлены как суперпозиция волн ТМ (Е) и ТЕ (Н). В свою очередь, ТМ или Е – волны определяются функцией  $\Pi_z^\ell$ , ТЕ или Н – функцией  $\Pi_z^m$ . Таким образом, совокупность  $\Pi_z^\ell, \Pi_z^m$  - полностью определяет волны в ВВ.

Введем следующие условия и упрощения.

1. Рассматриваем собственные волны ВВ, которые существуют вне области, занятой источниками, т.е. в волновых уравнениях для  $\Pi_z^{\ell, m} P_{cm} = 0$  и  $J_{cm} = 0$ .
2. Стенки волновода можно считать идеально проводящими, т.е. на них справедливы ГУ [\(5.42\)](#) и [\(5.45\)](#).
3. Электромагнитные процессы гармонические, т.е. можно использовать метод комплексных амплитуд.

При перечисленных условиях волноводные задачи сводятся к следующим краевым задачам для  $\dot{\Pi}_z^{\ell,m}$ .

$$\nabla^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} + K^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = 0, \quad K^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a, \quad (6.1)$$

$$\dot{\Pi}_z^{\ell,m} / S_{\text{бок}} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \dot{\Pi}_z^{\ell,m}}{\partial \vec{n}} / S_{\text{бок}} = 0. \quad (6.3)$$

Воспользуемся условием регулярности волновода:  $+Z$  и  $-Z$  направления равноправны, а постоянная распространения волн вдоль  $Z$  ( $\Gamma$ ) постоянна. Тогда представим искомые решения для  $\dot{\Pi}_z^{\ell,m}$  в форме

$$\dot{\Pi}_z^{\ell,m} = \dot{A}^{\ell,m} \psi^{\ell,m}(q_1, q_2) e^{\mp j\Gamma Z}. \quad (6.4)$$

Здесь  $\dot{A}^{\ell,m}$  - комплексная амплитуда волны,  $\psi^{\ell,m}(q_1, q_2)$  - функция сечения или мембранная функция,  $\Gamma$  – постоянная распространения; верхний знак соответствует попутной (относительно  $z$ ) волне, нижний – встречной. Решение записано в обобщенно – цилиндрической системе координат  $q_1, q_2, Z$ .

Представим

$$\nabla^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = \nabla_{\perp}^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \dot{\Pi}_z^{\ell,m},$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \dot{\Pi}_z^{\ell,m}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \dot{\Pi}_z^{\ell,m}}{\partial q_2} \right) \right\},$$

$h_1(q_1, q_2), h_2(q_1, q_2)$  – метрические коэффициенты Ламэ для  $q_1, q_2$ .

Учтем, что  $\frac{\partial^2}{\partial Z^2} \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = -\Gamma^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m}$ . Тогда (6.1) приобретает вид

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} + (K^2 - \dot{\Gamma}^2) \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = 0. \quad (6.5)$$

Учитывая структуру решения (6.4), сокращаем в (6.5) общие множители  $\dot{A}^{\ell,m} e^{\mp j\Gamma Z}$ . В результате исходная трехмерная краевая задача (6.1)..(6.3) редуцируется к двумерной:

$$\nabla^2 \psi^{\ell,m} + \aleph^2 \psi^{\ell,m} = 0, \quad \aleph^2 = K^2 - \dot{\Gamma}^2, \quad (6.6)$$

$$\psi^\ell(\ell) = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \psi^m}{\partial \vec{n}}(\ell) = 0. \quad (6.8)$$

Здесь  $\ell$  - контур поперечного сечения волновода.

Поставленная краевая задача (6.6)..(6.8) известна как задача Штурма-Лиувилля. Ее содержание можно сформулировать так: найти значения  $\aleph^2$ , при которых существует нетривиальные (т.е. ненулевые в данном случае) решения (6.6) при ГУ первого рода (6.7) или ГУ второго рода (6.8) на контуре сечения волновода  $\ell$ . Значение  $\aleph_v$ , при которых имеются нетривиальные решения задачи Штурма-Лиувилля называются собственными значениями, а отвечающие им функции  $\psi_v(q_1, q_2)$  называются собственными функциями. Каждому собственному значению  $\aleph_v$  соответствует одна собственная функция  $\psi_v$ . Если это не так, то такой случай называется вырожденным. Собственные значения  $\aleph_v$  можно расположить в виде бесконечного упорядоченного ряда:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_v < \dots$$

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля обладают рядом специальных свойств. Остановимся на наиболее важных из них.

1.  $\aleph_v$  – действительные числа. Для доказательства этого воспользуемся первой теоремой Грина:

$$\int_{S_\perp} \nabla \Phi \nabla \psi dS_\perp + \int_{S_\perp} \psi \nabla^2 \Phi dS_\perp = \oint_l \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} dl. \quad (6.9)$$

Положим  $\Phi = \psi = \psi_v^{\ell, m}$ , причем в соответствии с (6.6) имеет место равенство

$$\nabla^2 \psi_v^{\ell, m} + \aleph_v^2 \psi_v^{\ell, m} = 0.$$

Умножая это равенство скалярно на  $\psi_v^{\ell, m}$ , получаем

$$\aleph_v^2 |\psi_v|^2 = -\psi_v \nabla^2 \psi_v. \quad (6.10)$$

Учтем также, что в связи с ГУ (6.7) или (6.8) имеем

$$\oint_l \psi_v \frac{\partial \psi_v}{\partial \vec{n}} d\ell = 0. \quad (6.11)$$

Учитывая (6.10) и (6.11) из (6.9) (при  $\Phi = \psi = \psi_v^{\ell, m}$ ), получаем

$$\aleph_v^2 = \frac{\int |\nabla \psi_v|^2 dS_\perp}{\int_{S_\perp} |\psi_v|^2 dS_\perp}. \quad (6.12)$$

Из полученного результата (6.12) непосредственно следует исходное утверждение: справа стоит вещественное, строго положительное число, следовательно, и  $\aleph_v$  - действительное число.

2. Собственные функции  $\psi_v(q_1, q_2)$  взаимно ортогональны на  $S_\perp(\ell)$ .

Докажем это. Пусть известны две собственные функции  $\psi_i$  и  $\psi_j$ , отвечающие собственным значениям  $\aleph_i^2$  и  $\aleph_j^2$ , причем  $\aleph_i^2 \neq \aleph_j^2$ . Запишем уравнение (6.6) сначала для  $\psi_i$ , затем для  $\psi_j$ . Первое уравнение умножим скалярно на  $\psi_j$ , второе – на  $\psi_i$  и из первого результата вычтем второй. В результате получим

$$\psi_j \nabla^2 \psi_i - \psi_i \nabla^2 \psi_j = (\aleph_j^2 - \aleph_i^2) \psi_i \psi_j.$$

Проинтегрируем получившееся по  $S_\perp(\ell)$ :

$$\int_{S_\perp} (\psi_j \nabla^2 \psi_i - \psi_i \nabla^2 \psi_j) dS_\perp = (\aleph_j^2 - \aleph_i^2) \int_{S_\perp} \psi_i \psi_j dS_\perp. \quad (6.13)$$

Применяя к левой части уравнения (6.13) дважды первую теорему Грина на (6.9) (сначала  $\Phi = \psi_i$ ,  $\psi = \psi_j$ , затем  $\Phi = \psi_j$ ,  $\psi = \psi_i$ ), получаем

$$\oint_l \left( \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial \vec{n}} - \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \vec{n}} \right) d\ell = (\aleph_j^2 - \aleph_i^2) \int_{S_\perp} \psi_i \psi_j dS_\perp. \quad (6.14)$$

В силу ГУ (6.7) или (6.8) левая часть в (6.14) равна нулю (заметим, что этот результат получится и при ненулевых ГУ).

Поэтому при  $\aleph_j^2 \neq \aleph_i^2$  из (6.15) получаем искомый результат

$$\int_{S_\perp(\ell)} \psi_i(q_1, q_2) \psi_j(q_1, q_2) dS_\perp = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

3. Собственные функции  $\psi_v^{e,m}(q_1, q_2)$  составляют полную на  $S_{\perp}(\ell)$  систему функций, т.е. нельзя найти такую новую функцию  $\varphi(q_1, q_2)$ , которая была бы ортогональна на  $S_{\perp}(\ell)$  всем функциям  $\psi_v^{e,m}$ . Это означает, что любая функция  $\varphi(q_1, q_2)$  может быть представлена на  $S_{\perp}(\ell)$  в виде разложения в базисе  $\{\psi_v(q_1, q_2)\}$ .

### 6.3. Общие свойства электрических (Е) волн в регулярных волноводах

Весь набор Е-волн определяется системой решений  $\{\dot{P}_{zv}^e\}$  краевой задачи (6.1), (6.2). Т.е. для любой конкретной задачи

$$\dot{P}_z^e = \sum_{v=1}^{\infty} P_{zv}^e, \text{ где } \dot{P}_{zv}^e = \dot{A}_v^e \psi_v^e e^{-j\dot{\Gamma}_v Z}, \quad \dot{\Gamma}_v = k^2 - \aleph_v^2.$$

Краевая задача для  $\psi_v^e, \aleph_v^2$  сформулирована в предыдущем разделе. Рассмотрим компоненты полей Е-волн:

$$\dot{E}_v = k^2 \vec{Z}_0 \dot{P}_{zv}^e + \text{grad} \frac{\partial \dot{P}_{zv}^e}{\partial z}, \quad \frac{\partial \dot{P}_{zv}^e}{\partial z} = -j\dot{\Gamma}_v \dot{P}_{zv}^e, \quad k^2 = \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a$$

$$\dot{H}_v = j\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot}(\vec{Z}_0 \dot{P}_{zv}^e)$$

Продольная составляющая есть только у электрического поля Е-волны:

$$\dot{E}_{vz} = \aleph_v^2 \dot{P}_{zv}^e = \aleph_v^2 \dot{A}_v^e e^{-j\dot{\Gamma}_v Z} \psi_v^e(q_1, q_2).$$

Отметим, что  $\dot{P}_{zv}^e$  с точностью до постоянного (но размерного!) множителя  $\aleph_v^2$  совпадает с  $\dot{E}_{vz}$ .

Проанализируем далее поперечные составляющие полей.

$$\dot{E}_{vt} = -j\dot{\Gamma}_v \text{grad}_t \dot{P}_{zv}^e = -j\dot{\Gamma}_v \dot{A}_v^e e^{-j\dot{\Gamma}_v Z} \left\{ \frac{\bar{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1} + \frac{\bar{e}_2}{h_2} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} \right\}. \quad (6.15)$$

$$\dot{H}_v = \dot{H}_{vt} = j\omega \dot{\epsilon}_a \text{rot}(\vec{Z}_0 \dot{P}_{zv}^e) = j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{A}_v^e e^{-j\dot{\Gamma}_v Z} \left\{ \frac{\bar{e}_1}{h_2} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} - \frac{\bar{e}_2}{h_1} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1} \right\}.$$

Получим некоторые следствия записанных формул

1. Составим скалярное произведение  $(\dot{\vec{E}}_{vt}, \dot{\vec{H}}_{vt})$ :

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{E}}_{vt}, \dot{\vec{H}}_{vt}) &= (\dot{A}_v^e)^2 \dot{\Gamma}_v \omega \dot{\varepsilon}_a e^{-j2\dot{\Gamma}_v Z} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\dot{\vec{E}}_{vt} \perp \dot{\vec{H}}_{vt}$ . Но как следует из (6.15),  $\dot{\vec{E}}_{vt}$  определяется градиентом собственной функции  $\psi_v^e$ , иначе говоря, графически поле  $\dot{\vec{E}}_{vt}$  совпадает с градиентом собственной функции  $\psi_v^e$ .

Поскольку же  $\vec{H}_{vt} \perp \vec{E}_{vt}$ , линии напряженности магнитного поля являются линиями уровня  $\psi_v^e(q_1, q_2)$ . Таким образом, мы получили эффективное правило графического построения полей волны типа Е волновода:

- 1)  $\psi_v^e(q_1, q_2)$  является мембранной функцией  $\vec{E}_z$ ;
- 2) силовые линии  $\vec{E}_{tv}$  являются линиями градиента  $\psi_v^e(q_1, q_2)$ ;
- 3) силовые линии  $\vec{H}_{tv}$  являются линиями уровня  $\psi_v^e(q_1, q_2)$ .

2. Введем и рассчитаем волновое сопротивление  $W_v^e$  для волн типа Е:

$$\begin{aligned} W_v^e &= \frac{\dot{\vec{E}}_{vt}}{\dot{\vec{H}}_{vt}} = \frac{j\dot{\Gamma}_v \dot{A}_v^e e^{-j\dot{\Gamma}_v Z} \left\{ \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{j\dot{A}_v^e e^{-j\dot{\Gamma}_v Z} \omega \dot{\varepsilon}_a \left\{ \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\dot{\Gamma}_v}{\omega \dot{\varepsilon}_a} = \frac{\dot{k}}{\omega \dot{\varepsilon}_a} \sqrt{1 - \left( \frac{\aleph_v}{\dot{k}} \right)^2} = W^0 \sqrt{1 - \left( \frac{\aleph_v}{\dot{k}} \right)^2}, \end{aligned}$$

где  $W^0 = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$  - волновое сопротивление свободного пространства с

характеристиками  $\varepsilon_a, \mu_a$ . Наиболее просто записывается  $W_v^e$ , когда  $\dot{k}$  - действительное число (тогда  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ).

В этом случае, учитывая, что  $\aleph_v$  - действительная величина, можно ввести одно из важнейших понятий в теории ВВ – критическую длину волны  $\nu$ -го типа волн:

$$\lambda_{kp}^v = \frac{2\pi}{\aleph_v}. \quad (6.16)$$

$$\text{Тогда } W_v^e = W^0 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v} \right)^2}. \quad (6.17)$$

Подробный анализ полученного результата проведем далее, в разделе [6.6.](#)

#### 6.4. Общие свойства магнитных (Н) волн в регулярных ВВ

В случае магнитных волн имеем

$$\dot{H}_v = k^2 \vec{Z}_0 \dot{\Pi}_{zv}^m + \text{grad} \frac{\partial \dot{\Pi}_{zv}^m}{\partial z},$$

$$\dot{E}_v = -j\omega \dot{\mu}_a \text{rot}(\vec{Z}_0 \dot{\Pi}_{zv}^m),$$

где  $\dot{\Pi}_{zv}^m = \dot{A}_v^m \psi_v^m(q_1, q_2) e^{\mp j \dot{\Gamma}_v Z}$  - решение краевой задачи [\(6.15\)](#), [\(6.17\)](#).

Продольная составляющая магнитной напряженности волны выражается как

$$\dot{H}_{vz} = \aleph_v^2 \dot{\Pi}_{zv}^m = \aleph_v^2 \dot{A}_v^m e^{\mp j \dot{\Gamma}_v Z} \psi_v^m(q_1, q_2).$$

Поперечные же компоненты полей можно записать в виде

$$\dot{H}_{vt} = \mp j \dot{\Gamma}_v \dot{A}_v^m e^{\mp j \dot{\Gamma}_v Z} \text{grad} \psi_v^m,$$

$$\dot{E}_{vt} = -j\omega \dot{\mu}_a \dot{A}_v^m e^{\mp j \dot{\Gamma}_v Z} \text{rot}(\vec{Z}_0 \psi_v^m).$$

Как и в предыдущем случае Е-полей нетрудно показать, что  $(\dot{H}_{vt}, \dot{E}_{vt}) = 0$ , т.е.  $\vec{E}_{vt} \perp \vec{H}_{vt}$  и правила графического изображения Н-полей можно сформулировать так:

- 1)  $\psi_v^m(q_1, q_2)$  является мембранной функцией  $\dot{H}_z$ ;
- 2) силовые линии  $\vec{H}_{tv}$  являются линиями градиента  $\psi_v^m$ ;
- 3) силовые линии  $\vec{E}_{tv}$  являются линиями уровня  $\psi_v^m$ .

Вводя волновое сопротивление  $W_v^H$  для волн типа Н, получим

$$W_v^H = \frac{\dot{E}_{vt}}{\dot{H}_{vt}} = \frac{\omega \dot{\mu}_a}{\dot{\Gamma}_v} = \frac{W^0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}}, \quad \lambda_{kp}^v = \frac{2\pi}{\mathfrak{N}_v^m}.$$

### 6.5. Т-волны в направляющих системах

Т или TEM – волнами называются такие, в которых отсутствует продольные составляющие как магнитного, так и электрического полей (поперечные волны).

Рассмотрим условия существования Т-полей. В соответствии с общей теорией имеем

$$\dot{E}_{vz} = (\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2) \dot{I}_{zv}^e, \quad \dot{H}_{vz} = (\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2) \dot{I}_{zv}^m$$

Для того чтобы в волне  $\dot{E}_{vz} = 0$ ,  $\dot{H}_{vz} = 0$ , необходимо потребовать  $\dot{k}^2 = \dot{\Gamma}_v^2$ , т.е. постоянная распространения Т-волны в ВВ должна быть равна  $\dot{k}$ , т.е. постоянной распространения в свободном пространстве.

Запишем уравнения Гельмгольца для  $\vec{E}_v$ ,  $\vec{H}_v$ :

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_v + \dot{k}^2 \dot{\vec{E}}_v = 0, \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}}_v + \dot{k}^2 \dot{\vec{H}}_v = 0.$$

Разделим оператор  $\nabla^2$  на поперечную и продольную части:

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_{\perp}^2 - \dot{\Gamma}_v^2.$$

Тогда уравнения для  $\vec{E}_v$ ,  $\vec{H}_v$  принимают вид

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_v + (\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2) \dot{\vec{E}}_v = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_v + (\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2) \dot{\vec{H}}_v = 0.$$

Для Т-волн  $\dot{k}^2 = \dot{\Gamma}_v^2$  и записанные для этих волн уравнения редуцируются к виду

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_v = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_v = 0.$$

Таким образом, Т-волны являются решением поперечных уравнений Лапласа. Как известно, нетривиальное решение этих уравнений при граничных условиях типа  $E_r(l)=0$ ,  $H_n(l)=0$  существует только в многосвязных областях. Поэтому в полых волноводах, поперечное сечение которых представ-

ляет односвязную область, Т-волны существовать не могут. В ВВ с двухсвязным сечением (коаксиальная линия, например) возможна одно решение, отвечающее разным направлениям продольных токов на них. При трехсвязном сечении (экранированная двухпроводная линия, например) возможны две комбинации отдельных ГУ и соответственно два типа Т-волн (синфазный и противофазный). В общем случае  $m$ -связной области, очевидно, возможно существование  $m-1$  типов Т-волн – по числу комбинаций отдельных ГУ. Во всех случаях структура поперечных  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  для Т-волн является лапласовой, т.е. такой же, какой получается структура двумерных  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при решении статических задач для той же конфигурации границ с заданным распределением зарядов и стационарных токов.

### 6.6. Дисперсия собственных волн в регулярных ВВ. Докритический и закритический диапазоны волновода

Дисперсией собственных волн называется зависимость от рабочей длины волны (рабочей частоты) фазовой и групповой скорости распространения волн, а также частотная зависимость волнового сопротивления.

В свободном пространстве, а также в случае Т-волн в многосвязных линиях постоянная распространения  $\dot{\Gamma} = \dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a}$ . Если потерь нет и  $\dot{\mu}_a = \mu_a$ ,  $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a$ , то постоянная распространения действительна:  $\Gamma = k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{V_\Phi} = \frac{\omega}{V_\Gamma}$ . При этом  $V_\Phi = V_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$  и от рабочей частоты не зависят, т.е. для Т-волн в среде без потерь дисперсия отсутствует.

Иная ситуация имеет место в волноводах. Здесь

$$\dot{\Gamma}_v = \sqrt{\dot{k}^2 - \aleph_v^2} = k \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v} \right)^2}, \text{ где } \lambda_{kp}^v = \frac{2\pi}{\aleph_v} - \text{критическая длина волн}$$

ны для  $v$ -го типа волн ВВ.

Поскольку  $\Gamma_v = \frac{\omega}{V_{\Phi v}} = \frac{2\pi}{\Lambda_v}$ , где  $V_{\Phi v}$  - фазовая скорость распространения  $v$ -й волны в ВВ,  $\Lambda_v$  - длина волны того же типа волн вдоль оси ВВ, для этих величин имеем

$$V_{\Phi v} = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v} \right)^2}},$$

(6.17)

$$\Lambda_v = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}}.$$

Здесь  $V_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$  - скорость распространения волн в свободном про-

странстве,  $\lambda$  - рабочая длина волны – длина волны в свободном пространстве на рабочей частоте  $\omega$ . Из формул (6.17) следует, что диапазон длин волн в точке  $\lambda = \lambda_{kp}^v$  разделяется для данного  $\nu$ -го типа волн на две различающиеся области:

1)  $\lambda < \lambda_{kp}^v$ . Здесь  $\Gamma_\nu$  - действительная ненулевая величина, поэтому  $V_{\Phi\nu} = \frac{\omega}{\Gamma_\nu}$  - конечная величина, вдоль волновода распространяется  $\nu$ -го типа волна. Это докритический диапазон;

2)  $\lambda > \lambda_{kp}^v$ . Здесь  $\Gamma_\nu$  - чисто мнимая величина (по-прежнему мы полагаем отсутствие потерь в линии). Поскольку  $\Gamma_\nu = \frac{\omega}{V_{\Phi\nu}} - j\alpha_\nu$  и действительная часть  $\Gamma_\nu$  равна нулю,  $V_{\Phi\nu} \rightarrow \infty$ , т.е. волновой процесс на  $\nu$ -м типе отсутствует, а поле убывает с расстоянием от источников экспоненциально с постоянной затухания  $\alpha_\nu$ . Этот диапазон длин волн называется закритическим.

Рассмотрим более подробно оба диапазона.

1. Докритический диапазон ( $\lambda < \lambda_{kp}^v$ ).

Здесь  $\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{kp}^v}{f}\right)^2}$  - действительная величина

( $f = \frac{V_0}{\lambda}$ ,  $V_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$ ). Соответственно действительны и положительны величины:

$$\Gamma_\nu = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2} = \frac{\omega}{V_0} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{kp}^v}{f}\right)^2} = \frac{2\pi}{V_{\Phi\nu}} = \frac{2\pi}{\Lambda_\nu},$$

$$W_\nu^E = W^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}, \quad W_\nu^H = \frac{W^0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}},$$

Рассчитаем групповую скорость волны (т.е. скорость передачи энергии и сигналов)  $V_{\Gamma v}$ :

$$V_{\Gamma v} = \frac{1}{\frac{\partial \Gamma_v}{\partial \omega}}, \quad \Gamma_v = \sqrt{\left(\frac{\omega}{V_0}\right)^2 - \mathfrak{K}_v^2},$$

$$\frac{\partial \Gamma_v}{\partial \omega} = \frac{\omega}{V_0^2 \sqrt{k^2 - \mathfrak{K}_v^2}} = \frac{\frac{\omega}{V_0^2}}{\frac{\omega}{V_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}} = \frac{1}{V_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}}.$$

Таким образом,

$$V_{\Gamma v} = V_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}. \quad (6.18)$$

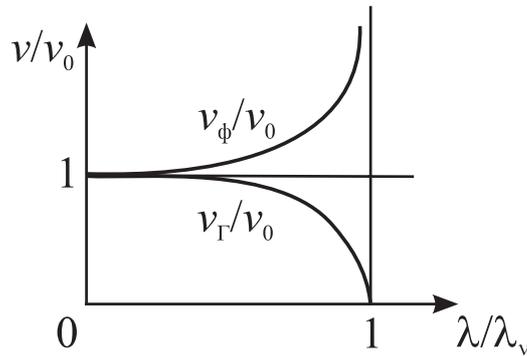


Рис. 6.20.

Используя (6.17) и (6.18), убеждаемся, что (Рис. 6.20)

$$V_{\phi v} V_{\Gamma v} = V_0^2. \quad (6.19)$$

Такая характерная связь  $V_{\phi}$  и  $V_{\Gamma}$  имеет место для дисперсных направляющих систем.

Характер частотных зависимостей  $V_{\Phi v}$ ,  $V_{\Gamma v}$ ,  $\Lambda_v$  в волноводе хорошо поясняет концепция парциальных волн Бриллюэна. В соответствии с этой концепцией распространения волн по волноводу происходит путем последовательных отражений плоских, (тех же, что в свободном пространстве) волн от

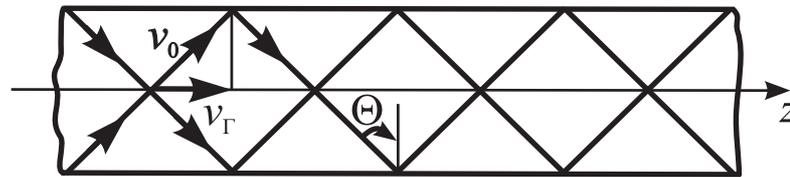


Рис. 6.21.

стенок волновода ([Рис.6.21](#)).

Плоские волны отражаются от стенок под углом  $\Theta$ , который определяется взаимным согласованием отражений от противоположных стенок, при котором возможна стационарная картина интерференции (при соответствующем выполнении граничных условий на стенках волновода). Из геометрической картины зигзагообразного распространения плоских волн, изображенной на [Рис.6.21](#), следует, что групповая скорость  $V_{\Gamma v} = V_0 \sin \Theta$ , где  $V_0$  - скорость распространения волн в свободном пространстве. Сравнивая этот результат с

формулой ([6.18](#)), приходим к выводу, что  $\sin \Theta_v = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}$ . Фазовая же скорость в ВВ в соответствии с формулой ([6.17](#)), определяется как

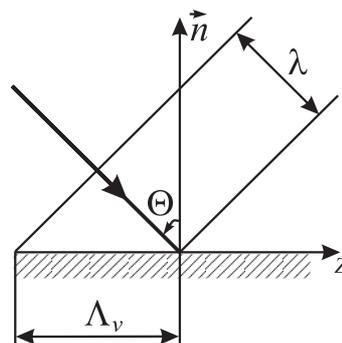


Рис. 6.22.

$V_{\Phi v} = \frac{V_0}{\sin \Theta_v}$ . Более подробно это поясняет [Рис.6.22](#). Здесь прямыми линиями изображены положения равных фаз плоской волны, расстояние между ними равно  $\lambda$  - длине волны в свободном пространстве. Расстояния между теми же положениями равных фаз  $\Lambda_v$  вдоль оси волновода вычисляется как

$\Lambda_v = \frac{\lambda}{\sin \Theta_v}$ , что соответствует полученным ранее результатам ( $\frac{\Lambda_v}{\lambda} = \frac{V_{\Phi v}}{V_0}$ ).

Как и в общем анализе, из картины Бриллюэна следует  $V_{\Gamma v} V_{\Phi v} = V_0^2$ .

Рассмотрим энергетические соотношения – перенос энергии в ВВ в докритическом режиме. Составим  $Z$ - составляющую вектора Умова-Пойтинга для  $v$ -моды:

$$\dot{S}_{0vz} = \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{E}}_v \quad \dot{\vec{H}}_v^* \right] \vec{Z}_0 = \frac{1}{2} \dot{E}_{vt} \dot{H}_{vt}^*$$

Вычислим  $\dot{S}_{0vz}$  отдельно для Е и для Н-волн. Для Е-волн  $H_z=0$  а  $\dot{E}_{vt} = W_v^E \dot{H}_{vt}$ . В этом случае имеем

$$\dot{S}_{0z}^E = \frac{1}{2} \dot{W}_v^E H_{vtm}^2 = \frac{1}{2} W^0 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v} \right)^2} H_{vtm}^2. \quad (6.20)$$

Таким образом, в отсутствие потерь, как следует из (6.20), в докритическом режиме (т.е. при  $\lambda < \lambda_{kp}^v$ ) поток энергии вдоль оси волновода имеет вещественное значение, т.е. чисто активный характер. Согласованный волновод в этом диапазоне является чисто активной нагрузкой.

Для Н-волн, выражая  $H_{vt}^*$  через  $\dot{E}_{vt}^*$  ( $H_{vt}^* = \frac{\dot{E}_{vt}^*}{W_v^{H^*}}$ ), имеем

$$\dot{S}_{0vz}^H = \frac{1}{2} \frac{E_{vtm}^2}{W_v^{H^*}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v} \right)^2}}{W^0} E_{vtm}^2. \quad (6.21)$$

Как и в предыдущем случае, из (6.21) следует, что и для Н-волн в докритическом режиме  $S_{0vz}^H$  - действительная величина, волновода представляет собой в отсутствии отражении чисто активную нагрузку.

В обоих случаях при  $\lambda \rightarrow \lambda_{kp}^v$   $S_{0vz}^{E,H} \Rightarrow 0$  и переносе энергии вдоль волновода прекращается. Поэтому критическая частота

$$f_{kp}^v = \frac{1}{\lambda_{kp}^v \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$$

часто называется частотой отсечки.

2. Закритический диапазон ( $\lambda > \lambda_{kp}^v$ ).

$$\text{В этом случае } \Gamma_v = \pm jk \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1} = \pm j\alpha_v + 0.$$

Поскольку  $\beta_{\Phi_v} = \frac{\omega}{V_{\Phi_v}} = 0$ ,  $V_{\Phi_v} \rightarrow \infty$ , то поля в закритической области имеют квазистатический, а не волновой характер. Они убывают экспоненци-

ально с удалением от источника с постоянной затухания  $\alpha_v = k \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1}$ .

Исходя из этого, в приведенном выражении для поля справа от источника

следует выбрать нижний знак, т.е.  $k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2} = -jk \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1}$ . С учетом

этого знака имеем

$$W_v^E = -jW_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1}, \quad W_v^H = \frac{jW^0}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1}}. \quad (6.22)$$

Из (6.22) следует, что в закритическом диапазоне волны Е-типа имеют емкостный характер волнового сопротивления, Н-волны – индуктивный. Соответственно для источника закритические Е-волны создают емкостную нагрузку, Н-волны – индуктивную, что следует учитывать при согласовании возбуждающих элементов с волноводным трактом.

Графики зависимостей  $\frac{W_v^{E,H}}{W^0}$  от  $\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}$  приведены на [Рис.6.23](#).

Штриховыми линиями указаны мнимые значения волновых сопротивлений в закритическом режиме. Естественно, приведенные зависимости соответствуют случаю, когда потери в ВВ отсутствуют.

Для плотности потока энергии в Z-направлении получаем, используя (6.20) и (6.21),

$$\dot{S}_{0vz}^E = \frac{1}{2} \dot{W}_v^E H_{vzm}^2 = -\frac{j}{2} W^0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1} \cdot H_{vzm}^2.$$

$$\dot{S}_{0vz}^H = \frac{1}{2} \frac{E_{vzm}^2}{\dot{W}_v^H} = \frac{j}{2} \frac{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2 - 1}}{W^0} \cdot E_{vzm}^2.$$

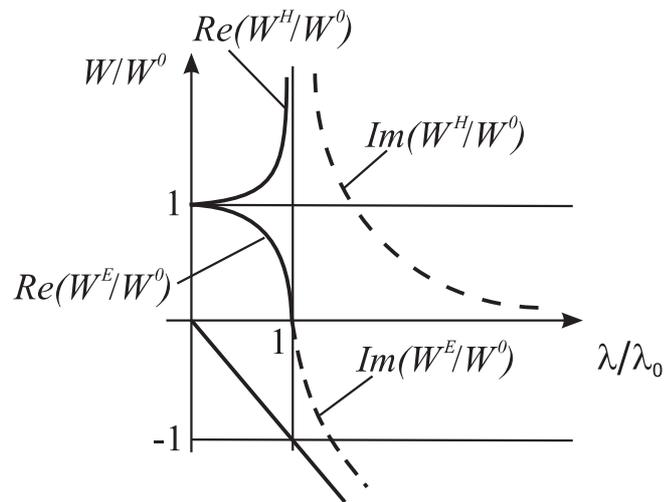


Рис. 6.23.

В обоих случаях поток энергии имеет чисто реактивный характер.

### 6.7. Электрические (E) типы волн в прямоугольном волноводе

Для решения краевой задачи в прямоугольной области воспользуемся прямоугольной системой координат и сориентируем её так относительно конфигурации волновода, как показано на рис. 6.24. Размер широкой стенки –  $a$ , узкой –  $b$ .

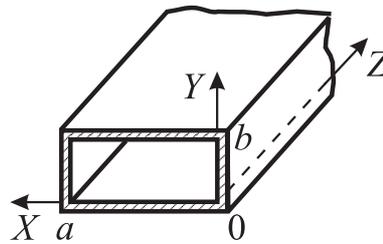


Рис. 6.24.

Краевая задача для собственной функции  $\psi^e$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi_v^e + \kappa_v^2 \psi_v^e = 0. \quad (6.23)$$

$$\psi_v^e = 0 \text{ при } x=0, a; y=0, b. \quad (6.24)$$

Воспользуемся методом разделения переменных (метод Фурье). Представим  $\psi_v^e = X(x) \cdot Y(y)$  и подставим в уравнение (6.23):

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \aleph_v^2 XY = 0. \quad (6.25)$$

Разделим обе части (16.3) на  $XY$ , разделяя одновременно переменные:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \aleph_v^2 = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \aleph_y^2. \quad (6.26)$$

Поскольку слева и справа в (6.26) разные переменные, обе эти части могут быть при выполнении равенства только константой, которая обозначена как  $\aleph_y^2$ . Эта константа имеет смысл постоянной разделения. Положим также  $\aleph_v^2 - \aleph_y^2 = \aleph_x^2$ . Тогда получим из двойного равенства (6.26) два уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \aleph_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \aleph_y^2 Y = 0. \quad (6.27)$$

Запишем общее решение пары уравнений (6.27):

$$\begin{aligned} \psi_v^e = XY = & (A_1 \cos(\aleph_x x) + B_1 \sin(\aleph_x x)) \cdot \\ & \cdot (A_2 \cos(\aleph_y y) + B_2 \sin(\aleph_y y)). \end{aligned}$$

Используя граничные условия (6.24), получаем

$$\psi_v^e = \psi_{mn}^e = \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (6.28)$$

$$m=1,2,3,\dots, n=1,2,3,\dots$$

Общий множитель в  $\psi_{mn}^e$  положен равным единице. Поскольку

$$\aleph_x = \aleph_{xm} = \frac{m\pi}{a}, \text{ а } \aleph_y = \aleph_{ym} = \frac{n\pi}{b}, \text{ для собственного значения } \aleph_v^e = \aleph_{mn}^e$$

имеем

$$\aleph_{mn}^e = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Критическая длина волны  $\lambda_{mn}^e$  при этом рассчитывается как

$$\lambda_{mn}^e = \frac{2\pi}{\aleph_{mn}^e} = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}}. \quad (6.29)$$

Используя приведенные выше правила (поперечное распределение  $E_z$  совпадает с  $\psi_{mn}^e(x, y)$ , линии  $\vec{H}_{tmn}$  совпадают с линиями уровня  $\psi_{mn}^e$ , линии  $\vec{E}_{tmn}$  соответствуют  $grad\psi_{mn}^e$ ) построим структуру поля волн E-типа в прямоугольных волноводах при низших индексах.

1. Наибольшая критическая длина волны оказывается у  $E_{11}$ -волны:

$$\lambda_{11}^e = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \psi_{11}^e = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Используя рельеф  $\psi_{11}^e$ , получаем структуру поля волны  $E_{11}$  в поперечном и продольном сечениях волновода, изображенную на [Рис.6.25](#) (сплош-

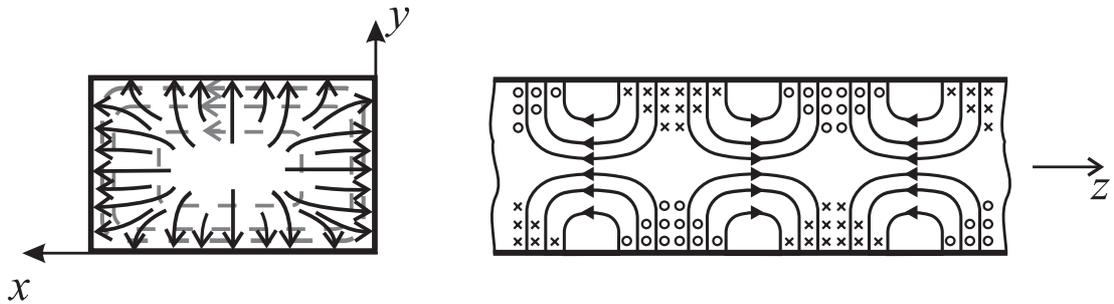


Рис. 6.25.

ные линии напряженности  $\vec{E}$ , штриховые -  $\vec{H}$ ).

2. При увеличении индексов  $m$  и  $n$  картина поля  $E_{11}$  мультиплицируется  $m$  раз по  $X$  и  $n$  раз по  $Y$ . Для примера на [Рис.6.26](#) изображена структура поля  $E_{33}$ .

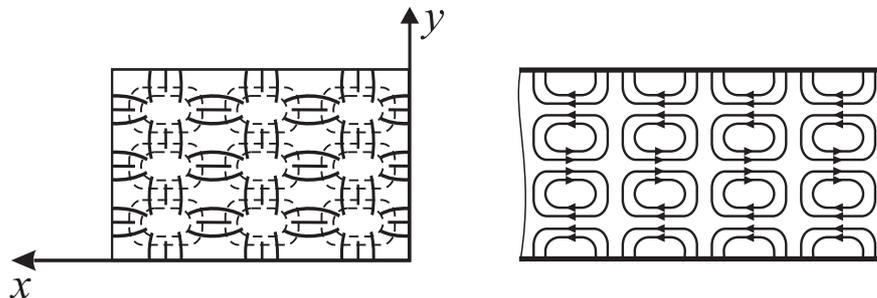


Рис. 6.26.

## 6.8. Магнитные волны в прямоугольном волноводе

Краевая задача для  $\psi_v^m$  имеет вид

$$\nabla^2 \psi_v^m + \aleph_v^2 \psi_v^m = 0, \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial \psi_v^m}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, a; \quad \frac{\partial \psi_v^m}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0, b. \quad (6.31)$$

Используя, как и ранее, метод разделения переменных, получаем общее решение (17.1) в виде

$$\psi_v^m = (A_1 \cos(\aleph_x x) + B_1 \sin(\aleph_x x))(A_2 \cos(\aleph_y y) + B_2 \sin(\aleph_y y)).$$

Применяя граничные условия (17.2), имеем

$$\psi_{mn}^m = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad m=0,1,2,3,\dots, \quad n=0,1,2,3,\dots,$$

$$\aleph_{mn}^m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad \lambda_{mn}^m = \frac{2\pi}{\aleph_{mn}^m} = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}}$$

Построим структуру полей Н-волн в прямоугольном волноводе, используя установленные выше правила: поперечное распределение  $H_z$  совпадает с  $\psi_{mn}^m(x, y)$ , линии  $\vec{E}_{tmn}$  совпадают с линиями уровня  $\psi_{mn}^m$ , линии  $\vec{H}_{tmn}$  соответствуют  $\text{grad } \psi_{mn}^m$ .

1. При  $a > b$  наибольшей критической длиной волны  $\lambda_{mn}^m$  обладает волна  $H_{10} = \lambda_{10}^m = 2a$ . Распределение силовых линий волны представлено на рис. 6.27.

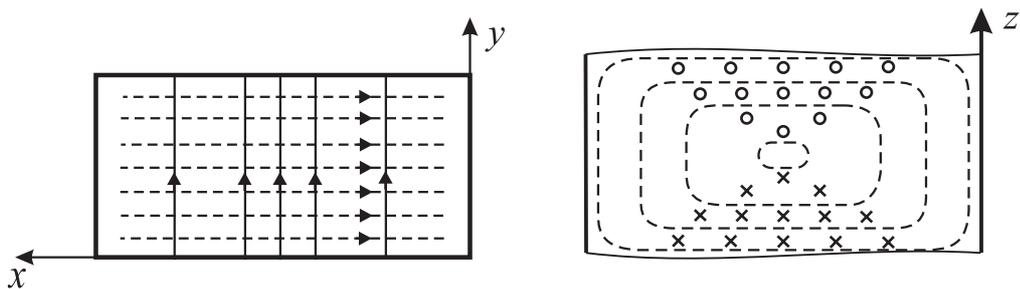


Рис. 6.27.

2. Волна  $H_{01}$  имеет критическую длину волны  $\lambda_{01}^m = 2b$ . Её структура изображена на [Рис.6.28](#), она аналогична структуре волны  $H_{10}$ , но развернута на  $90^\circ$  относительно плоскости XZ.

3. На [Рис.6.29](#) изображена поперечная структура волны  $H_{11}$ . Её критическая длина  $\lambda_{11}^m = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

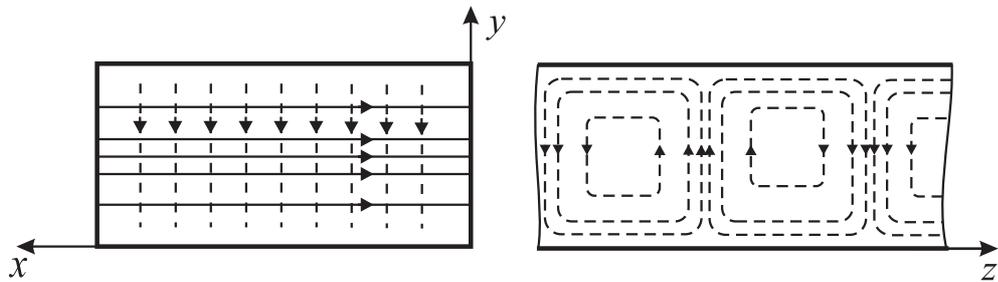


Рис. 6.28.

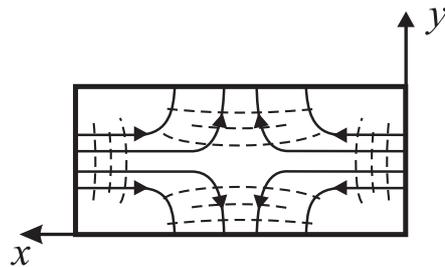


Рис. 6.29.

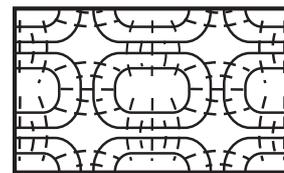


Рис. 6.30.

4. Поперечная структура волны  $H_{22}$  изображена на [Рис.6.30](#). Она представляет собой двухкратную мультипликацию структуры волны  $H_{11}$  в X- и Y-направлениях.

### 6.9. Вырождение волн в прямоугольном волноводе. Доминантная волна и рабочий диапазон прямоугольного волновода

Как указывалось раньше, случай, когда одному собственному значению  $\aleph_\nu$  соответствует две и более различных собственных функций  $\psi_\nu$ , называется вырождением. Для прямоугольного волновода при ненулевых индексах  $m$  и  $n$  имеет место именно такой случай:

$$\aleph_{mn}^H = \aleph_{mn}^E = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

т.е. граничные условия первого рода [\(6.24\)](#) и второго рода [\(6.30\)](#) дают одинаковые собственные значения. При этом  $\psi_{mn}^e$  и  $\psi_{mn}^m$  различны. С технической точки зрения существенно, что критические длины волны  $\lambda_{mn}^e$  и  $\lambda_{mn}^m$  одинаковы:

$$\lambda_{mn}^e = \lambda_{mn}^m = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}} = \lambda_{mn}.$$

Вследствие этого и дисперсионные зависимости постоянных распространения волн  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$  одинаковы:

$$\Gamma_{mn}^H = \Gamma_{mn}^E = k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{mn}}\right)^2} = \Gamma_{mn}.$$

Таким образом, можно говорить о ЕН волнах, хотя возможно раздельное возбуждение  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  волн ввиду различия структуры полей этих волн. Однако существующие в реальных устройствах неоднородности (специальные или случайные) приведут к преобразованию  $E_{mn}$  волн в  $H_{mn}$  и наоборот. Благодаря одинаковым фазовым скоростям эти преобразования будут иметь кумулятивный характер.

При конструировании СВЧ-устройств рабочий диапазон волновода следует выбирать так, чтобы в нем распространялась только одна волна, другие же были закритическими. В качестве такой волны волновода должна быть выбрана доминантная (основная) волна волновода с наибольшей критической длиной волны. В случае  $a > b$  в прямоугольном волноводе такой волной является волна  $H_{10}$ . Если  $a > 2b$  (что выполняется для всех стандартных конфигураций прямоугольного волновода), то ближайшей мешающей (паразитной) волной будет  $H_{20}$ . Следовательно, в диапазоне  $\lambda_{10}^H = 2a < \lambda < \lambda_{20}^H = a$  может распространяться только доминантная волна  $H_{10}$ . Рабочий диапазон, однако, меньше октавы: вблизи  $\lambda = 2a$  слишком сильна дисперсия и связанные с ней фазовые искажения сигналов и критичность настроек, вблизи  $\lambda = a$  усиливается реактивность, связанная с высшими типами волн и возникает опасность паразитной связи между элементами тракта на этих волнах, которые становятся слабо закритическими и медленно затухают вдоль оси волновода.

## 6.10. Электрические (Е) волны в волноводах с круговым сечением

Воспользуемся цилиндрической системой координат, как это показано на [рис.6.32](#).

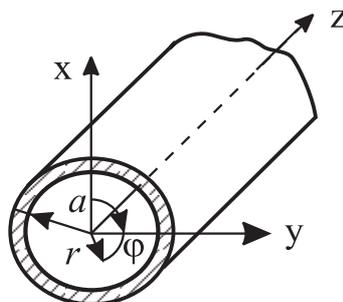


Рис. 6.32.

Краевая задача для функции  $\psi_v^e(r, \varphi)$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi_v^e + \aleph_v^2 \psi_v^e = 0, \quad (6.32)$$

$$\psi_v^e(a) = 0, \quad (6.33)$$

$a$  – внутренний радиус волновода.

В полярной системе координат  $r, \varphi$  ( $h_1=1, h_2=r$ ) имеем

$$\nabla^2 \psi_v^e = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_v^e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial \varphi} \right) \right\} = \frac{\partial^2 \psi_v^e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v^e}{\partial \varphi^2}.$$

Таким образом, уравнения (6.32) в системе координат  $r, \varphi$  записываются как

$$\frac{\partial^2 \psi_v^e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v^e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v^e}{\partial \varphi^2} + \aleph_v^2 \psi_v^e = 0. \quad (6.34)$$

Воспользуемся методом разделения переменных и представим искомые решения  $\psi_v^e = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ . Подставляя его в (6.34), получаем

$$\Phi \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \aleph_v^2 R \Phi = - \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}. \quad (6.35)$$

Умножая обе части (6.35) на  $\frac{r^2}{R\Phi}$ , получаем разделенные по переменным уравнения:

$$\frac{r^2}{R} \left[ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \aleph_v^2 r^2 = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda^2$$

Здесь  $\lambda^2$  - постоянная разделения. Запишем уравнения для  $\Phi$ :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda^2 \Phi = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi = \cos(\lambda \varphi + \alpha).$$

Поскольку условие замкнутости по  $\varphi$  требует

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

закключаем, что  $\lambda = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Для краткости записи положим также постоянную отсчета по  $\varphi$   $\alpha = 0$ . Таким образом, частное решение для  $\Phi$  запишем как  $\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi$ .

Уравнение для  $R$  теперь имеет вид

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \left( \mathfrak{K}_n^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0. \quad (6.36)$$

Уравнение (6.36) представляет собой известное уравнение Бесселя, имеющее в качестве решений функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка  $J_n(\mathfrak{K}_n r)$  и функции Бесселя второго рода  $n$ -го порядка  $N_n(\mathfrak{K}_n r)$  (функции Неймана). На [Рис.6.33](#) представлен характер зависимостей  $J_n(\mathfrak{K}_n r)$  и  $N_n(\mathfrak{K}_n r)$ .

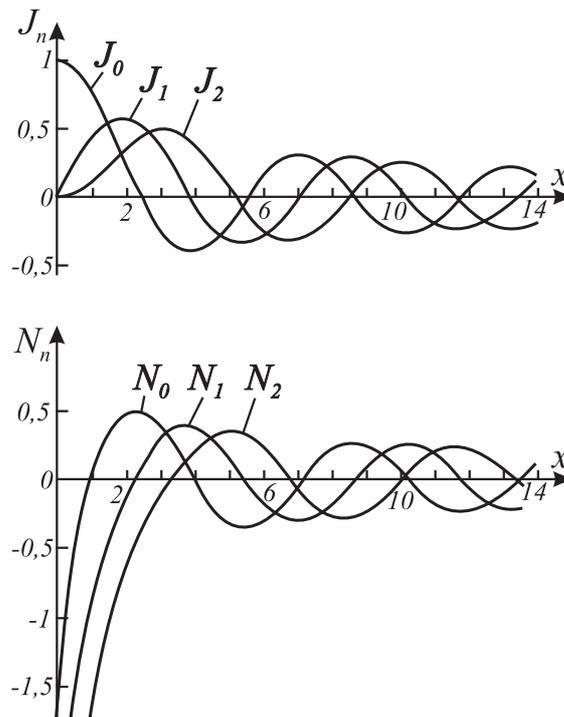


Рис. 6.33.

Очевидно, что поскольку  $N_n(\mathfrak{K}_n r) \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow 0$ , эти функции должны быть исключены из решения, поскольку  $\psi_n^e$  при  $r \rightarrow 0$  не должна обращаться в бесконечность. Таким образом,  $R_n = J_n(\mathfrak{K}_n r)$  и соответственно

$$\psi_n^e = J_n(\mathfrak{K}_n r) \cos n\varphi.$$

Используем теперь граничное условие (6.33):

$$J_n(\aleph_n a) = 0.$$

Обозначим  $v_{ni}$   $i$ -й корень функции Бесселя  $J_n(x) : J_n(v_{ni}) = 0$ . Тогда  $\aleph_{ni}^e a = v_{ni}$  и собственное значение  $\aleph_{ni}^e$  находится как

$$\aleph_{ni}^e = \frac{v_{ni}}{a}. \quad (6.37)$$

Критические длины волн типов  $E_{ni}$  в соответствии с (19.6) определяются в виде

$$\lambda_{ni}^e = \frac{2\pi a}{v_{ni}^e}, \quad (6.38)$$

а собственная функция имеет следующую форму:

$$\psi_{ni}^e = J_n\left(\frac{v_{ni}^e}{a} r\right) \cos n\varphi. \quad (6.39)$$

Используя (6.39) и правила изображения поля, проанализируем структуру некоторых типов Е-волн.

1. Структура волны  $E_{01}$  в поперечном и продольном сечениях изображена на [рис.6.34](#).

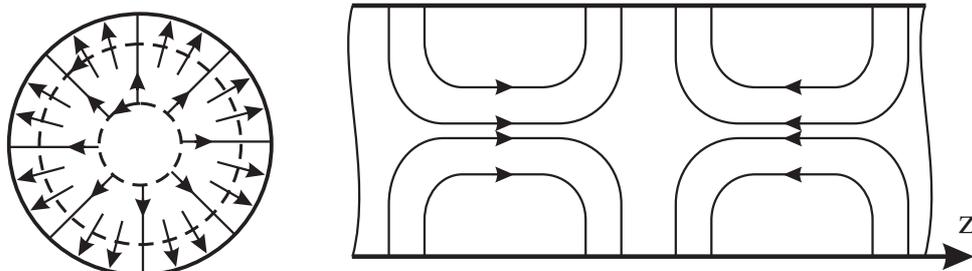


Рис. 6.34.

Это основная волна типа Е с наибольшей критической длиной волны  $\lambda_{01}^e = \frac{2\pi a}{v_{01}}$ . Первый нулевой индекс указывает, что волна азимутально-симметричная.

2. Волна  $E_{11}$  – несимметричная. Её структура в поперечном и продольном сечениях изображена на [рис.6.35](#).

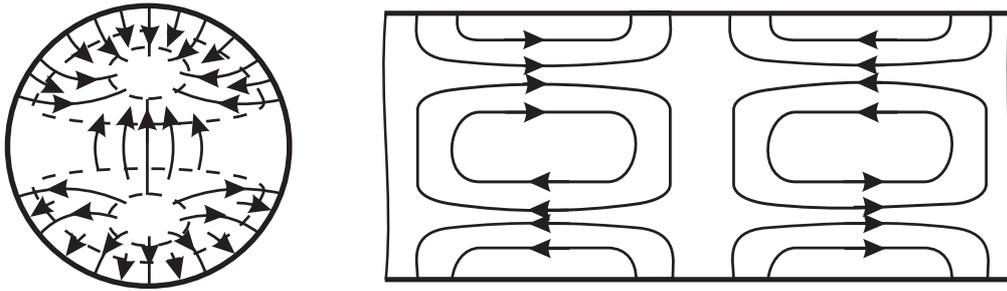


Рис. 6.35.

3. Увеличение азимутального индекса  $n$  приводит к азимутальному развитию структуры поля. Поперечные структуры волн  $E_{21}$  и  $E_{41}$  приведены соответственно на [Рис.6.36](#) и [6.37](#).

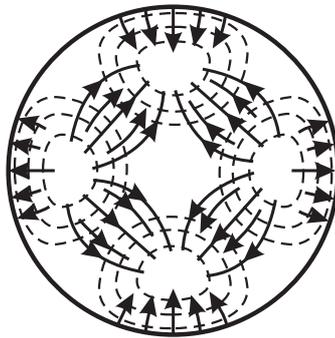


Рис. 6.36.

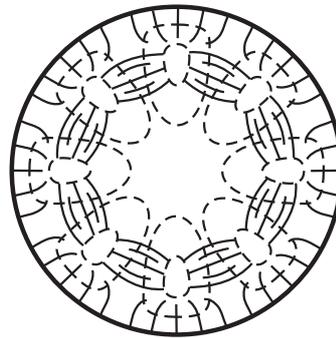


Рис. 6.37.

4. Увеличение радиального индекса  $i$  дает радиальное развитие структуры поля. Для иллюстрации на [рис.6.38](#) приведен сектор структуры волны  $E_{24}$ .

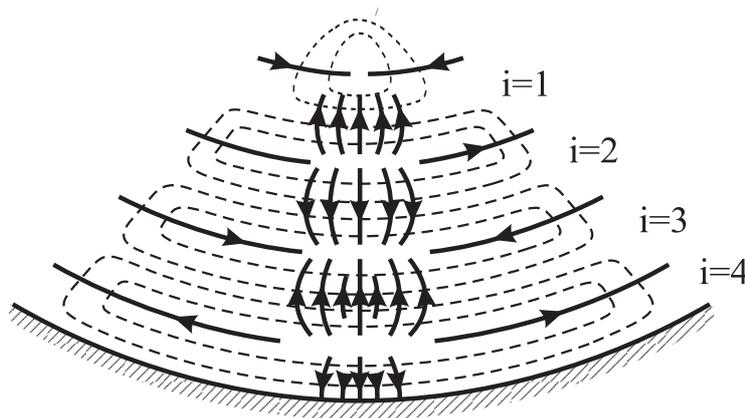


Рис. 6.38.

### 6.11. Магнитные (H) волны в круглом волноводе

В рассматриваемом случае краевая задача для  $\psi_v^m$  имеет вид

$$\nabla^2 \psi_v^m + \kappa_v^2 \psi_v^m = 0, \quad (6.40)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_v^m}{\partial n} \right|_{r=a} = 0, \quad (6.41)$$

где  $a$  – внутренний радиус волновода.

Общее решение (6.40) получено в предыдущем разделе:

$$\psi_{ni}^m = J_m(\kappa_{ni} r) \cos n\varphi.$$

Подчиним это решение условию (6.41):

$$J'_m(\kappa_{ni} a) = 0,$$

откуда следует, что  $\kappa_{ni} = \frac{\mu_{ni}}{a}$ , где  $\mu_{ni}$  -  $i$ -й корень производной по аргументу  $J'_m(\mu_{ni}) = 0$ . Таким образом, в рассматриваемом случае Н-волн собственная функция  $\psi_v^m$  выражается как

$$\psi_{ni}^m = J_n\left(\frac{\mu_{ni}}{a} r\right) \cos n\varphi \quad (6.42)$$

Собственное значение  $\kappa_{ni} = \frac{\mu_{ni}}{a}$ , соответственно критическая длина волны  $\lambda_{ni}^m$  определяется следующим образом:

$$\lambda_{ni}^m = \frac{2\pi}{\kappa_{ni}} = \frac{2\pi a}{\mu_{ni}}.$$

Используя (6.42) и правила построения структуры Н-волн, рассмотрим структуру некоторых типов Н-волн в круглом волноводе.

1. Структура волны  $H_{01}$  изображена на Рис.6.39. Нулевой азимутальный индекс указывает на то, что волна – азимутально-симметричная.

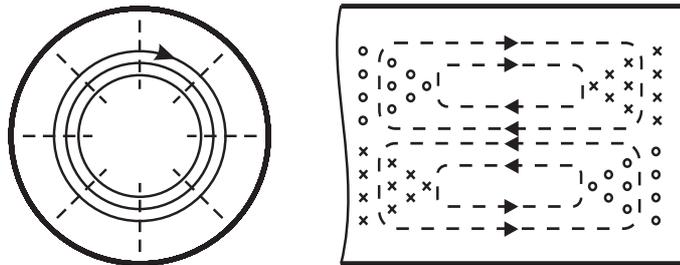


Рис. 6.39.

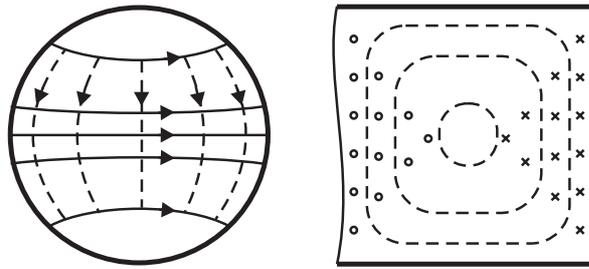


Рис. 6.40.

2. Несимметричная волна  $H_{11}$  изображена на [Рис.6.40](#). Это волна является доминантной – её критическая длина волны  $\lambda_{11}^m = \frac{2\pi a}{\mu_{11}}$  максимальна среди других, как  $H_{ni}$ , так и  $E_{ni}$  волн.

3. Азимутальное развитие структуры Н-волн с увеличением азимутального индекса  $n$  иллюстрируется на [Рис.6.41](#) ( $H_{21}$  волна) и [Рис.6.42](#) ( $H_{41}$  волна).

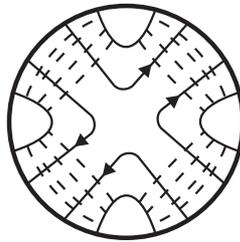


Рис. 6.41.

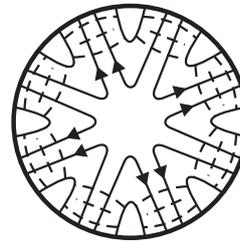


Рис. 6.42

Н-волны с высоким азимутальным индексом нашли применение в гиротронах – сверхмощных генераторах миллиметрового диапазона на циклотронном резонансе. Эти волны также называются модами шепчущей галереи – по аналогии с известным акустическим феноменом Тадж-Махала.

4. Радиальное развитие структуры поля Н-волн с увеличением радиального индекса  $i$  иллюстрируется на [Рис.6.43](#), где приведен сектор распределения поля волны  $H_{24}$ .

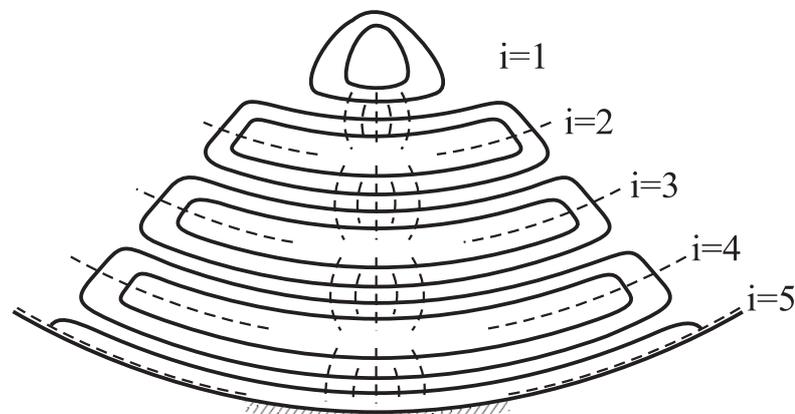


Рис. 6.43.

Остановимся на спектре собственных волн круглого волновода и определим его рабочий диапазон. Как следует из [\(6.38\)](#) и [\(6.43\)](#), распределение

критических длин волн определяется формулами  $\lambda_{ni}^e = \frac{2\pi a}{v_{ni}}$ ,  $\lambda_{ni}^m = \frac{2\pi a}{\mu_{ni}}$ , где  $v_{ni}$ ,  $\mu_{ni}$  - соответственно корни функций Бесселя  $n$ -го порядка ( $v_{ni}$ ) и их производных ( $\mu_{ni}$ ). Поскольку  $J'_0(x) = -J_1(x)$ ,  $\mu_{0i} \equiv v_{1i}$  и критические длины волн  $H_{0i}$  и  $E_{1i}$  одинаковы. Для других значений  $n$  вырождение отсутствует. Наибольшую критическую длину волны имеет волна  $H_{11}$ :  $\lambda_{11}^m = \frac{2\pi a}{1,84}$ . Ближайшая к ней – волна  $E_{01}$ . Для нее  $\lambda_{01}^e = \frac{2\pi a}{2,405}$ . Поэтому максимальный рабочий диапазон круглого волновода определяется как  $\frac{2\pi a}{2,405} < \lambda < \frac{2\pi a}{1,84}$ . При этом отношение  $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 1,3$ . Нетрудно заметить, что доминантная волна круглого волновода является прообразом волны  $H_{10}$  прямоугольного. На [Рис.6.44](#) показана трансформация круглого волновода в прямоугольный и соответственно волны  $H_{11}$  круглого волновода в волну  $H_{10}$  прямоугольного.

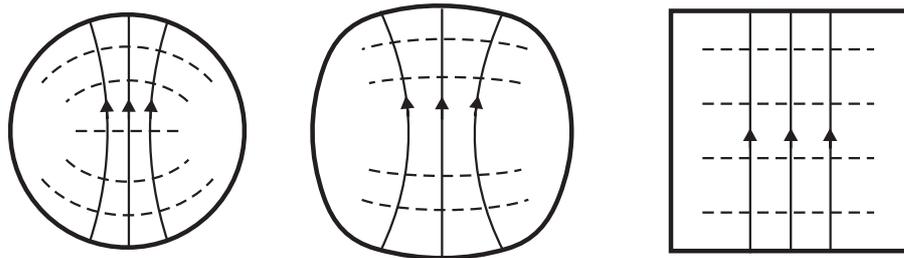


Рис. 6.44.

## 6.12. Потери и затухание волн в волноводах

Можно выделить три группы факторов, приводящих к потерям электромагнитной энергии в волноводе.

1. Потери в среде, заполняющей волновод ( $\bar{P}_{cp}$ ).
2. Неидеальная проводимость стенок ( $\bar{P}_{\sigma}$ ).
3. Излучение через щели и окна связи в стенках, а также через элементы связи с внешними цепями ( $\bar{P}_{\Sigma}$ ).

Третий вид потерь имеет специфический характер и связан с конкретными конструкциями. Поэтому мы остановимся на первых двух видах потерь.

1. Потери в среде ( $\bar{P}_{cp}$ ). Полагаем  $\bar{P}_{\sigma} = 0$ ,  $\bar{P}_{\Sigma} = 0$ .

В случае электрических и магнитных потерь в среде  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  являются комплексными:

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a = \varepsilon_a e^{-j\Delta_E},$$

$$\dot{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a = \mu_a e^{-j\Delta_M},$$

где  $\Delta_E, \Delta_M$  - соответственно углы диэлектрических и магнитных потерь. Волновое число для свободного пространства также оказывается комплексным:

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\mu}_a \dot{\varepsilon}_a} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} e^{-j \frac{\Delta_E + \Delta_M}{2}}.$$

Соответственно постоянная распространения для любой собственной волны в волноводе также будет комплексной:

$$\dot{\Gamma}_v = \sqrt{\dot{k}^2 - \aleph_v^2} = \beta_v - j\alpha_v. \quad (6.44)$$

Обратим внимание на то, что  $\aleph_v^2$ , как было доказано выше, действительное положительное число.

Под индексом собственной волны  $v$  понимается сочетание индексов  $m, n$  (прямоугольный волновод) или  $n, i$  (круглый волновод).

Из (6.44) получаем

$$\beta_v^2 - \alpha_v^2 - j2\alpha_v\beta_v = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a e^{-j(\Delta_E + \Delta_M)} - \aleph_v^2,$$

или

$$2\alpha_v\beta_v = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \sin(\Delta_E + \Delta_M),$$

$$\beta_v^2 - \alpha_v^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \cos(\Delta_E + \Delta_M) - \aleph_v^2$$

В практически важных случаях  $\alpha_v \ll \beta_v$ ,  $\cos(\Delta_E + \Delta_M) \rightarrow 1$ ,  $\sin(\Delta_E + \Delta_M) \approx \Delta_E + \Delta_M$ . В этом случае получаем

$$\beta_v = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \aleph_v^2},$$

$$\alpha_v = \frac{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a (\Delta_E + \Delta_M)}{2\beta_v} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{\Delta_E + \Delta_M}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kpv}}\right)^2}}.$$

2. Потери в металле ( $\bar{P}_\sigma$ ).  $\bar{P}_{cp} = 0$ ,  $\bar{P}_\Sigma = 0$ .

Применим энергетический подход, основанный на использовании теоремы об активной мощности.

Представим компоненты собственной волны следующим образом:

$$\dot{\vec{E}}_v = \vec{E}_v^0(q_1, q_2) e^{-j\Gamma_v Z} = \vec{E}_v^0(q_1, q_2) e^{-j\beta_v Z} e^{-\alpha_v Z},$$

$$\dot{\vec{H}}_v = \vec{H}_v^0(q_1, q_2) e^{-j\Gamma_v Z} = \vec{H}_v^0(q_1, q_2) e^{-j\beta_v Z} e^{-\alpha_v Z}.$$

где  $q_1, q_2$  - поперечные, в общем случае криволинейные координаты.

Рассчитаем мощность, переносимую  $v$ -й волной через поперечное сечение волновода  $S_{\perp}$ , используя определение плотности потока энергии – вектор Умова-Пойнтинга  $\dot{\vec{S}}_{0v} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}}_v, \dot{\vec{H}}_v^*]$ :

$$\dot{\vec{P}}_{zv} = \text{Re} \int_{S_{\perp}} \dot{\vec{S}}_{0v} \vec{Z}_0 dS_{\perp} = e^{-2\alpha_v Z} \text{Re} \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} [\dot{\vec{E}}_{0v}, \dot{\vec{H}}_{0v}^*] \vec{Z}_0 dS_{\perp}.$$

Образует производную  $\frac{d\bar{P}_{zv}}{dz}$ :

$$\frac{d\bar{P}_{zv}}{dz} = -2\alpha_v \bar{P}_{zv} \text{ (считаем, что } S_{\perp} = \text{Const).}$$

Таким образом, постоянную затухания  $\alpha_v$ , можно определить как

$$\alpha_v = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d\bar{P}_{zv}}{dz}}{\bar{P}_{zv}}. \quad (6.45)$$

Для определения  $\frac{d\bar{P}_{zv}}{dz}$ , входящей в (6.45), воспользуемся теоремой об активной мощности для собственной волны в волноводе (источники находятся вне рассматриваемого объема,  $P_a = 0$ ).

Рассмотрим элементарный объем внутри волновода (Рис.6.45)

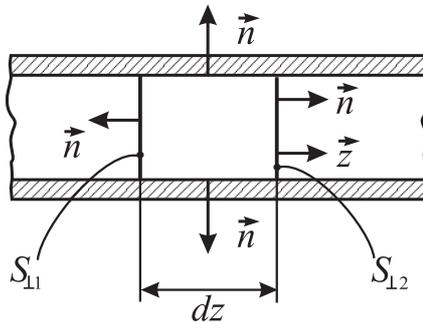


Рис. 6.45.

Полная замкнутая поверхность, ограничивающая выделенный элементарный объем,

$$S = dS_{\text{бок}} + S_{L1} + S_{L2}.$$

причем  $\vec{S}_{\perp 1} = \vec{n}S_{\perp 1} = -\vec{Z}_0 S_{\perp 1}$ ,  $\vec{S}_{\perp 2} = \vec{n}S_{\perp 2} = \vec{Z}_0 S_{\perp 2}$ .

Применим в рассматриваемом случае теорему об активной мощности

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\vec{S}}_{0v} d\vec{S} = 0,$$

или

$$-\bar{P}_{zv1} + \bar{P}_{zv2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_{\ell} \left[ \dot{\vec{E}}_v, \dot{\vec{H}}_v^* \right] \vec{n} d\ell dz = 0, \quad (6.46)$$

где  $\ell$  - контур сечения волновода.

Ввиду бесконечной малости  $dz$  можно записать

$$\bar{P}_{zv2} = \bar{P}_{zv1} + \frac{d\bar{P}_{zv}}{dz} dz.$$

Тогда из (6.44) получаем

$$\frac{d\bar{P}_{zv}}{dz} = -\operatorname{Re} \frac{1}{2} \oint_{\ell} \left[ \dot{\vec{E}}_v, \dot{\vec{H}}_v^* \right] \vec{n} d\ell. \quad (6.47)$$

Воспользуемся приближенным граничным условием Леонтовича на поверхности неидеального проводника:

$$\left[ \vec{n} \dot{\vec{E}} \right] \Big|_S = -\dot{W}_\sigma^0 \left[ \vec{n} \left[ \vec{n} \dot{\vec{H}}_v \right] \right] \Big|_S. \quad (6.48)$$

где  $\dot{W}_\sigma^0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon'_a - j \frac{\sigma}{\omega}}}$  - волновое сопротивление неидеального проводника.

С учетом (6.48) подинтегральное выражение в уравнении (6.47) можно преобразовать следующим образом:

$$\left[ \vec{E}_v, \vec{H}_v^* \right] \vec{n} = -\dot{W}_\sigma^0 \left( \vec{n} \dot{H}_{vn} - \dot{\vec{H}}_v \right) \dot{\vec{H}}_v^* = \dot{W}_\sigma^0 H_{vzm}^2.$$

Учитывая также, что для хорошо проводящей среды  $\varepsilon'_a \ll \frac{\sigma}{\omega}$  и поэто-

му  $\dot{W}_\sigma^0 \approx (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}}$ , окончательно получаем вместо (6.47)

$$\frac{d\bar{P}_{zv}}{dz} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}} \oint_{\ell} H_{v\tau m}^2 d\ell.$$

Используя полученный результат в (6.45), приходим к следующей формуле постоянной затухания, связанной с потерями в металлических стенках волновода:

$$\alpha_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}} \frac{\oint_{\ell} H_{v\tau m}^2 d\ell}{\operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} \left[ \dot{\vec{E}}_v \dot{\vec{H}}_v^* \right] \vec{Z}_0 dS_{\perp}}. \quad (6.49)$$

Заметим, что поскольку плотность поверхностного тока в стенках волновода  $\vec{\delta}_{sv} = [\vec{n}, \vec{H}_v]$ , то  $H_{v\tau m}^2 \equiv \delta_{svm}^2$ , что несколько поясняет физический смысл формулы (6.49): потери обусловлены токами, текущими в неидеально проводящих стенках волновода.

Типичные частотные зависимости  $\alpha_v$  для различных типов волн приведены на Рис. 6.46:

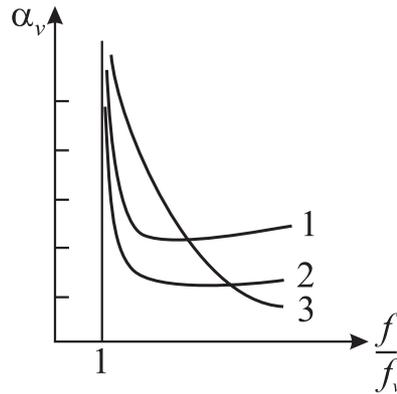


Рис. 6.46.

- 1 – волна  $H_{10}$  для прямоугольного волновода,
- 2 –  $H_{11}$  для круглого волновода,
- 3 –  $H_{01}$  для круглого волновода.

Вблизи  $\frac{f}{f_v} = 1$   $\alpha_v$  резко возрастает для всех волн. Формально это свя-

зано с тем, что знаменатель в формуле (6.49)  $2\bar{P}_{vz} = \operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} \left[ \dot{\vec{E}}_v \dot{\vec{H}}_v^* \right] \vec{Z}_0 dS_{\perp}$  суще-

ственно уменьшается (если принять, что  $\dot{\vec{E}}_v, \dot{\vec{H}}_v$  те же, что и в волноводе без

потерь, то  $2\bar{P}_{vz} \approx \sqrt{1 - \frac{f_v}{f}} \rightarrow 0$  при  $\frac{f_v}{f} \rightarrow 1$ ).

Картина парциальных волн Бриллюэна дает в этом случае простое физическое объяснение: при  $\frac{f_v}{f} \rightarrow 0$  угол отражения от стенок  $\Theta_v \rightarrow 0$  и число отражений парциальных волн от стенок неограниченно возрастает на конечном отрезке волновода; при каждом отражении малая, но конечная часть энергии проходит в стенку. В результате погонные потери неограниченно возрастают. Это, конечно, идеализированные представления, не учитывающие изменение структуры поля вблизи неидеального проводника. На самом деле  $\alpha_v$  не обращается в бесконечность при  $\frac{f_v}{f} = 1$  и остается конечной, хотя и достаточно большой величиной. Строго говоря, частота отсечки  $f_v$  при конечной проводимости стенок не существует, поскольку при любой частоте есть поток энергии в направлении стенок, а следовательно, и продольный поток энергии.

При увеличении  $\frac{f}{f_v}$   $\alpha_v$  для волн  $H_{10}$  (1) и  $H_{11}$  (2) начинает вновь монотонно возрастать. Это связано с тем, что с ростом частоты возрастает  $W_\sigma^0$  и поэтому улучшается «согласованность» стенки и внутренней среды, заполняющей волновод. В результате все большая часть энергии уходит в стенку.

Однако для симметричной волны  $H_{01}$  в круглом волноводе это не так: с ростом  $\frac{f}{f_v}$   $\alpha_v$  асимптотически стремится к нулю. Такая аномальная зависимость связана со структурой поля волны  $H_{01}$  у стенки волновода: здесь имеется только одна составляющая  $H_z$ , которая при росте  $\frac{f}{f_v}$  непрерывно уменьшается по отношению к составляющей  $H_t$ , определяющей продольный поток мощности волны. Соответственно при заданной переносимой волной мощности уменьшаются и азимутальные токи в стенках. Конечно, на практике реализовать такое уникальное свойство волны  $H_{01}$  (и вообще волн  $H_{0i}$ ) не просто: незначительная эллиптичность волновода или его изгиб приводят к преобразованию волн  $H_{0i}$  в несимметричные, которые имеют значительные потери. За счет такого преобразования  $\alpha_{0i}$  волны  $H_{01}$  возрастает.

## ГЛАВА VII

### ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ СТОРОННИМИ ИСТОЧНИКАМИ

#### 7.1. Лемма Лоренца. Теорема взаимности

Выведем из уравнений Максвелла тождество, связывающее два гармонических поля, не существующие одновременно, но возбуждаемые в одном и том же пространстве.

Пусть источник сторонних токов с плотностью  $\dot{\delta}_{e1}$ ,  $\dot{\delta}_{m1}$  возбуждает поле  $\dot{E}_1$ ,  $\dot{H}_1$ , а источник  $\dot{\delta}_{e2}$ ,  $\dot{\delta}_{m2}$  - поле  $\dot{E}_2$ ,  $\dot{H}_2$ . Запишем для того и другого поля систему УМ в комплексной форме:

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{H}_1 = j\omega\dot{\epsilon}_a\dot{E}_1 + \dot{\delta}_{e1}, \\ \text{rot } \dot{E}_1 = -j\omega\dot{\mu}_a\dot{H}_1 - \dot{\delta}_{m1}, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{H}_2 = j\omega\dot{\epsilon}_a\dot{E}_2 + \dot{\delta}_{e2}, \\ \text{rot } \dot{E}_2 = -j\omega\dot{\mu}_a\dot{H}_2 - \dot{\delta}_{m2}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Умножим скалярно первое уравнение системы (7.1) на  $\dot{E}_2$ , второе на  $\dot{H}_2$ ; первое уравнение (7.2) - на  $-\dot{E}_1$ , второе - на  $-\dot{H}_1$  и получившееся сложим. В результате получим

$$\text{div} \left\{ \left[ \dot{E}_1, \dot{H}_2 \right] - \left[ \dot{E}_2, \dot{H}_1 \right] \right\} = \left( \dot{\delta}_{e1}\dot{E}_2 - \dot{\delta}_{e2}\dot{E}_1 \right) - \left( \dot{\delta}_{m1}\dot{H}_2 - \dot{\delta}_{m2}\dot{H}_1 \right). \quad (7.3)$$

Перейдем к интегральной формулировке, используя теорему Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned} \oiint_S \left\{ \left[ \dot{E}_1, \dot{H}_2 \right] - \left[ \dot{E}_2, \dot{H}_1 \right] \right\} \vec{n} dS = \\ = \int_V \left\{ \left( \dot{\delta}_{e1}\dot{E}_2 - \dot{\delta}_{e2}\dot{E}_1 \right) - \left( \dot{\delta}_{m1}\dot{H}_2 - \dot{\delta}_{m2}\dot{H}_1 \right) \right\} dV. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) и представляет собой формулировку леммы Лоренца.

Заметим, что при выводе леммы Лоренца полагались равными нулю разности  $\left( \dot{\mu}_a\dot{H}_1 \right)\dot{H}_2 - \left( \dot{\mu}_a\dot{H}_2 \right)\dot{H}_1$ ,  $\left( \dot{\epsilon}_a\dot{E}_1 \right)\dot{E}_2 - \left( \dot{\epsilon}_a\dot{E}_2 \right)\dot{E}_1$ .

Это справедливо лишь при выполнении двух условий:

- 1)  $\dot{\varepsilon}_a \neq \dot{\varepsilon}_a(\dot{E}_{1,2}), \dot{\mu}_a \neq \dot{\mu}_a(\dot{H}_{1,2})$ ;
- 2)  $\dot{\varepsilon}_a \neq \dot{\varepsilon}, \dot{\mu}_a \neq \dot{\mu}$ .

Таким образом, лемма Лоренца в приведенной формулировке справедлива только для линейных и изотропных сред, что не следует забывать при ее применении.

Рассмотрим лемму Лоренца в безграничном пространстве, т.е. при  $S \rightarrow \infty$ . В соответствии с теоремой единственности все источники должны оставаться на конечном расстоянии от центра  $S$ , а

$$\oiint_S \left\{ \left[ \dot{E}_1, \dot{H}_2 \right] - \left[ \dot{E}_2, \dot{H}_1 \right] \right\} \cdot \vec{n} dS \rightarrow 0 \text{ при } S \rightarrow \infty,$$

тогда получаем

$$\int_V \left\{ \left( \dot{\delta}_{e1} \dot{E}_2 - \dot{\delta}_{e2} \dot{E}_1 \right) - \left( \dot{\delta}_{m1} \dot{H}_2 - \dot{\delta}_{m2} \dot{H}_1 \right) \right\} dV = 0. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) представляет собой общую формулировку теоремы взаимности. Чтобы прояснить ее смысл и возможности, рассмотрим частный случай:  $\dot{\delta}_{m1} = \dot{\delta}_{m2} = 0$ , а электрические токи заданы на элементарных диполях:

$$\dot{P}_{1,2} = \vec{l}_{1,2} \dot{q}_{1,2} = \frac{\vec{l}_{1,2} \dot{I}_{m1,2}}{j\omega} \text{ и } l \ll \lambda. \text{ Тогда из (7.5) следует}$$

$$j\omega \dot{P}_1 \dot{E}_2(1) - j\omega \dot{P}_2 \dot{E}_1(2) = 0 \quad (7.6)$$

или

$$\dot{P}_1 \dot{E}_2(1) - \dot{P}_2 \dot{E}_1(2).$$

Здесь  $\dot{E}_2(1)$  - поле  $\dot{E}_2$  в точке 1, где расположен диполь  $\dot{P}_1, \dot{E}_1(2)$  поле  $\dot{E}_1$  в точке 2, где расположен диполь  $\dot{P}_2, \dot{E}_2$  возбуждается диполем  $\dot{P}_2, \dot{E}_1 - \dot{P}_1$ .

$\dot{P}_1 \dot{E}_2(1)$  - действие диполя  $\dot{P}_2$  на диполь  $\dot{P}_1$  посредством возбуждаемого им поля  $\dot{E}_2, \dot{P}_2 \dot{E}_1(2)$  - действие диполя  $\dot{P}_1$  на  $\dot{P}_2$ .

Таким образом, смысл теоремы взаимности: действие диполя 1 на диполь 2 равно действию диполя 2 на диполь 1. Использование этой теоремы может быть очень широким, особенно в антенной технике. В частности, из

теоремы единственности следует, что свойства антенны при работе на прием и на передачу одинаковы. Соотношения типа (7.6) имеют место и для магнитных диполей:

$$\dot{M}_1 \dot{H}_2(1) = \dot{M}_2 \dot{H}_1(2).$$

Имеют место, естественно, и смешанные теоремы единственности для электрических и магнитных диполей:

$$\dot{P}_1 \dot{E}_2(1) = -\dot{M}_2 \dot{H}_1(2) .$$

Не следует, однако, забывать, что теорема взаимности, как и лемма Лоренца, из которой она следует, справедлива только для линейных и изотропных сред.

## 7.2. Ортогональность собственных волн в регулярных волноводах

Напомним, что регулярный волновод, такой, что  $\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_a(\vec{r}_\perp)$ ,  $\mu_a = \mu_a(\vec{r}_\perp)$  и не зависит от  $Z$ , и контур сечения волновода  $l \neq l(z)$ . Собственные волны – свободно распространяющиеся волны в регулярном волноводе на частоте  $\omega$  вне области источников. Их можно представить упорядоченно и каждой приписать номер  $S$ .

Волна с номером  $S$  имеет компоненты  $\dot{H}_S$ ,  $\dot{E}_S$  и постоянную распространения в  $+Z$  направлении  $h_S(\omega)$ . Волне того же типа, но распространяющейся в  $-Z$  направлении, припишем номер  $-S$ . Её постоянная распространения  $h_{-S} = -h_S$ .

Запишем компоненты попутной ( $+Z$ ) и встречной ( $-Z$ ) волн в следующей форме:

$$\dot{E}_S = \vec{E}_S^0(q_1, q_2) e^{-jh_S Z}, \quad \dot{H}_S = \vec{H}_S^0(q_1, q_2) e^{-jh_S Z};$$

$$\dot{E}_{-S} = \vec{E}_{-S}^0(q_1, q_2) e^{jh_S Z}, \quad \dot{H}_{-S} = \vec{H}_{-S}^0(q_1, q_2) e^{jh_S Z},$$

причем,  $\vec{E}_{-S}^0 = \mp \vec{E}_S^0$ ,  $\vec{H}_{-S}^0 = \pm \vec{H}_S^0$ .

Собственные волны на боковой металлической поверхности  $S_\delta$  волновода удовлетворяют условиям

$$\left[ \vec{n} \dot{E}_S \right] \Big|_{S_\delta} = 0 \tag{7.7}$$

в идеальном случае.

Запишем лемму Лоренца для двух собственных волн с индексами  $S$  и  $S'$ . В качестве  $\dot{E}_1$ ,  $\dot{H}_1$  возьмем  $\dot{E}_S$ ,  $\dot{H}_S$ , в качестве  $\dot{E}_2$ ,  $\dot{H}_2$  -  $\vec{E}_{S'}$ ,  $\vec{H}_{S'}$ . Учтем, что для собственных волн  $\vec{\delta}_{e1} = \vec{\delta}_{e2} = \vec{\delta}_{m1} = \vec{\delta}_{m2} = 0$ .

Тогда из (7.4) имеем

$$\oint_S \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S \right] \right\} \vec{n} dS = 0 \quad (7.8)$$

Выберем объем  $V$  и границу  $S$  в волноводе, как показано на [рис.7.1](#)

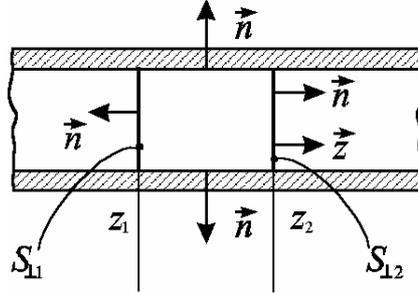


Рис. 7.1.

Как следует из [рис.7.1](#),  $S=S_\delta+S_{\perp 1}+S_{\perp 2}$ . Используя [\(7.7\)](#), получаем:

$$\int_{S_\delta} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S \right] \right\} \vec{n} dS = \int_{S_\delta} \left\{ \left[ \vec{n} \dot{\vec{E}}_S \right] \dot{\vec{H}}_{S'} - \left[ \vec{n} \dot{\vec{E}}_{S'} \right] \dot{\vec{H}}_S \right\} dS = 0 \quad (7.9)$$

Учитывая [\(7.9\)](#), а так же тот факт, что на  $S_{\perp 1}$   $\vec{n} = -Z_0$  получаем из [\(7.8\)](#)

$$J_{SS'}(Z_2) - J_{SS'}(Z_1) = 0, \quad (7.10)$$

$$J_{SS'} = \int_{S_\perp} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S \right] \right\} Z_0 dS_\perp,$$

$S_\perp$  - площадь поперечного сечения волновода.

Для регулярного волновода ни  $S_\perp$ , ни поперечные распределения полей не зависят от  $Z$ . Поэтому можно записать

$$J_{SS'}(Z_2) = J_{SS'}(Z_1) e^{-j(h_S + h_{S'})(Z_2 - Z_1)}.$$

Таким образом, [\(7.10\)](#) может выполняться только в двух случаях:

- 1)  $J_{SS'}(Z) = 0$  при любых  $Z$ ;
- 2)  $h_{S'} = -h_S$  или  $S' = -S$ .

В результате получаем условие ортогональности собственных волн регулярных волноводов в форме

$$J_{SS'} = \int_{S_\perp} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{S'} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{S'} \dot{\vec{H}}_S \right] \right\} Z_0 dS_\perp = 0 \text{ при } S' \neq -S.$$

Назовем нормой  $S$ -й волны значение  $N_S = J_{S, -S} = -J_{-S, S}$ .

Рассмотрим физический смысл  $N_S$  и введем полезное для дальнейших расчетов энергетическое соотношение. Составим выражение для  $N_S$ :

$$\begin{aligned} N_S &= \int_{S_\perp} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}_S \dot{\vec{H}}_{-S} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{-S} \dot{\vec{H}}_S \right] \right\} \vec{Z}_0 dS_\perp = \\ &= \int_{S_\perp} \left\{ \left[ \vec{E}_S^0 \vec{H}_S^0 \right] + \left[ \vec{E}_{-S}^0 \vec{H}_{-S}^0 \right] \right\} \vec{Z}_0 dS_\perp = 2 \int_{S_\perp} \left\{ \left[ \vec{E}_S^0 \vec{H}_S^0 \right] \right\} \vec{Z}_0 dS_\perp. \end{aligned} \quad (7.11)$$

С другой стороны, средняя за период мощность, переносимая  $S$ -й волной с комплексной амплитудой  $\dot{C}_S$  через поперечное сечение волновода  $S_\perp$  рассчитывается через вектор Умова-Пойнтинга как

$$\bar{P}_S = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_\perp} \left[ \dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S, \dot{C}_S^* \dot{\vec{H}}_S^* \right] \vec{Z}_0 dS_\perp = \frac{1}{2} \int_{S_\perp} (\dot{C}_S \dot{C}_S^*) \left[ \dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}}_S^* \right] \vec{Z}_0 dS_\perp = C_{Sm}^2 \frac{|N_S|}{4}$$

$$\text{Таким образом, } |N_S| = \frac{4\bar{P}_S}{C_{Sm}^2}.$$

### 7.3. Уравнения возбуждения регулярных волноводов сторонними токами

Представим вектора поля и тока в виде суммы поперечных и продольных составляющих:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}^t + \dot{\vec{E}}^\ell, \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}^t + \dot{\vec{H}}^\ell, \quad \dot{\vec{\delta}}_e = \dot{\vec{\delta}}_e^t + \dot{\vec{\delta}}_e^\ell, \quad \dot{\vec{\delta}}_m = \dot{\vec{\delta}}_m^t + \dot{\vec{\delta}}_m^\ell,$$

где вектора с верхними индексами  $t$ -поперечные,  $\ell$ -продольные.

Теперь воспользуемся свойствами собственных функций:  $\dot{\vec{E}}_S^t, \dot{\vec{H}}_S^t$  для  $S_\perp$  образуют полную систему в классе поперечных векторов (М.В. Келдыш, ДАН СССР. 1951, т.87, с.95). Ввиду этого свойства решение для  $\dot{\vec{E}}^t, \dot{\vec{H}}^t$  можно искать в виде разложения по полной системе  $\left\{ \dot{\vec{E}}_S^t \right\}$  и  $\left\{ \dot{\vec{H}}_S^t \right\}$ :

$$\dot{\vec{E}}^t = \sum_S \left( \dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S^t + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}^t \right), \quad (7.12)$$

$$\dot{\vec{H}}^t = \sum_S \left( \dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S^t + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}^t \right). \quad (7.13)$$

Здесь  $\dot{C}_{\pm S}$  - амплитуды возбужденных волн.

Используя поперечные и продольные составляющие уравнений Максвелла можно показать (см. А.А. Кураев, «Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками», Мн., Наука и Техника, 1971, с.22-23), что разложение для продольных составляющих имеет вид:

$$\dot{\vec{E}}^\ell = \sum_S \left( \dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S^\ell + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}^\ell \right) - \frac{\dot{\delta}_e^\ell}{j\omega \dot{\epsilon}_a}, \quad (7.14)$$

$$\dot{\vec{H}}^\ell = \sum_S \left( \dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S^\ell + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}^\ell \right) - \frac{\dot{\delta}_m^\ell}{j\omega \dot{\mu}_a} \quad (7.15)$$

Полное разложение поля теперь может быть записано в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \sum_S \left( \dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S} \right) - \frac{\dot{\delta}_e^\ell}{j\omega \dot{\epsilon}_a}, \\ \dot{\vec{H}} = \sum_S \left( \dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S} \right) - \frac{\dot{\delta}_m^\ell}{j\omega \dot{\mu}_a}. \end{cases} \quad (7.16)$$

Для определения  $\dot{C}_{\pm S}(Z)$  воспользуемся леммой Лоренца.

Рассмотрим отрезок волновода, включающий весь объем источников  $V=V_1+V_2$  между поперечными сечениями  $Z=0, Z_0$ . Текущее сечение  $Z$  делит  $V$

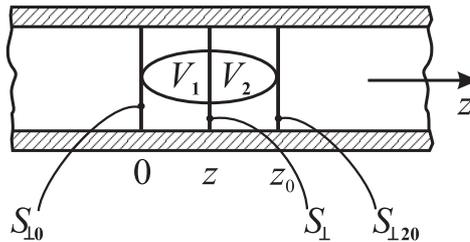


Рис. 7.2.

на  $V_1$  и  $V_2$  (Рис.7.2).

Запишем лемму Лоренца для объема  $V_1$ , полагая  $\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{H}}_1 \rightarrow \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}, \dot{\delta}_{1e} = \dot{\delta}_e, \dot{\delta}_{1m} = \dot{\delta}_m, \dot{\vec{E}}_2, \dot{\vec{H}}_2 \rightarrow \dot{\vec{E}}_{-S}, \dot{\vec{H}}_{-S}, \dot{\delta}_{e2} = 0, \dot{\delta}_{m2} = 0$ :

$$\oint_{S_1} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}_{-S} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{-S}, \dot{\vec{H}} \right] \right\} \vec{n} dS = \int_{V_1} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_{-S} - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_{-S} \right) dV_1. \quad (7.17)$$

Аналогичным образом запишем лемму Лоренца для объема  $V_2$ , полагая  $\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{H}}_1 \rightarrow \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}, \dot{\delta}_{1e} = \dot{\delta}_e, \dot{\delta}_{1m} = \dot{\delta}_m, \dot{\vec{E}}_2, \dot{\vec{H}}_2 \rightarrow \dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}}_S, \dot{\delta}_{e2} = \dot{\delta}_{m2} = 0$ :

$$\oiint_{S_2} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}_S \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}} \right] \right\} \vec{n} dS = \int_{V_2} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_S - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_S \right) dV_2. \quad (7.18)$$

Учтем следующие три обстоятельства

1) По условиям излучения на  $S_{\perp 0}$  есть только  $\dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}$ ,  $\dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}$ , на  $S_{\perp Z0}$  –  $\dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S$ ,  $\dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S$ ; на  $S_{\perp}$  есть  $\dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S$ ,  $\dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S$  излучаемые из  $V_1$  и  $\dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}$ ,  $\dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}$ , излучаемые из  $V_2$ ;

2)  $\int_{S_s} \left\{ \left[ \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}_S \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}} \right] \right\} \vec{n} dS = 0$  в соответствии с граничным условием (7.7);

$$3) \vec{Z}_0 \left[ \dot{\delta}_e^{\ell}, \dot{\vec{H}}_{\mp S} \right] = \dot{\vec{H}}_{\mp S} \left[ \vec{Z}_0, \dot{\delta}_e^{\ell} \right] \equiv 0, \quad \vec{Z}_0 \left[ \dot{\delta}_m^{\ell}, \dot{\vec{H}}_{\mp S} \right] \equiv 0.$$

Тогда, подставляя (7.16) в (7.17), имеем

$$\begin{aligned} & - \int_{S_{\perp 0}} \left\{ \left[ \sum_S \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}, \dot{\vec{H}}_{-S} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{-S}, \sum_S \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S} \right] \right\} \vec{Z}_0 d\vec{S} + \\ & + \int_{S_{\perp}} \left\{ \left[ \sum_S \dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}}_{-S} \right] - \left[ \dot{\vec{E}}_{-S}, \sum_S \dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S \right] \right\} \vec{Z}_0 d\vec{S} = \int_{V_1} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_{-S} - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_{-S} \right) dV_1. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Используя условие ортогональности собственных волн, из (22.19) получаем

$$\begin{aligned} \dot{C}_S &= \frac{1}{N_S} \int_{V_1} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_{-S} - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_{-S} \right) dV_1 = \\ &= \frac{1}{N_S} \int_0^Z \int_{S_{\perp}} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_{-S} - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_{-S} \right) dS_{\perp} dz \end{aligned} \quad (7.20)$$

Аналогичным образом, подставляя (7.16) в (7.18) и учитывая условия ортогональности, имеем

$$\dot{C}_{-S} = \frac{1}{N_S} \int_Z^{Z_0} \int_{S_{\perp}} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_S - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_S \right) dS_{\perp} dz. \quad (7.21)$$

Уравнения возбуждения (7.20), (7.21) можно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{d\dot{C}_{\pm S}}{dz} = \pm \frac{1}{N_S} \int_{S_{\perp}} \left( \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_{\mp S} - \dot{\delta}_m \dot{\vec{H}}_{\mp S} \right) dS_{\perp}. \quad (7.22)$$

## 7.4. Способы возбуждения волноводов (примеры)

1. Штырь (вибратор Герца).

Схема этого возбуждения изображена на [рис.7.3](#).

В данном случае вдоль линейного проводника длиной  $L$  и направле-

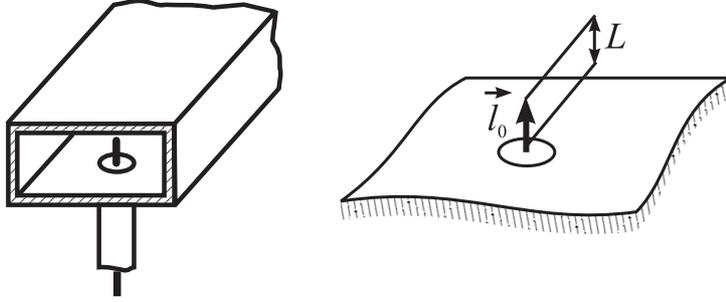


Рис. 7.3.

нием  $\vec{\ell}$  задан линейный сторонний ток  $\vec{I}_{cm} = \vec{\ell}_0 i(\vec{\ell})$ .

Используя уравнение возбуждения [\(7.20\)](#) и [\(7.21\)](#) в рассматриваемом случае, получаем

$$\begin{aligned} \dot{C}_{\pm S} &= \frac{1}{N_S} \int_{V_{1,2}} \dot{\delta}_e \dot{\vec{E}}_{\mp S} dV_{1,2} = \frac{1}{N_S} \int_0^L \vec{\ell}_0 \dot{\vec{E}}_{\mp S} i(\vec{\ell}) d\ell = \\ &= \frac{1}{N_S} \int_0^L \vec{\ell}_0 \dot{\vec{E}}_S^0(\vec{r}_\perp) i(\vec{\ell}) d\ell, \quad \dot{\vec{E}}_{\pm S} = \dot{\vec{E}}_S^0(\vec{r}_\perp) e^{\mp jh_s Z}, \quad \text{но } Z=0=const \text{ (в точке} \end{aligned}$$

расположения штыря).

Полагая  $i(\ell) = I_m e^{j\omega t} \varphi(\ell)$  и используя формулу  $\bar{P}_S$ , полученную ранее, имеем

$$\bar{P}_S = C_{Sm}^2 \frac{|N_S|}{4} = \frac{I_m^2 U_{\text{эфф}}^2}{|N_S| 4},$$

где

$$U_{\text{эфф}}^2 = \left| \int_0^L \vec{\ell}_0 \vec{E}_S^0(\vec{r}_\perp) \varphi(\ell) d\ell \right|.$$

С другой стороны,  $\bar{P}_S = \frac{1}{2} R_S I_m^2$ , где  $R_S$  - сопротивление излучения для

попутной или встречной волн. Таким образом,  $R_S = \frac{U_{\text{эфф}}^2}{2N_S}$ . Учитывая, что

излучаются одновременно (и равноценно) попутная и встречная волны, полное сопротивление излучения

$$R_{\Sigma S} = 2R_S = \frac{U_{\text{эфф}}^2}{N_S}.$$

2. Петля (рамка с током).

Схема такого способа возбуждения приведена на [рис.7.4](#).

Сторонний магнитный момент, создаваемый рамкой с током

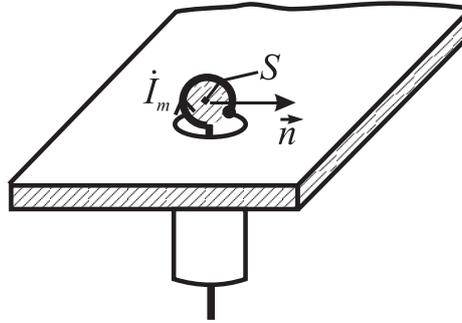


Рис. 7.4.

$\dot{\vec{M}} = \vec{n} S \dot{i} \mu_a$ . Фиктивный линейный ток  $\dot{i}^m$  можно ввести как  $\dot{i}^m \vec{n} \ell = j\omega \vec{M} = j\omega \vec{n} S \dot{i} \mu_a$ , где  $\ell$  - длина фиктивного магнитного диполя,  $S$  - площадь рамки. Производя те же действия, что и в предыдущем примере для электрического диполя, получаем

$$\dot{C}_{\pm S} = -\frac{1}{N_S} \vec{n} \dot{H}_{\mp S}(1) j\omega S \dot{i} \mu_a.$$

Предполагается, что рамка мала по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , и поэтому ток в ней имеет одинаковую амплитуду по всей рамке. Запишем сопротивление излучения петли:

$$R_S = \frac{|C_{Sm}^2 N_S|}{2I_m^2} = \frac{1}{2} \frac{|\omega S \mu_a \vec{n} \vec{H}_S^0|^2}{|N_S|} = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{|\Phi_{MS}|^2}{|N_S|},$$

где  $\Phi_{MS}$  - магнитный поток  $S$ -моды через рамку. Полное сопротивление излучения (двустороннее)  $R_{\Sigma S} = 2R_S = \frac{\omega^2 |\Phi_{MS}|^2}{|N_S|}$ . Поскольку поворот петли (изменение направления  $\vec{n}$ ) меняет  $\Phi_{MS}$ , сопротивление излучения  $R_{\Sigma S}$  тоже меняется. Иначе говоря, связь источника с  $S$ -й модой можно менять поворотом плоскости петли.

3. Узкая щель в стенке волновода.

Пусть щель имеет длину  $L$ . Тогда, если введен линейный магнитный ток  $\dot{I}^m = \vec{\ell}_0 I_m^m \varphi(\ell)$ , амплитуда возбуждаемых волн может быть записана как

$$\dot{C}_{\mp S} = -\frac{1}{N_S} \frac{1}{L} I_m^m \int_0^L \vec{\ell}_0 \vec{H}_S^0 e^{\mp j h_s Z} \varphi(\ell) d\ell.$$

4. Окно.

Конфигурация окна в стенке волновода изображена на [рис.7.5](#).

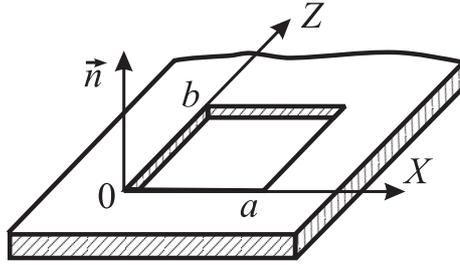


Рис. 7.5.

Вводя фиктивные сторонние поверхностные токи через поля возбуждающего источника на окне  $\dot{\delta}_{cm}^e = [\vec{n}, \dot{H}_{cm}]$ ,  $\dot{\delta}_{cm}^m = -[\vec{n}, \dot{E}_{cm}]$ , получаем

$$\dot{C}_{\pm S} = \frac{1}{N_S} \int_0^a \int_0^b \left( [\vec{n}, \dot{H}_{cm}] \vec{E}_S^0 e^{\mp j h_s Z} + [\vec{n}, \dot{E}_{cm}] \vec{H}_S^0 e^{\mp j h_s Z} \right) dz dx.$$

Здесь  $\vec{E}_{cm}, \vec{H}_{cm}$  - поля источника в плоскости окна.

5. Возбуждение регулярной замедляющей системы электронным потоком.

Пусть сгруппированный электронный поток приходит по оси замедляющей системы  $Z$ . Первая гармоника тока в пучке может быть задана как

$\vec{\delta}_e = \vec{Z}_0 \delta_e(z, q_1, q_2) e^{j(\omega t - h_e Z)}$ ,  $h_e = \frac{\omega}{V_0}$ ,  $V_0$  - средняя скорость электронов. Тогда, используя уравнение возбуждения [\(7.22\)](#), получаем

$$\frac{d\dot{C}_S}{dz} = \frac{e^{j\omega t}}{N_S} \int_{S_{\perp}} \delta_e(z, q_1, q_2) E_{ZS}^0(q_1, q_2) e^{j(h_s - h_e)Z} dS_{\perp}$$

Полагая  $\dot{C}_S = \dot{A}_S e^{j\omega t}$  для тонкого пучка, когда его расслоением можно пренебречь, получаем

$$\frac{d\dot{A}_S}{dz} = \frac{j \vec{\ell}_0 \vec{E}_{SZ}^0 e^{j(h_s - h_e)Z}}{N_S}$$

Здесь  $J_\ell$  - первая гармоника тока пучка,  $\bar{E}_{SZ}^0$  - усредненная по сечению пучка  $Z$  - составляющая электрической напряженности волны  $S$ -го типа замедляющей системы.

## ГЛАВА VIII

### \* НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ

#### 8.1. Неортогональные координатные системы

Пусть в заданной области  $V(S)$  введены обобщенные криволинейные координаты  $u^1, u^2, u^3$ , так, что любая точка  $P \in V$  определяется однозначно набором значений  $u^1, u^2, u^3$ . В точке  $P$  определены три координатные поверхности:

$$u^1 = const, \quad u^2 = const, \quad u^3 = const. \quad (8.1)$$

Пересечение двух поверхностей образует координатную кривую, вдоль которой меняется только одна координата.

Положение точки  $P$  определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала отсчета. Как и точка  $P$ ,  $\vec{r}$  является функцией криволинейных координат

$u^1, u^2, u^3$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2, u^3). \quad (8.2)$$

Приращение вектора  $\vec{r}$  в соответствии с (2) определяется как

$$d\vec{r}(p) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3} du^3. \quad (8.3)$$

Частные производные  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$  представляют собой приращение  $\vec{r}$  вдоль касательных к координатным кривым в точке  $P$

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}, \quad \vec{a}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3}. \quad (8.4)$$

Длина и размерность координатных векторов зависят от характера криволинейных координат  $u^1, u^2, u^3$ . Смешанные произведения базисных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  дают объем  $V$  координатного параллелепипеда:

$$V = \vec{a}_1[\vec{a}_2, \vec{a}_3] = \vec{a}_2[\vec{a}_3, \vec{a}_1] = \vec{a}_3[\vec{a}_1, \vec{a}_2].$$

Взаимную систему векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  определим как

$$\vec{a}^1 = \frac{1}{V}[\vec{a}_2, \vec{a}_3], \quad \vec{a}^2 = \frac{1}{V}[\vec{a}_3, \vec{a}_1], \quad \vec{a}^3 = \frac{1}{V}[\vec{a}_1, \vec{a}_2]. \quad (8.5)$$

В соответствии с (8.5)  $\vec{a}^1$  перпендикулярен плоскости, определяемой парой  $(\vec{a}_2, \vec{a}_3)$ ,  $\vec{a}^2 - (\vec{a}_3, \vec{a}_1)$ ,  $\vec{a}^3 - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ . Из определения (8.5) следует:

$$\vec{a}^i \vec{a}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (8.6)$$

Основная система векторов выражается через взаимную аналогично (8.5):

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{V}[\vec{a}^2, \vec{a}^3], \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{V}[\vec{a}^3, \vec{a}^1], \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{V}[\vec{a}^1, \vec{a}^2]. \quad (8.7)$$

Дифференциал  $d\vec{r}$  во взаимной системе записывается через приращения  $du_1, du_2, du_3$  в направлении взаимных векторов:

$$d\vec{r} = \vec{a}^1 du_1 + \vec{a}^2 du_2 + \vec{a}^3 du_3. \quad (8.8)$$

Дифференциалы  $du_1, du_2, du_3$  могут быть не полными в неортогональных системах. Приравнявая (8.3) (с учетом (8.4) и (8.8)), имеем

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \vec{a}_i du^i = \sum_{j=1}^3 \vec{a}^j du_j. \quad (8.9)$$

Используя (8.6) и умножая (8.9) скалярно на  $\vec{a}^i$  и затем на  $\vec{a}_j$ , получим

$$du_j = \sum_{i=1}^3 \vec{a}_j \vec{a}_i du^i; \quad du^i = \sum_{j=1}^3 \vec{a}^i \vec{a}^j du_j. \quad (8.10)$$

Обозначим скалярные произведения основных и взаимных векторов, входящие в (8.10):

$$g_{ij} = \vec{a}_i \vec{a}_j = g_{ji}, \quad g^{ij} = \vec{a}^i \vec{a}^j = g^{ji}. \quad (8.11)$$

Тогда компоненты  $d\vec{r}$  в основной и взаимной базисных системах будут связаны следующим образом:

$$du_j = \sum_{i=1}^3 g_{ji} du^i; \quad du^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} du_j. \quad (8.12)$$

Любой вектор  $\vec{F}$ , как и  $d\vec{r}$ , может быть разложен на компоненты как в основной, так и во взаимной базисных системах:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 f^i \vec{a}_i = \sum_{j=1}^3 f_j \vec{a}^j, \quad (8.13)$$

где  $f^i = \vec{F} \vec{a}^i$ ,  $f_j = \vec{F} \vec{a}_j$ .

Последнее поясним:

$$\vec{F} \vec{a}^i = \sum_{j=1}^3 f_j \vec{a}_j \vec{a}^i = (\text{с учетом (6)}) = f^i,$$

$$\vec{F} \vec{a}_j = \sum_{i=1}^3 f^i \vec{a}^i \vec{a}_j = f_j. \quad (8.14)$$

Аналогично (8.10) связи  $f_j$  и  $f^i$  выражаются в виде:

$$f_j = \sum_{i=1}^3 q_{ji} f^i, \quad f^i = \sum_{j=1}^3 q^{ij} f_j. \quad (8.15)$$

Итак, можно записать

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 (\vec{F} \vec{a}^i) \vec{a}_i = \sum_{j=1}^3 (\vec{F} \vec{a}_j) \vec{a}^j. \quad (8.16)$$

Проекции  $f_i$  называются ковариантными компонентами вектора  $\vec{F}$ ,  $f^i$  - контравариантными.

Введем безразмерные единичные векторы  $\vec{I}_i$ :

$$\vec{I}_i = \frac{\vec{a}_i}{\sqrt{\vec{a}_i \vec{a}_i}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ij}}} \vec{a}_i. \quad (8.17)$$

Тогда

$$\vec{F} = F_1 \vec{I}_1 + F_2 \vec{I}_2 + F_3 \vec{I}_3, \quad (8.18)$$

где  $F_i = \sqrt{g_{ii}} f^i$  - физические компоненты вектора  $\vec{F}$ , имеющие ту же размерность, что и сам вектор  $\vec{F}$ .

## 8.2. Дифференциальные операторы

Приведем без доказательства формулы основных дифференциальных операторов электродинамики.

Градиент скалярной функции  $\varphi(u^1, u^2, u^3)$  в т. Р

$$\text{grad} \varphi = \sum_{i=1}^3 \vec{a}^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}. \quad (8.19)$$

Здесь градиент записан с использованием взаимной системы базисных векторов. Естественно,  $\vec{a}^i$  могут быть выражены через  $\vec{a}_i$  путем преобразования

$$\vec{a}^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \vec{a}_j. \quad (8.20)$$

Дивергенция векторной функции  $\vec{F}(u^1, u^2, u^3)$  в точке Р

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (f^i \sqrt{g}). \quad (8.21)$$

Здесь  $f^i$  - контравариантные проекции  $\vec{F}$ ,  $f^i = \vec{F} \vec{a}^i$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \sqrt{g} = \vec{a}_1 [ \vec{a}_2, \vec{a}_3 ] = V.$$

Ротор вектора  $\vec{F}$ ,

$$\text{rot} \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left( \frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} \right) \vec{a}_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1} \right) \vec{a}_2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} \right) \vec{a}_3 \right\}. \quad (8.22)$$

Здесь  $f_i = \vec{F} \vec{a}_i$  - ковариантные проекции  $\vec{F}$ .

Оператор Лапласа от скалярной функции  $\varphi(u^1, u^2, u^3)$

$$\Delta\varphi = \operatorname{divgrad}\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}).$$

(8.23)

### 8.3. Продольно-азимутально нерегулярный волновод. Контравариантные компоненты уравнений Максвелла

Рассмотрим произвольно нерегулярный прямолинейный волновод (продольно-азимутально нерегулярный волновод). Пусть внутренняя граница такого волновода задается следующей произвольной гладкой функцией:

$$b = b(\varphi, z),$$

(8.24)

где  $\rho = r/b$ .

Тогда радиус-вектор внутренней точки P (8.2) может быть задан как

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = z\vec{z}_0 + \rho b \{ \vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi \}.$$

(8.25)

В соответствии с (8.4) тогда имеем

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = b\vec{r}_0, \\ \vec{a}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{\varphi}_0 \rho b + \vec{r}_0 \rho \frac{\partial b}{\partial \varphi}, \\ \vec{a}_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{z}_0 + \vec{r}_0 \rho \frac{\partial b}{\partial z}. \end{aligned}$$

(8.26)

Соответственно  $V = \vec{a}_1[\vec{a}_2, \vec{a}_3] = \vec{a}_2[\vec{a}_3, \vec{a}_1] = \vec{a}_3[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = b^2 \rho$ . Тогда в соответствии с (8.5) система взаимных векторов имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{a}^1 &= \frac{1}{b^2} (\vec{r}_0 b - \vec{\varphi}_0 \frac{\partial b}{\partial \varphi} - \vec{z}_0 \rho b \frac{\partial b}{\partial z}), \\ \vec{a}^2 &= \vec{\varphi}_0 / b \rho, \quad \vec{a}^3 = \vec{z}_0. \end{aligned}$$

(8.27)

Запишем первое уравнение Максвелла, используя основную (8.26) и взаимную (8.27) системы векторов. При этом для сохранения привычных выражений для компонент  $\operatorname{rot}\vec{H}$  в цилиндрической системе координат введем «расчетные» (со штрихом) компоненты векторов  $\vec{H} = H'_\rho \vec{a}^1 + \rho H'_\varphi \vec{a}^2 + H'_z \vec{a}^3$

(т.е. ковариантные проекции векторов связаны с расчетными как  $H_2 = \vec{H}\vec{a}_2 = \rho H'_\varphi$ ,  $H'_\rho = H_1$ ,  $H'_z = H_3$ ),  $\vec{E} = E'_\rho \vec{a}^1 + \rho E'_\varphi \vec{a}^2 + E'_z \vec{a}^3$  и т.д..

Тогда

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \frac{\rho}{\sqrt{g}} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H'_\varphi}{\partial z} \right) \vec{a}_1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H'_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial \rho} \right) \vec{a}_2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H'_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{a}_3 \right\} = \\ &= \varepsilon_a \left\{ \frac{\partial E'_\rho}{\partial t} \vec{a}^1 + \frac{\partial(\rho E'_\varphi)}{\partial t} \vec{a}^2 + \frac{\partial E'_z}{\partial t} \vec{a}^3 \right\} + \delta'_\rho \vec{a}^1 + \rho \delta'_\varphi \vec{a}^2 + \delta'_z \vec{a}^3. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Умножая обе части (8.28) скалярно последовательно на взаимные векторы  $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3$ , получаем контравариантные проекции уравнений Максвелла в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H'_\varphi}{\partial z} &= \frac{\sqrt{g}}{\rho} \left\{ \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (g^{11} E'_\rho + g^{12} \rho E'_\varphi + g^{13} E'_z) + g^{11} \delta'_\rho + g^{12} \rho \delta'_\varphi + g^{13} \delta'_z \right\} \\ \frac{\partial H'_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial \rho} &= \sqrt{g} \left\{ \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (g^{21} E'_\rho + g^{22} \rho E'_\varphi + g^{23} E'_z) + g^{21} \delta'_\rho + g^{22} \rho \delta'_\varphi + g^{23} \delta'_z \right\}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H'_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H'_\rho}{\partial \varphi} &= \frac{\sqrt{g}}{\rho} \left\{ \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (g^{31} E'_\rho + g^{32} \rho E'_\varphi + g^{33} E'_z) + \right. \\ &\left. + g^{31} \delta'_\rho + g^{32} \rho \delta'_\varphi + g^{33} \delta'_z \right\}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

В векторной форме уравнение (8.29) можно теперь записать в виде

$$\text{rot}\vec{H}' = \varepsilon_a \hat{g} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \hat{g} \vec{\delta}', \quad (8.30)$$

где

$$\hat{g} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \frac{g^{11}}{\rho} & g^{12} & \frac{g^{13}}{\rho} \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ \frac{g^{31}}{\rho} & g^{32} & \frac{g^{33}}{\rho} \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{g} = V = b^2 \rho, \quad g^{11} = \frac{1}{b^4} \left( b^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right)^2 + \rho^2 b^2 \left( \frac{\partial b}{\partial z} \right)^2 \right),$$

$$g^{22} = 1/(b\rho)^2, \quad g^{33} = 1, \quad g^{12} = -\frac{1}{b^3\rho} \frac{\partial b}{\partial \varphi} = g^{21},$$

$$g^{13} = -\frac{\rho}{b} \frac{\partial b}{\partial z} = g^{31}, \quad g^{23} = g^{32} = 0.$$

Аналогичные преобразования приводят к следующей форме второго уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \vec{E}' = -\mu_a \hat{g} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} - \hat{g} \vec{\delta}'^m. \quad (8.31)$$

С учетом формул (8.17), (8.18) физические компоненты векторов  $\vec{H}, \vec{E}, \vec{\delta}, \vec{\delta}'^m$  могут быть записаны как (выпишем только  $\vec{H}$ , остальные записи идентичны)

$$H_\tau = H'_\rho / b,$$

$$H_\varphi = H'_\varphi / b - \frac{H'_\rho}{b^2} \frac{\partial b}{\partial \varphi}, \quad (8.32)$$

$$H_z = H'_z - H'_\rho \frac{\rho}{b} \frac{\partial b}{\partial z}.$$

В новой системе координат  $\rho, \varphi, z$  внутренняя граница произвольно-нерегулярного волновода  $b(\varphi, z)$  преобразуется в границу регулярного цилиндра с внутренней границей  $\rho=1$ . Таким образом, граничные условия для уравнений (8.30), (8.31) в новой системе координат в случае идеальной проводимости стенок приобретают простейший вид:

$$[\vec{\rho}_0, \vec{E}'] \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (8.33)$$

#### 8.4. Уравнение возбуждения произвольно-нерегулярного волновода сторонними токами

Прежде чем переходить к решению (8.30), (8.31), (8.33) целесообразно для улучшения его сходимости выделить в (8.30), (8.31) электростатическую часть поля, содержащую разрыв первой производной  $\vec{E}'$  и магнитостатическую, содержащую разрыв  $\vec{H}'$ .

При этом динамическая задача имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \varepsilon_0 \vec{g} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \vec{g} \vec{\delta}_1, \operatorname{rot} \vec{E}_1 = -\mu_0 \vec{g} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} - \vec{g} \vec{\delta}_1^M, \quad (8.34)$$

$$\left[ \vec{n}', \vec{E}_1 \right] \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (8.35)$$

$$\text{Здесь } \vec{\delta}_1 = \vec{\delta}' - \varepsilon_0 \operatorname{grad}(\partial \Phi'_e / \partial t), \quad \vec{E}_1 = \vec{E}' + \operatorname{grad} \Phi'_e.$$

$$\vec{\delta}_1^M = \vec{\delta}'^M - \mu_0 \operatorname{grad}(\partial \Phi'_M / \partial t), \quad \vec{H}_1 = \vec{H}' + \operatorname{grad} \Phi'_M.$$

Существенно, что  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  - непрерывные на границе источников векторы. Остановимся на решении задачи (8.34), (8.35). Представим:

$$\vec{E}_{1t} = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\vec{E}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \vec{E}_{1z} = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\vec{E}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\text{где } \dot{\vec{E}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^e(z) \vec{e}_{ni}^e + \dot{A}_{mni}^M(z) \vec{e}_{ni}^M \right), \quad \dot{\vec{E}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni}(z) \varphi_{ni} \vec{a}^3.$$

$$\vec{H}_{1t} = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\vec{H}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \vec{H}_{1z} = \operatorname{Re} \sum_m \dot{\vec{H}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\dot{\vec{H}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{B}_{mni}^e(z) \vec{h}_{ni}^e + \dot{B}_{mni}^M(z) \vec{h}_{ni}^M \right), \quad \dot{\vec{H}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{H}_{mni}(z) \psi_{ni} \vec{a}^3.$$

$$\text{Здесь } \varphi_{ni} = J_n(v_{ni}\rho) e^{jn\varphi}, \quad \psi_{ni} = J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi},$$

$$\vec{e}_{ni}^e = \vec{\rho}_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \vec{\varphi}_0 j \frac{n}{\rho} J_n(v_{ni}\rho) e^{jn\varphi},$$

$$\vec{e}_{ni}^M = \vec{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} - \vec{\varphi}_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi},$$

$$\vec{h}_{ni}^e = -\vec{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(v_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \vec{\varphi}_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho) e^{jn\varphi},$$

$$\vec{h}_{ni}^M = \vec{\rho}_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \vec{\varphi}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi}, \quad J_n(v_{ni}) = 0, \quad J'_n(\mu_{ni}) = 0.$$

$$\text{АМПЛИТУДЫ } \dot{A}_{mni}^e(z), \dot{A}_{mni}^M(z), \dot{B}_{mni}^e(z), \dot{B}_{mni}^M(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{mni}(z)$$

определим из следующих проекционных равенств, эквивалентных [\(8.34\)](#):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( \vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm} \right) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g} \left( \vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm} \right) \right\} \vec{e}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \quad (8.36) \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( \vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm} \right) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g} \left( \vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm} \right) \right\} \vec{e}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \quad (8.37) \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( \vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm} \right) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g} \left( \vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm} \right) \right\} \varphi_{-ni} \vec{a}^3 \rho d\rho d\varphi = \quad (8.38) \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{a}^3 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( \vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm} \right) + jm\omega\mu_0 \hat{g} \left( \vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm} \right) \right\} \vec{h}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \quad (8.39) \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \vec{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( \vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm} \right) + jm\omega\mu_0 \hat{g} \left( \vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm} \right) \right\} \vec{h}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \quad (8.40) \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \vec{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( \vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm} \right) + jm\omega\mu_0 \hat{g} \left( \vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm} \right) \right\} \psi_{-ni} \vec{a}^3 \rho d\rho d\varphi = 0 \quad (8.41) \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \vec{a}^3 \psi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega. \end{aligned}$$

Правые части уравнений возбуждения [\(8.36\)-\(8.41\)](#) (интегралы возбуждения) записаны в общем случае, когда координаты источников могут меняться во времени, т.е.  $\rho=\rho(t)$ ,  $\varphi=\varphi(t)$ ,  $z=z(t)$ . Причем, эти зависимости могут содержать и негармонические составляющие.

Уравнения (8.36)-(8.41) образуют полную систему ОДУ первого порядка, определяющую искомые коэффициенты разложения

$$\dot{A}_{mni}^e(z), \dot{A}_{mni}^M(z), \dot{B}_{mni}^e(z), \dot{B}_{mni}^M(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{mni}(z).$$

Иначе говоря, уравнения (8.36)-(8.41) представляют собой систему уравнений возбуждения динамических полей волновода произвольной нерегулярной конфигурации, возбуждаемого негармоническими электрическими и магнитными токами источников.

### 8.5. Самосогласованные нелинейные уравнения лампы бегущей волны О - типа с замедляющей системой в виде продольно-нерегулярного волновода

Введем в решение общей задачи возбуждения нерегулярного волновода следующие условия и упрощения.

1. Поскольку в ЛБВ-0 имеются только электрические источники, плотность магнитного тока  $\vec{\delta}^\mu = 0$ .

2. В релятивистских ЛБВ-0 используются продольно-нерегулярные волноводы, поэтому радиус волновода  $b=b(z)$ .

3. Система источников осесимметрична и азимутальная составляющая  $\delta_\varphi = 0$ . Поэтому плотность электрического тока  $\vec{\delta} = \vec{r}_0 \delta_r(r, z) + \vec{z}_0 \delta_z(r, z)$ . Несимметричные типы волн не возбуждаются.

4. Из-за отсутствия  $\delta_\varphi$  и благодаря тому, что волны  $E_{0i}$  и  $H_{0i}$  не связаны, волны  $H_{0i}$  не возбуждаются.

5. Будем считать, что  $b(z)$  не приближается к критическому для  $E_{02}$ . Поэтому возбуждение высших  $E_{0i}$  ( $i \geq 2$ ) волн можно не рассматривать.

6. Остановимся на кинематическом (т.е. без учета пространственного заряда) приближении (что в определенной степени по уровню точности соответствует приближению п.5).

7. Будем рассматривать гармонический режим, т.е.  $m=l$ .

С учетом перечисленных условий искомые решения для компонент поля можно записать в виде:

$$\dot{H}'_\varphi = \dot{B}(z)J_1(v_{01}\rho), \dot{E}'_z = \dot{C}J_0(v_{01}\rho), \dot{E}'_\rho = \dot{A}jJ_1(v_{01}\rho).$$

Соответственно система уравнений возбуждения, полученная в п.8.4, приводится к следующей:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{d\dot{B}}{dz} J_1(v_{01}\rho) + j \frac{k}{W^0} \left( (1 + \rho^2 \left( \frac{db}{dz} \right)^2) \cdot j \dot{A} J_1(v_{01}\rho) - \right. \right. \quad (8.42)$$

$$\left. \left. - \rho b \frac{db}{dz} J_0(v_{01}\rho) \right\} J_1(v_{01}\rho) \rho d\rho d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( (1 + \rho^2 \left( \frac{db}{dz} \right)^2) \dot{\delta}'_\rho - \rho b \frac{db}{dz} \dot{\delta}'_z \right) \cdot$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\rho} \dot{B} J_1(v_{01}\rho) + \dot{B} v_{01} J_1'(v_{01}\rho) - j \frac{k}{W^0} (-b\rho \frac{db}{dz} \dot{A} J_1(v_{01}\rho) + \right. \quad (8.43)$$

$$+ C b^2 J_0(v_{01}\rho) \} J_0(v_{01}\rho) \rho d\rho d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-b\rho \frac{db}{dz} \dot{\delta}'_\rho + b^2 \dot{\delta}'_z) \cdot$$

$$\cdot J_0(v_{01}\rho) \rho d\rho d\varphi e^{-j\omega t} d\omega t = 0,$$

$$\vec{\delta}'_\rho = b \dot{\delta}'_r, \dot{\delta}'_z = \dot{\delta}'_z + \rho \frac{db}{dz} \dot{\delta}'_r,$$

$$\dot{C} = -\frac{j}{v_{01}} \left[ \frac{d\dot{A}}{dz} + kW^0 \dot{B} \right]. \quad (8.44)$$

Используем далее закон сохранения заряда и метод крупных частиц. Введем также следующие безразмерные переменные:

$$T = kz = \frac{\omega}{c} z; B = kb; \beta_i = v_i / c, \dot{E} = \frac{\dot{C} \eta_0}{\omega c};$$

$$\dot{H} = \frac{\dot{B} W^0 k \eta_0}{\omega c}; \dot{E}_1 = \frac{\dot{A} k \eta_0}{\omega c}; \eta_0 = (e / m_0, e, m_0 - \text{соответственно заряд и мас-}$$

са покоя электрона:  $R_i = \sqrt{1 - \beta_i^2}$ ;  $r_i = r_i' k$ ,  $r_i'$  - размерный радиус частицы,  $B_0 = kb_0$ ,  $b_0$  - радиус входной, регулярной секции волновода:

$$G_0 = \frac{v_{01} |I_0| W^0}{I_1 \pi B_0^2} \cdot 1,965 \cdot 10^{-6}, \quad |I_0| - \text{ток пучка по модулю в А,}$$

$$I_1 = \int_0^1 J_1^2(v_{01}\rho) \rho d\rho = 0,134757, I_2 = \int_0^1 J_1^2(v_{01}\rho) \rho^3 d\rho = 0,75953 .$$

Тогда уравнения возбуждения (8.42)-(8.44) в пренебрежении толщиной трубки электронного пучка принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{H}}{dT} &= \dot{E}_1 \left( 1 + \left( \frac{dB}{dT} \right)^2 \left( \frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{v_{01}^2} \right) \right) + \dot{H} \frac{1}{B} \frac{dB}{dT} + \\ &+ \frac{1}{B} \frac{dB}{dT} G_0 B_0^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{v_{01}^2} J_0 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) - \frac{1}{v_{01}} \frac{r_i}{B} J_1 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) \right) e^{-j\omega t_i} + \\ &+ \frac{B_0^2}{B} \frac{G_0}{N v_{01}} \sum_{i=1}^N J_i \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) \frac{\beta_{ri}}{\beta_{zi}} e^{-j\omega t_i}; \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$\dot{E} = \dot{H} \frac{v_{01}}{jB^2} - \dot{E}_1 \frac{1}{jB} \frac{dB}{dT} \frac{1}{v_{01}} + \frac{1}{jv_{01}} G_0 \frac{B_0^2}{B^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_0 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) e^{-j\omega t_i} ; \quad (8.46)$$

$$\frac{d\dot{E}_1}{dT} = -\dot{E}_1 \frac{1}{B} \frac{dB}{dT} + \left( \frac{v_{01}^2}{B^2} - 1 \right) \dot{H} + G_0 \frac{B_0^2}{B^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_0 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) e^{-j\omega t_i} . \quad (8.47)$$

Соответственно уравнения движения  $i$ -й частицы имеют вид

$$\frac{d\beta_{zi}}{dT} = -\frac{R_i}{\beta_{zi}} \operatorname{Re} \left[ \left( \dot{E}' - \frac{r_i}{B^2} \frac{dB}{dT} \dot{E}'_1 \right) (1 - \beta_{zi}^2) - \dot{E}'_1 \frac{\beta_{ri} \beta_{zi}}{B} + \dot{H}' \frac{\beta_{ri}}{B} \right] e^{j\omega t_i} , \quad (8.48)$$

$$\frac{d\beta_{ri}}{dT} = -\frac{R_i}{\beta_{zi}} \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\dot{E}'_1}{B} (1 - \beta_{ri}^2) - \left( \dot{E}' - \frac{r_i}{B^2} \frac{dB}{dT} \dot{E}'_1 \right) \beta_{ri} \beta_{zi} - \dot{H}' \frac{\beta_{zi}}{B} \right) e^{j\omega t_i} - FR_i \beta_{\phi_i} \right] ,$$

$$\frac{dr_i}{dT} = \beta_{ri} / \beta_{zi} , \quad \frac{d\omega t_i}{dT} = 1 / \beta_{zi} , \quad \dot{E}' = \dot{E} J_0 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) , \quad \dot{E}'_1 = \dot{E}_1 J_1 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) ,$$

$$\dot{H}' = \dot{H} J_1 \left( v_{01} \frac{r_i}{B} \right) .$$

$$\text{Здесь } \beta_{\phi_i} = F \omega R_i \frac{(r_i^2 - r_0^2)}{r_i} , \quad R_i = \sqrt{1 - \beta_{\phi_i}^2 - \beta_{ri}^2 - \beta_{zi}^2} ,$$

$F = eB^0 / m_0 \omega = \frac{\Omega_0}{\omega}$ ,  $\Omega_0$  - нулевая циклотронная частота электронов в фокусирующем магнитном поле  $\vec{B}^0 = \vec{z}_0 B^0$ .

Система уравнений (8.45)-(8.48) формулирует нелинейные самосогласованные уравнения ЛБВ-0 с произвольным квазигладким (точки разрыва производных достаточно обходить при интегрировании системы) нерегулярным волноводом в одномерном кинематическом приближении.

Начальные условия к этой системе могут быть заданы следующим образом:

$$\beta_{zi}(0) = \beta_0 , \beta_{ri}(0) = 0 , r_i(0) = r_0 , \omega t_i(0) = 2\pi i / N , \frac{dB}{dT} = 0 , \dot{E}(0) = E_0 ,$$

$$\dot{H}(0) = E_0 \frac{jB_0^2}{v_{01}} , \quad E_1(0) = E_0 \frac{B_0^2}{v_{01}} \sqrt{1 - (v_{01} / B_0)^2} .$$

Электронный КПД ( $\eta_e$ ) рассчитывается как

$$\eta_e(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1 - R_0 / R_i(T)}{1 - R_0} , \quad R_0 = \sqrt{1 - \beta_0^2} .$$

Волновой КПД ( $\eta_B$ ) определяется через поток энергии, образуемый попутной компонентой поля через текущее поперечное сечение волновода и выражается как

$$\eta_B(T) = \frac{\nu_{01} \operatorname{Re} \left( j \left( \dot{E}_1(T) \dot{H}^*(T) - \dot{E}_1(0) \dot{H}^*(0) \right) \right) R_0}{G_0 B_0^2 (1 - R_0)}.$$

Сопоставление  $\eta_e, \eta_B$  в отсутствие потерь позволяет оценить точность численных расчетов.

### 8.6. Уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного коаксиального волновода

В разделе [8.4](#) сформулированы уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного полого волновода (односвязная область поперечного сечения). Большой интерес, однако, представляют коаксиальные волноводы, особенно в области миллиметровых и субмиллиметровых волн, где на их основе создаются приборы и устройства, обладающие уникальными характеристиками. Последнее связано с аномальной дисперсией волн  $H_{ni}$  ( $n \gg 1$ ), позволяющей в нерегулярных коаксиальных волноводах эффективно осуществить селекцию паразитных колебаний и волн в полосе порядка октавы, что открывает путь к созданию сверхразмерных одномодовых коаксиальных структур с рабочей волной  $H_{ni}$ .

Строгой теории нерегулярных коаксиальных структур, однако, не существует; оценки свойств таких структур строятся на базе теории регулярной коаксиальной линии (например, дисперсионного уравнения для такой линии). Двусвязность области поперечного сечения коаксиальной структуры (наличие двух границ в отличие от нерегулярного полого волновода) требует при использовании наиболее естественного для рассматриваемой задачи метода преобразования координат введения новой функции отображения. В данном разделе определена такая функция и на ее основе сформулирована строгая теория произвольно (по  $z$  и  $\varphi$ ) нерегулярной коаксиальной структуры, включая общий случай, когда в ней действуют сторонние негармонические источники.

Рассмотрим произвольно (по  $z$  и  $\varphi$ ) нерегулярный коаксиальный волновод ( $r, \varphi, z$  - компоненты исходной цилиндрической системы координат). Поверхности внутреннего и внешнего проводников  $S_1, S_2$  задаются соответственно как  $b_1(\varphi, z)$  и  $b_2(\varphi, z)$ . Задача состоит в определении поля, возбуждаемого в волноводе источниками, заданными плотностью стороннего электрического тока  $\vec{\delta} = \vec{r}_0 \delta_r(r, \varphi, z, t) + \vec{\varphi}_0 \delta_\varphi(r, \varphi, z, t) + \vec{z}_0 \delta_z(r, \varphi, z, t)$  и плотностью стороннего магнитного тока  $\vec{\delta}^M = \vec{r}_0 \delta_r^M(r, \varphi, z, t) + \vec{\varphi}_0 \delta_\varphi^M(r, \varphi, z, t) + \vec{z}_0 \delta_z^M(r, \varphi, z, t)$ . Искомое поле должно

удовлетворять граничному условию на  $S_1, S_2$  (потери в стенках пренебрегаем,  $\sigma \rightarrow \infty$ ; изломы  $S_1, S_2$  отсутствуют):

$$\left[ \vec{n}_{1,2}, \vec{E} \right]_{S_{1,2}} = 0, \quad (8.49)$$

$\vec{n}_{1,2}$  - внешняя нормаль к  $S_1$  или  $S_2$ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом преобразования координат, позволяющим преобразовать граничную задачу (8.49) к элементарной. Введем следующую функцию преобразования:

$$\rho = (r + b - b_1) / b, \quad (8.50)$$

$$b = (b_2 - b_1) / (\alpha - 1), \quad \alpha = b_2(0) / b_1(0).$$

При этом  $\rho \in [1, \alpha]$  и в новых переменных внутренняя граница волновода регулярна:  $\rho|_{r=b_1} = 1, \rho|_{r=b_2} = \alpha$ . Учитывая обратное преобразование  $r = \rho b - b + b_1$ , для радиуса-вектора точки во внутренней области волновода в новой системе координат  $\rho, \varphi, z$  имеем

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \vec{z}_0 z + (\vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi)(\rho b - b + b_1). \quad (8.51)$$

Определим основную систему векторов косоугольной системы  $\rho, \varphi, z$ :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = b(\vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi) = b \vec{r}_0,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = [(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}] \vec{r}_0 + (\rho b - b + b_1) \vec{\varphi}_0,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{z}_0 + [(\rho - 1) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}] \vec{r}_0.$$

Взаимная система векторов  $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3$  определяется следующим образом:

$$\vec{a}^1 = \frac{[\vec{a}_2, \vec{a}_3]}{V}, \quad \vec{a}^2 = \frac{[\vec{a}_3, \vec{a}_1]}{V}, \quad \vec{a}^3 = \frac{[\vec{a}_1, \vec{a}_2]}{V},$$

$$V = \vec{a}_1[\vec{a}_2, \vec{a}_3] = \vec{a}_2[\vec{a}_3, \vec{a}_1] = \vec{a}_3[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = b(\rho b - b + b_1).$$

Производя указанные действия, имеем

$$\vec{a}^1 = \frac{1}{b}\vec{r}_0 - \frac{(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial\varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial\varphi}}{b(\rho b - b + b_1)}\vec{\varphi}_0 - \frac{1}{b}\left[(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}\right]\vec{z}_0,$$

$$\vec{a}^2 = \frac{1}{\rho b - b + b_1}\vec{\varphi}_0,$$

$$\vec{a}^3 = \vec{z}_0.$$

Найдем теперь элементы метрического тензора

$$g^{11} = \vec{a}^1\vec{a}^1 = \frac{1}{b^2} + \left[\frac{(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial\varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial\varphi}}{b(\rho b - b + b_1)}\right]^2 + \frac{1}{b^2}\left[(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}\right]^2,$$

$$g^{22} = \vec{a}^2\vec{a}^2 = 1/(\rho b - b + b_1)^2,$$

$$g^{33} = \vec{a}^3\vec{a}^3 = 1,$$

$$g^{12} = \vec{a}^1\vec{a}^2 = -\frac{1}{b}\frac{(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial\varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial\varphi}}{(\rho b - b + b_1)^2} = g^{21},$$

$$g^{13} = \vec{a}^1\vec{a}^3 = -\frac{1}{b}\left[(\rho-1)\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}\right] = g^{31},$$

$$g^{23} = \vec{a}^2\vec{a}^3 = g^{32} = 0.$$

Воспользуемся теперь определением оператора *rot* в косоугольной системе  $\rho, \varphi, z$ :

$$rot\vec{F} = \frac{1}{V}\left\{\left(\frac{\partial f_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{a}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial\rho}\right)\vec{a}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial\rho} - \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\right)\vec{a}_3\right\},$$

$f_1 = (\vec{F}\vec{a}_1)$ ,  $f_2 = (\vec{F}\vec{a}_2)$ ,  $f_3 = (\vec{F}\vec{a}_3)$  - ковариантные проекции вектора  $\vec{F}$ .

Используем далее свойство основной и взаимной системы векторов

$$\vec{a}_i\vec{a}_j = \delta_{ij}. \quad (8.52)$$

Применим (8.52) и найдем ковариантные компоненты уравнений Максвелла в системе  $\rho, \varphi, z$ . Однако при записи компонент введем вспомога-

тельные векторы  $\vec{E}', \vec{H}', \vec{\delta}', \vec{\delta}'^M$  таким образом, чтобы для них компоненты гот имели формальную запись, тождественную выражению их в ортогональной цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$ . Тогда преобразованные контравариантные компоненты уравнений Максвелла для вспомогательных векторов  $\vec{E}', \vec{H}', \vec{\delta}', \vec{\delta}'^M$  в системе переменных  $\rho, \varphi, z$ , которые рассматриваются теперь как ортогональные, имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}' &= \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \hat{g} \vec{\delta}', \\ \text{rot} \vec{E}' &= -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} - \hat{g} \vec{\delta}'^M. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Здесь  $\hat{g} = V \begin{pmatrix} g^{11} / \rho & g^{12} & g^{13} / \rho \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ g^{31} / \rho & g^{32} & g^{33} / \rho \end{pmatrix}$ ,

$\vec{E}' = \vec{\rho}_0 E'_\rho + \vec{\varphi}_0 E'_\varphi + \vec{z}_0 E'_z$ ,  $E'_\rho = (\vec{E}, \vec{a}^1)$ ,  $E'_\varphi = (\vec{E}, \vec{a}^2) / \rho$ ,  $E'_z = (\vec{E}, \vec{a}^3)$ , остальные векторы  $\vec{H}', \vec{\delta}', \vec{\delta}'^M$  конструируются аналогичным образом. Причем,  $\vec{\rho}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{z}_0$  - тройка ортогональных векторов.

Физические векторы в исходной системе  $r, \varphi, z$  рассчитываются через вспомогательные следующим образом (на примере E):

$$\begin{aligned} E_r &= \sqrt{g_{11}} (g^{11} E'_\rho + g^{12} \rho E'_\varphi + g^{13} E'_z), \\ E_\varphi &= \sqrt{g_{22}} (g^{21} E'_\rho + g^{22} \rho E'_\varphi + g^{23} E'_z), \\ E_z &= \sqrt{g_{33}} (g^{31} E'_\rho + g^{32} \rho E'_\varphi + g^{33} E'_z). \end{aligned}$$

Здесь  $g_{11} = \vec{a}_1 \vec{a}_1 = b^2$ ,  $g_{22} = \vec{a}_2 \vec{a}_2 = [(\rho - l) \frac{\partial b}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi}]^2 + (\rho b - b + b_1)^2$ ,

$$g_{33} = \vec{a}_3 \vec{a}_3 = 1 + [(\rho - l) \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}]^2.$$

В результате проведенных преобразований мы приходим к следующей переформулировке исходной краевой задачи возбуждения волн в произвольно нерегулярном коаксиальном волноводе (8.49): найти решения системы (8.53) в ортогональной системе  $\rho, \varphi, z$  при граничных условиях

$$\begin{aligned} \left[ \vec{n}_1, \vec{E}' \right] \Big|_{\rho=1} &= 0, \quad \left[ \vec{n}_2, \vec{E}' \right] \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \\ \vec{n}_1 &= \vec{r}_0, \quad \vec{n}_2 = -\vec{r}_0. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Прежде чем переходить к решению (8.53), целесообразно для улучшения его сходимости выделить в (8.53) электростатическую часть поля источников, содержащую разрыв первой производной  $\vec{E}'$  и магнитостатическую, содержащую разрыв  $\vec{H}'$ .

При этом динамическая задача имеет вид

$$\text{rot}\vec{H}_1 = \varepsilon_0\vec{g} \frac{\partial\vec{E}_1}{\partial t} + \vec{g}\vec{\delta}_1, \text{rot}\vec{E}_1 = -\mu_0\vec{g} \frac{\partial\vec{H}_1}{\partial t} - \vec{g}\vec{\delta}_1'' , \quad (8.55)$$

$$\left[ \vec{r}_0, \vec{E}_1 \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \left[ \vec{r}_0, \vec{E}_1 \right] \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (8.56)$$

$$\text{Здесь } \vec{\delta}_1 = \vec{\delta}' - \varepsilon_0 \text{grad}(\partial\Phi'_e / \partial t), \quad \vec{E}_1 = \vec{E}' + \text{grad}\Phi'_e.$$

$$\vec{\delta}_1^M = \vec{\delta}'^M - \mu_0 \text{grad}(\partial\Phi'_M / \partial t), \quad \vec{H}_1 = \vec{H}' + \text{grad}\Phi'_M,$$

$\Phi'_e, \Phi'_M$  - соответственно электрический и магнитный скалярные потенциалы источников.

Существенно, что  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  - непрерывные на границе источников векторы и операция почленного дифференцирования представляющих их в решении рядов ( $\text{rot}\vec{E}', \vec{H}'$ ) допустима, поскольку эти ряды сходятся равномерно.

Остановимся на решении задачи (8.55), (8.56), полагая режим установившимся и периодическим. Представим:

$$\vec{E}_{1t} = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{E}}_{tm} e^{jm\omega t}, \vec{E}_{1z} = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{E}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\dot{\vec{E}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^e(z) \vec{e}_{ni}^e + \dot{A}_{mni}^M(z) \vec{e}_{ni}^M \right) + \dot{A}_m^T \vec{e}^T,$$

$$\dot{\vec{E}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni}(z) \varphi_{ni} \vec{a}^3.$$

Здесь и далее индекс «t» обозначает поперечную составляющую соответствующих компонент

$$\vec{H}_{1t} = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{H}}_{tm} e^{jm\omega t}, \vec{H}_{1z} = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{H}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\dot{\vec{H}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left( \dot{B}_{mni}^e(z) \vec{h}_{ni}^e + \dot{B}_{mni}^M(z) \vec{h}_{ni}^M \right) + \dot{B}_m^T(z) \vec{h}^T,$$

$$\dot{\vec{H}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{H}_{mni}(z) \psi_{ni} \vec{z}_0.$$

Здесь  $\varphi_{ni} = F_{ni}^e(\rho) e^{-jn\varphi}$ ,  $\psi_{ni} = F_{ni}^M(\rho) e^{-jn\varphi}$ ,

$$\vec{e}^T = \bar{\rho}_0 I / \rho, \vec{h}^T = \bar{\varphi}_0 I / \rho, \vec{e}_{ni}^e = [\bar{\rho}_0 \bar{F}_{ni}^e(\rho) - j \bar{\varphi}_0 \frac{n}{\chi_{ni}^e} F_{ni}^e(\rho)] e^{-jn\varphi},$$

$$\vec{e}_{ni}^M = -[\bar{\rho}_0 F_{ni}^M(\rho) j \frac{n}{\chi_{ni}^M} + \bar{\varphi}_0 \bar{F}_{ni}^M(\rho)] e^{-jn\varphi}, \vec{h}_{ni}^e = [\bar{\rho}_0 j \frac{n}{\chi_{ni}^e} F_{ni}^e(\rho) + \bar{\varphi}_0 \bar{F}_{ni}^e(\rho)] e^{-jn\varphi},$$

$$\vec{h}_{ni}^M = [\bar{\rho}_0 \bar{F}_{ni}^M(\rho) - \bar{\varphi}_0 j \frac{n}{\chi_{ni}^M} F_{ni}^M(\rho)] e^{-jn\varphi}, F_{ni}^e(\rho) = \frac{J_n(\chi_{ni}^e \rho)}{J_n(\chi_{ni}^e)} - \frac{N_n(\chi_{ni}^e \rho)}{N_n(\chi_{ni}^e)},$$

$$\bar{F}_{ni}^e(\rho) = \frac{J'_n(\chi_{ni}^e \rho)}{J_n(\chi_{ni}^e)} - \frac{N'_n(\chi_{ni}^e \rho)}{N_n(\chi_{ni}^e)}, F_{ni}^M(\rho) = \frac{J_n(\chi_{ni}^M \rho)}{J'_n(\chi_{ni}^M)} - \frac{N_n(\chi_{ni}^M \rho)}{N'_n(\chi_{ni}^M)},$$

$$\bar{F}_{ni}^M(\rho) = \frac{J'_n(\chi_{ni}^M \rho)}{J'_n(\chi_{ni}^M)} - \frac{N'_n(\chi_{ni}^M \rho)}{N'_n(\chi_{ni}^M)}.$$

Собственные числа  $\chi_{ni}^M, \chi_{ni}^e$  определяются следующими дисперсионными уравнениями:

$$\frac{J'_n(\chi_{ni}^M)}{N'_n(\chi_{ni}^M)} = \frac{J'_n(\alpha \chi_{ni}^M)}{N'_n(\alpha \chi_{ni}^M)}, \frac{J_n(\chi_{ni}^e)}{N_n(\chi_{ni}^e)} = \frac{J_n(\alpha \chi_{ni}^e)}{N_n(\alpha \chi_{ni}^e)}.$$

Применяя к решению (8.55), (8.56) проекционную процедуру, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{g}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) \right\} \vec{e}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) - jm\omega \varepsilon_0 \hat{g}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) \right\} \vec{e}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \text{rot}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) \right\} \cdot \varphi_{-ni} \vec{a}^3 \rho d\rho d\varphi = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{a}^3 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega,
\end{aligned} \tag{8.59}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \text{rot}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) \right\} \vec{h}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \vec{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega,
\end{aligned} \tag{8.60}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \text{rot}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) \right\} \vec{h}_{-ni}^M \rho d\rho d\varphi = \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \vec{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega,
\end{aligned} \tag{8.61}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \text{rot}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) \right\} \psi_{-ni} \vec{z}_0 \rho d\rho d\varphi = \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \psi_{-ni} \vec{z}_0 e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi,
\end{aligned} \tag{8.62}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \text{rot}(\dot{\vec{H}}_{tm} + \dot{\vec{H}}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}(\dot{\vec{E}}_{tm} + \dot{\vec{E}}_{zm}) \right\} \vec{\rho}_0 d\rho d\varphi = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1 \vec{\rho}_0 d\rho d\varphi d\omega,
\end{aligned} \tag{8.63}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \text{rot}(\dot{\vec{E}}_{tm} + \dot{\vec{E}}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\dot{\vec{H}}_{tm} + \dot{\vec{H}}_{zm}) \right\} \vec{\varphi}_0 d\rho d\varphi = \\
& = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}_1^M \vec{\varphi}_0 d\rho d\varphi d\omega.
\end{aligned} \tag{8.64}$$

Уравнения (8.57)-(8.64) образуют полную систему ОДУ первого порядка, определяющую комплексные амплитуды связанных волн  $\dot{A}_{mni}^e(z)$ ,  $\dot{A}_{mni}^M(z)$ ,  $\dot{B}_{mni}^e(z)$ ,  $\dot{B}_{mni}^M(z)$ ,  $\dot{C}_{mni}(z)$ ,  $\dot{H}_{mni}(z)$ ,  $\dot{A}_m^T(z)$ ,  $\dot{B}_m^T(z)$ , т.е. (8.57)-(8.64) представляет собой систему уравнений возбуждения динамических полей коаксиального волновода произвольной нерегулярной конфигурации, возбуж-

даемого негармоническими электрическими и магнитными токами источников.

В заключение заметим, что полученные уравнения возбуждения справедливы, строго говоря, только в случае, когда граничные поверхности коаксиального волновода не имеют изломов, т.е.  $\frac{\partial b}{\partial z}$  и  $\frac{\partial b}{\partial \varphi}$  не имеют разрывов.

Практически, однако, они могут использоваться в этом случае, если при численном интегрировании уравнений обходить точки разрыва производных путем соответствующего выбора шага интегрирования.

### 8.7. Уравнения возбуждения нерегулярных замедляющих систем

Поставим задачу следующим образом. Требуется найти решение уравнений Максвелла для гармонических процессов

$$\begin{cases} \text{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{\delta}}, \\ \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}} \end{cases} \quad (8.65)$$

при граничных условиях импедансного типа

$$\frac{\dot{E}_\tau}{\dot{H}_\tau} = \dot{Z}(z). \quad (8.66)$$

Здесь координата  $z$  соответствует направлению оси замедляющей системы, поперечные координаты (в общем случае криволинейные) обозначим  $q_1, q_2$ .

Будем считать, что контур поперечного сечения замедляющей системы не зависит от  $z$  и её нерегулярность обусловлена только зависимостью от  $z$  импеданса стенок (или эквивалентных им боковых поверхностей, на которых задан  $\dot{Z}(z)$ ).

В качестве базисных функций выберем «квазирегулярную» систему функций  $\vec{E}_S, \vec{H}_S$  вида

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_S &= \vec{E}_S^0(q_1, q_2, \aleph_S(z)) e^{-j \int h_S dz}, \\ \dot{\vec{H}}_S &= \vec{H}_S^0(q_1, q_2, \aleph_S(z)) e^{-j \int h_S dz}, \end{aligned} \quad (8.67)$$

$$h_S = \sqrt{k^2 + \aleph_S^2}.$$

Функции  $\vec{E}_S, \vec{H}_S$  удовлетворяют граничным условиям (8.66) в каждом сечении  $z'$  и являются решениями однородных уравнений (8.65) для регулярной системы с  $\dot{Z} = \dot{Z}(z')$  при всех  $z$  (соответственно и  $\aleph_S(z') = Const$  в эквивалентной регулярной системе). Система функций  $\begin{Bmatrix} \vec{E}_S \\ \vec{H}_S \end{Bmatrix}$  ортогональна в каждом сечении  $z'$ , как и всякая система собственных волн регулярного волновода, т.е.

$$J_{S,p} = \int_{S_\perp} \left\{ [\vec{E}_S, \vec{H}_p] - [\vec{E}_p, \vec{H}_S] \right\} \vec{z}_0 dS_\perp = \begin{cases} 0, & p \neq S \\ N_S, & p = S \end{cases} \quad (8.68)$$

Поскольку, однако,  $\aleph_S = \aleph_S(z) \neq Const$ , поля (8.67) не удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла и система уравнений для них имеет вид

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}_S &= j\omega \dot{\epsilon}_a \vec{E}_S + \vec{\psi}_S^e, \\ \text{rot} \vec{E}_S &= -j\omega \dot{\mu}_a \vec{H}_S - \vec{\psi}_S^m, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_S^e &= -e^{-j \int h_s dz} \frac{\partial}{\partial z} [\vec{H}_S^0, \vec{z}_0], \\ \vec{\psi}_S^m &= e^{-j \int h_s dz} \frac{\partial}{\partial z} [\vec{E}_S^0, \vec{z}_0]. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\vec{\psi}_S^e, \vec{\psi}_S^m$  - чисто поперечные вектора, что существенно в последующем выводе уравнений возбуждения.

Разделим все вектора на поперечные и продольные и запишем разложения для поперечных составляющих  $\vec{E}_t, \vec{H}_t$  в виде

$$\vec{E}_t = \sum_S (\dot{C}_S(z) \vec{E}_{St} + \dot{C}_{-S}(z) \vec{E}_{-St}),$$

$$\vec{H}_t = \sum_S (\dot{C}_S(z) \vec{H}_{St} + \dot{C}_{-S}(z) \vec{H}_{-St}).$$

Тогда нетрудно показать, что разложение полного поля, удовлетворяющего (8.65), должно быть записано в следующей форме (при доказательстве используется тот факт, что  $\vec{\psi}_{S\ell}^m = \vec{\psi}_{S\ell}^e = 0$ ):

$$\vec{E} = \sum_S (\dot{C}_S(z)\vec{E}_S + \dot{C}_{-S}(z)\vec{E}_{-S}) - \frac{\vec{\delta}^l}{j\omega\varepsilon_a},$$

$$\vec{H} = \sum_S (\dot{C}_S(z)\vec{H}_S + \dot{C}_{-S}(z)\vec{H}_{-S}).$$
(8.69)

Для определения коэффициентов разложения  $\dot{C}_{\pm S}(z)$  воспользуемся леммой Лоренца для бесконечно малого объема  $S_{\perp} dz$  в волноводе, предполагая, что  $\dot{Z}(z)$  и соответственно  $\aleph_S(z)$  - гладкие функции. В соответствии с леммой Лоренца для  $dV = S_{\perp} dz$  можно записать

$$\frac{d}{dz} \int_{S_{\perp}} \{[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]\} \vec{Z}_0 dS_{\perp} = \int_{S_{\perp}} (\vec{\delta}_1^e \vec{E}_2 - \vec{\delta}_2^e \vec{E}_1 - \vec{\delta}_1^m \vec{H}_2 + \vec{\delta}_2^m \vec{H}_1) dS. \quad (8.70)$$

Полагая в качестве  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  поля (8.69) ( $\vec{\delta}_1^e = \vec{\delta}, \vec{\delta}_1^m = 0$ ), а в качестве  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  поля  $\vec{E}_{\pm S}, \vec{H}_{\pm S}$  ( $\vec{\delta}_2^e = \vec{\psi}_{\mp S}^e, \vec{\delta}_2^m = \vec{\psi}_{\mp S}^m$ ) и с учетом условия ортогональности (8.68), из (8.70) получаем

$$\frac{d}{dz} (\dot{C}_S N_S) = \int_{S_{\perp}} \vec{\delta} \vec{E}_{-S} dS_{\perp} + \sum_P \dot{C}_P \gamma_{p,-S}$$

$$\frac{d}{dz} (\dot{C}_{-S} N_{-S}) = \int_{S_{\perp}} \vec{\delta} \vec{E}_S dS_{\perp} + \sum_P \dot{C}_P \gamma_{p,S}.$$
(8.71)

Здесь

$$\gamma_{p,\pm S} = \gamma_{p,\pm S}^m - \gamma_{p,\pm S}^e = \gamma_{\pm S,p}, \quad \gamma_{p,\pm S}^e = \int_{S_{\perp}} \vec{E}_P \vec{\psi}_{\pm S}^e dS_{\perp}, \quad \gamma_{p,\pm S}^m = \int_{S_{\perp}} \vec{H}_P \vec{\psi}_{\pm S}^m dS_{\perp}.$$

Система (8.71) представляет собой совершенно общую форму уравнений возбуждения для произвольной нерегулярной замедляющей системы.

Заметим, что (8.71) нетрудно видоизменить на случай, когда выделяется квазистатическая часть электрического поля  $\vec{E}_{cm} = -grad\Phi, \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$ .

В этом случае в (8.71)  $\vec{\delta}$  необходимо заменить на  $\vec{\delta}' = \vec{\delta} - j\omega\varepsilon_a grad\Phi$ .

## 8.8. Нерегулярные волноводы с прямоугольным сечением.

## Теория и приложения

Нерегулярные волноводы с прямоугольным сечением весьма широко используются как в различных устройствах СВЧ и антенной технике, так и в приборах СВЧ и КВЧ с пространственно - развитыми ленточными электронными потоками: ЛБВ, ЛОВО- и М-типов, оротронах, убитронах и других типах лазеров на свободных электронах.

В разделе [8.4](#) изложена теория возбуждения продольно - азимутально - нерегулярных волноводов. В ее основе лежит операция отображения внутренней поверхности нерегулярного волновода на регулярный круговой цилиндр единичного радиуса. Соответственно используются цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ . В случае нерегулярных волноводов с прямоугольным сечением этой теорией не только неудобно пользоваться из-за несоответствия естественных для прямоугольного волновода декартовых координат  $x, y, z$  принятым в теории цилиндрическими, но и, строго говоря, невозможно, поскольку в угловых точках прямоугольного сечения имеет место разрыв производных  $\partial b(z, \varphi) / \partial \varphi$  ( $b(z, \varphi)$  - радиус внутреннего контура волновода в координатах  $r, \varphi, z$ ).

Ниже развита строгая теория возбуждения произвольно - нерегулярных волноводов с прямоугольным поперечным сечением, основанная на операции отображения нерегулярной внутренней поверхности волновода на регулярный цилиндр с прямоугольным сечением и использовании прямоугольной системы координат. Приведены примеры расчета ЛБВ-О, заграждающего фильтра, а также дисперсионных характеристик периодического волновода на основе предложенной теории.

*Преобразование координат.* Рассмотрим ([Рис. 8.1](#)) произвольно (по  $x$  и

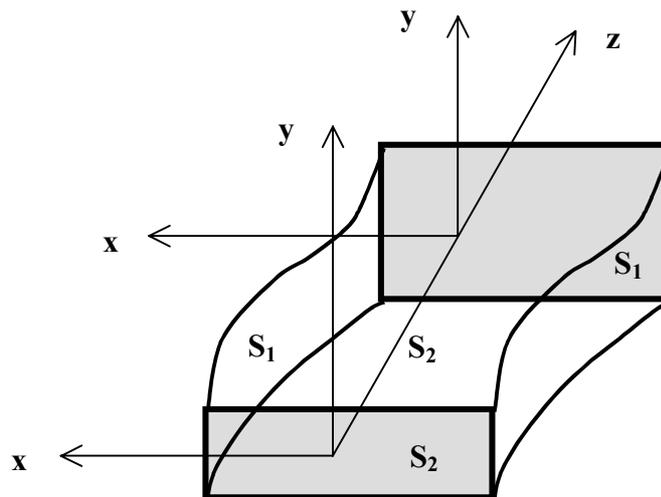
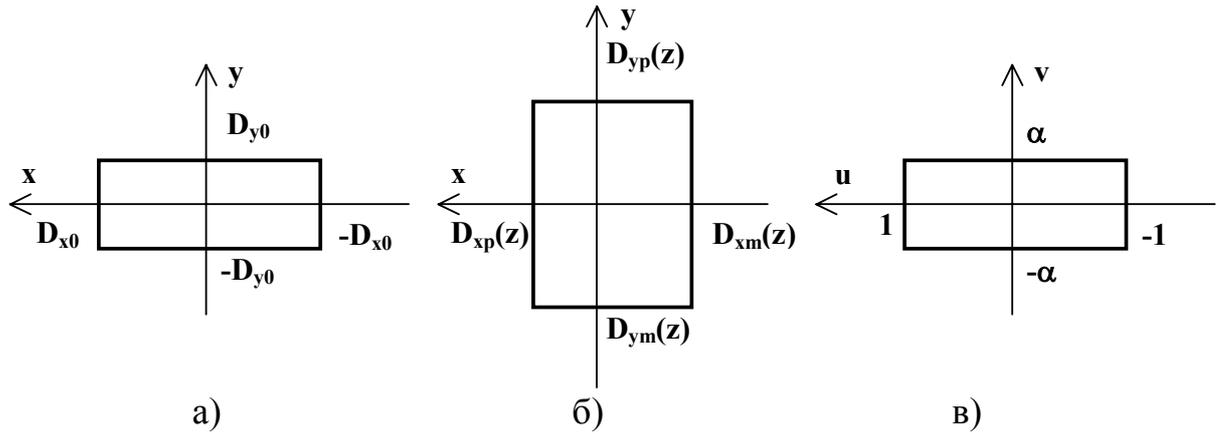


Рис.8.1.

$y$ ) нерегулярный прямоугольный волновод ( $x, y, z$  - компоненты исходной прямоугольной системы координат). На ([Рис.8.2, а](#)) изображено начальное поперечное сечение волновода  $z=0$ . Система координат выбрана таким обра-



**Рис.8.2.**

зом, что ее начало (точка  $x=y=z=0$ ) соответствует центру поперечного сечения. В текущем поперечном сечении  $z$  нерегулярного волновода ([Рис.8.2, б](#)) это не так: в общем случае  $D_{xp}(z) \neq D_{xm}(z)$ ,  $D_{yp}(z) \neq D_{ym}(z)$ . Задача состоит в определении поля, возбуждаемого в волноводе источниками, заданными плотностью стороннего электрического тока

$$\vec{\delta} = \vec{x}_0 \delta_x(x, y, z, t) + \vec{y}_0 \delta_y(x, y, z, t) + \vec{z}_0 \delta_z(x, y, z, t)$$

и плотностью стороннего магнитного тока

$$\vec{\delta}^M = \vec{x}_0 \delta_x^M(x, y, z, t) + \vec{y}_0 \delta_y^M(x, y, z, t) + \vec{z}_0 \delta_z^M(x, y, z, t).$$

Искомое поле должно удовлетворять граничным условиям на боковых стенках волновода  $S_{1,2}$  (потерями в стенках пренебрегаем,  $\sigma \rightarrow \infty$ )

$$\left[ \vec{n}_{1,2} \vec{E} \right] \Big|_{S_{1,2}} = 0 \quad (8.72)$$

( $\vec{n}_{1,2}$  - внешняя нормаль на вертикальных и горизонтальных стенках волновода).

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом преобразования координат, позволяющим преобразовать граничную задачу ([8.72](#)) ([Рис. 8.1](#), [Рис.8.2, б](#)) к элементарной ([Рис.8.2, в](#)): контур поперечного сечения симметричен относительно  $z$  и не зависит от  $z$ . Введем следующие преобразования координат:

$$u = \frac{x+b}{a}, \quad v = \frac{y+h}{q}, \quad z=z, \quad (\text{прямое}), \quad (8.73)$$

$$x = au - b, \quad y = qv - h \quad (\text{обратное}), \quad (8.74)$$

где  $a(z) = (D_{xp}(z) - D_{xm}(z))/2, \quad b = (D_{xp}(z) + D_{xm}(z))/2,$

$$q(z) = (D_{yp}(z) - D_{ym}(z))/2\alpha, \quad h = (D_{yp}(z) + D_{ym}(z))/2, \quad \alpha = D_{yo}/D_{xo}.$$

При таком преобразовании в новых переменных внутренняя граничная поверхность волновода регулярна ([Рис.8.2, в](#)):

$$u = \pm 1 \quad (S'_1) \quad \text{и} \quad v = \pm \alpha \quad (S'_2).$$

Учитывая обратное преобразование (8.74), для радиуса-вектора точки во внутренней области в новой системе координат  $u, v, z$  имеем

$$\vec{r}(u, v, z) = \vec{z}_0 z + \vec{x}_0 (au + b) + \vec{y}_0 (qv + h).$$

Обозначим далее  $a_z = \frac{da}{dz}, \quad b_z = \frac{db}{dz}, \quad q_z = \frac{dq}{dz}, \quad h_z = \frac{dh}{dz}.$

Определим основную систему векторов косоугольной координатной системы  $u, v, z$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = a \vec{x}_0, & \vec{a}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = q \vec{y}_0, \\ \vec{a}_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{z}_0 + (ua_z + b_z) \vec{x}_0 + (vq_z + h_z) \vec{y}_0. \end{aligned}$$

Взаимная система векторов  $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3$  находится следующим образом:

$$\vec{a}^1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}, \quad \vec{a}^2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V}, \quad \vec{a}^3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V},$$

$$V = \vec{a}_1 (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \vec{a}_2 (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) = \vec{a}_3 (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = aq.$$

Производя указанные действия, имеем

$$\vec{a}^1 = \frac{1}{a} (\vec{x}_0 - \vec{z}_0 (ua_z + b_z)),$$

$$\vec{a}^2 = \frac{1}{q} (\vec{y}_0 - \vec{z}_0 (vq_z + h_z)),$$

$$\vec{a}^3 = \vec{z}_0.$$

Найдем теперь элементы метрического тензора

$$g^{11} = \vec{a}^1 \quad \vec{a}^1 = a^{-2} \left( 1 + (ua_z + b_z)^2 \right),$$

$$g^{22} = \vec{a}^2 \quad \vec{a}^2 = q^{-2} \left( 1 + (vq_z + h_z)^2 \right),$$

$$g^{33} = 1,$$

$$g^{12} = \vec{a}^1 \quad \vec{a}^2 = (ua_z + b_z) (vq_z + h_z) = g^{21},$$

$$g^{13} = \vec{a}^1 \quad \vec{a}^3 = -a^{-1} (ua_z + b_z) = g^{31},$$

$$g^{23} = \vec{a}^2 \quad \vec{a}^3 = -q^{-1} (vq_z + h_z).$$

Представим вектора электромагнитного поля и тока в виде (на примере  $\vec{H}$ ):

$$\vec{H} = H_x \vec{x}_0 + H_y \vec{y}_0 + H_z \vec{z}_0 = H_u \vec{a}^1 + H_v \vec{a}^2 + H_\zeta \vec{a}^3,$$

где  $H_u$ ,  $H_v$ ,  $H_\zeta$  - ковариантные проекции  $\vec{H}$ , которые связаны с исходными следующим образом:

$$H_x = H_u / a, \quad H_y = H_v / q, \quad H_z = H_\zeta - \frac{a_z u + b_z}{a} H_u - \frac{q_z v + h_z}{q} H_v. \quad (8.75)$$

Запишем теперь уравнения Максвелла в новой системе координат

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \left\{ \left( \frac{\partial H_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial H_v}{\partial z} \right) \vec{a}_1 + \left( \frac{\partial H_u}{\partial z} - \frac{\partial H_\zeta}{\partial u} \right) \vec{a}_2 + \left( \frac{\partial H_v}{\partial u} - \frac{\partial H_u}{\partial v} \right) \vec{a}_3 \right\} = \\ & = \varepsilon_0 \left( \frac{\partial E_u}{\partial t} \vec{a}^1 + \frac{\partial E_v}{\partial t} \vec{a}^2 + \frac{\partial E_\zeta}{\partial t} \vec{a}^3 \right) + \delta_u \vec{a}^1 + \delta_v \vec{a}^2 + \delta_\zeta \vec{a}^3, \end{aligned} \quad (8.76)$$

$$\frac{1}{V} \left\{ \left( \frac{\partial E_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial E_v}{\partial z} \right) \vec{a}_1 + \left( \frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_\zeta}{\partial u} \right) \vec{a}_2 + \left( \frac{\partial E_v}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial v} \right) \vec{a}_3 \right\} = \quad (8.77)$$

$$-\mu_0 \left( \frac{\partial H_u}{\partial t} \vec{a}^1 + \frac{\partial H_v}{\partial t} \vec{a}^2 + \frac{\partial H_\zeta}{\partial t} \vec{a}^3 \right) - \delta_u^m \vec{a}^1 - \delta_v^m \vec{a}^2 - \delta_\zeta^m \vec{a}^3.$$

Используя далее свойство ортогональности основной и взаимной системы векторов  $\vec{a}_i \vec{a}^i = \delta_{ij}$  и умножая скалярно уравнения (8.76), (8.77) на  $\vec{a}^1$ ,  $\vec{a}^2$ ,  $\vec{a}^3$ , получаем контравариантные проекции уравнений в форме

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{H}^1 &= \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{E}^1}{\partial t} + \hat{g} \vec{\delta}^1, \\ \text{rot} \vec{E}^1 &= -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{H}^1}{\partial t} - \hat{g} \vec{\delta}^{1m}. \end{aligned} \right\} \quad (8.78)$$

Здесь  $\hat{g} = Vg$ ,  $g = (g^{ij})$ ,  $\vec{r} = u\vec{x}_0 + v\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ ,  $\vec{H}^1 = H_u\vec{x}_0 + H_v\vec{y}_0 + H_\zeta\vec{z}_0$  (аналогично  $\vec{E}^1, \vec{\delta}^1, \vec{\delta}^{1m}$ ).

Граничные условия (1) теперь принимают вид:

$$E_{u,z}^1 \Big|_{v=\pm\alpha} = 0, \quad E_{v,z}^1 \Big|_{u=\pm l} = 0. \quad (8.79)$$

*Проекционные соотношения для амплитуд связанных волн нерегулярного волновода.* Прежде чем переходить к решению задачи (8.78), (8.79), целесообразно для улучшения его сходимости выделить в (8.78) электростатическую часть поля источников, содержащую разрыв первой производной  $\vec{E}^1$ , и магнитоэлектрическую, содержащую разрыв  $\vec{H}^1$ .

При этом динамическая задача имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{H}_1 &= \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \hat{g} \vec{\delta}_1, \\ \text{rot} \vec{E}_1 &= -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} - \hat{g} \vec{\delta}_1^m, \end{aligned} \right\} \quad (8.80)$$

$$E_{1u,z} \Big|_{v=\pm\alpha} = 0, \quad E_{1v,z} \Big|_{u=\pm l} = 0. \quad (8.81)$$

Здесь  $\vec{\delta}_1 = \vec{\delta}^1 - \varepsilon_0 \text{grad} (\partial \Phi^e / \partial t)$ ,  $\vec{E}_1 = \vec{E}^1 + \text{grad} \Phi^e$ ,

$$\vec{\delta}_1^m = \vec{\delta}^{1m} - \mu_0 \text{grad} (\partial \Phi^m / \partial t), \quad \vec{H}_1 = \vec{H}^1 + \text{grad} \Phi^m,$$

$\Phi^e, \Phi^m$  – соответственно электрический и магнитный потенциалы источников.

Существенно, что  $\vec{E}_I, \vec{H}_I$  - непрерывные на границе источников векторы и операция почленного дифференцирования представляющих их в решении рядов  $(rot\vec{E}_I, rot\vec{H}_I)$  допустима, поскольку эти ряды сходятся равномерно.

Остановимся на решении задачи (8.80), (8.81), полагая режим установившимся (периодическим). Представим искомое решение в системе  $u, v, z$  в виде разложения по собственным функциям регулярного волновода следующим образом:

$$\vec{E}_I = \operatorname{Re} \sum_s \left( \dot{\vec{E}}_{ts} + \dot{\vec{E}}_{\zeta_s} \right) e^{js\omega t}, \quad \vec{H}_I = \operatorname{Re} \sum_s \left( \dot{\vec{H}}_{ts} + \dot{\vec{H}}_{\zeta_s} \right) e^{js\omega t},$$

$$\dot{\vec{E}}_{ts} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{A}_{smn}^e(z) \vec{e}_{mn}^e + \sum_{k=0}^K \sum_{\ell=0}^L \dot{A}_{sk\ell}^M(z) \vec{e}_{k\ell}^M,$$

$$\dot{\vec{E}}_{\zeta_s} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{C}_{smn}^e(z) \psi_{mn}^e \vec{z}_0,$$

$$\dot{\vec{H}}_{ts} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{B}_{smn}^e(z) \vec{h}_{mn}^e + \sum_{k=0}^K \sum_{\ell=0}^L \dot{B}_{sk\ell}^M(z) \vec{h}_{k\ell}^M,$$

$$\dot{\vec{H}}_{\zeta_s} = \sum_{k=0}^K \sum_{\ell=0}^L \dot{D}_{sk\ell}^M(z) \psi_{k\ell}^M \vec{z}_0.$$

Здесь  $\psi_{mn}^e = \sin \frac{m\pi(u+1)}{2} \sin \frac{n\pi(v+1)}{2\alpha}$ ,  $\psi_{k\ell}^M = \cos \frac{k\pi(u+1)}{2} \cos \frac{\ell\pi(v+1)}{2\alpha}$ ,

$$\vec{e}_{mn}^e = \nabla \psi_{mn}^e = \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi(u+1)}{2} \sin \frac{n\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{x}_0 + \frac{n\pi}{2\alpha} \sin \frac{m\pi(u+1)}{2} \cos \frac{n\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{y}_0$$

$$\vec{e}_{k\ell}^M = \nabla \times \vec{z}_0 \psi_{k\ell}^e = \frac{\ell\pi}{2\alpha} \cos \frac{k\pi(u+1)}{2} \sin \frac{\ell\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{x}_0 - \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi(u+1)}{2} \cos \frac{\ell\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{y}_0$$

$$\vec{h}_{mn}^e = \nabla \times \vec{z}_0 \psi_{mn}^M = \frac{n\pi}{2\alpha} \sin \frac{m\pi(u+1)}{2} \cos \frac{n\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{x}_0 - \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi(u+1)}{2} \sin \frac{n\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{y}_0$$

$$\vec{h}_{k\ell}^M = -\nabla \psi_{k\ell}^M = \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi(u+1)}{2} \cos \frac{\ell\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{x}_0 + \frac{\ell\pi}{2\alpha} \cos \frac{k\pi(u+1)}{2} \sin \frac{\ell\pi(v+\alpha)}{2\alpha} \vec{y}_0$$

Применяя к решению (8.80), (8.81) проекционную процедуру, получим следующую систему проекционных соотношений для определения амплитуд:

$$\begin{aligned} & \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \text{rot} \left( \dot{\vec{H}}_{ts} + \dot{\vec{H}}_{\zeta_s} \right) - js\omega\epsilon_0 \hat{g} \left( \dot{\vec{E}}_{ts} + \dot{\vec{E}}_{\zeta_s} \right) \right\} \vec{e}_{pr}^e dvdu = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{g} \vec{\delta}_l \vec{e}_{pr}^e e^{-js\omega t} dvdu d\omega t, \end{aligned} \quad (8.82)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \text{rot} \left( \dot{\vec{H}}_{ts} + \dot{\vec{H}}_{\zeta_s} \right) - js\omega\epsilon_0 \hat{g} \left( \vec{E}_{ts} + \vec{E}_{\zeta_s} \right) \right\} \vec{e}_{pr}^M dvdu = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{g} \vec{\delta}_l \vec{e}_{pr}^M e^{-js\omega t} dvdu d\omega t, \end{aligned} \quad (8.83)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \text{rot} \left( \dot{\vec{H}}_{ts} + \dot{\vec{H}}_{\zeta_s} \right) - js\omega\epsilon_0 \hat{g} \left( \vec{E}_{ts} + \vec{E}_{\zeta_s} \right) \right\} \psi_{pr}^e \vec{z}_0 dvdu = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{g} \vec{\delta}_l \vec{z}_0 \psi_{pr}^e e^{-js\omega t} dvdu d\omega t, \end{aligned} \quad (8.84)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \hat{g}^{-1} \text{rot} \left( \dot{\vec{E}}_{ts} + \dot{\vec{E}}_{\zeta_s} \right) + js\omega\mu_0 \left( \dot{\vec{H}}_{ts} + \dot{\vec{H}}_{\zeta_s} \right) \right\} \vec{h}_{pr}^e dvdu = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \vec{\delta}_l^M \vec{h}_{pr}^e e^{-js\omega t} dvdu d\omega t, \end{aligned} \quad (8.85)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \hat{g}^{-1} \text{rot} \left( \dot{\vec{E}}_{ts} + \dot{\vec{E}}_{\zeta_s} \right) + js\omega\mu_0 \left( \dot{\vec{H}}_{ts} + \dot{\vec{H}}_{\zeta_s} \right) \right\} \vec{h}_{pr}^M dvdu = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \vec{\delta}_l^M \vec{h}_{pr}^M e^{-js\omega t} dvdu d\omega t, \end{aligned} \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1-\alpha}^{-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \hat{g}^{-1} \text{rot} \left( \dot{\vec{E}}_{ts} + \dot{\vec{E}}_{\zeta_s} \right) + js\omega\mu_0 \dot{\vec{H}}_{ts} \right\} \psi_{pr}^M \vec{z}_0 dvdu = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1-\alpha}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} \vec{\delta}_l^M \psi_{pr}^M \vec{z}_0 e^{-js\omega t} dvdu d\omega t. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Уравнения (8.82) – (8.83) образуют полную систему ОДУ первого порядка, определяющую комплексные амплитуды связанных волн

$\dot{A}_{smn}^e, \dot{A}_{skl}^m, \dot{B}_{smn}^e, \dot{B}_{skl}^m, \dot{C}_{smn}, \dot{D}_{skl}$ , т.е. они представляют собой систему уравнений возбуждения динамических полей нерегулярного волновода с прямоугольным сечением, возбуждаемых негармоническими электрическими и магнитными токами источников. Полученные уравнения возбуждения, строго говоря, справедливы только в случае, когда граничные поверхности нерегулярного волновода не имеют изломов, т.е.  $a_z, b_z, q_z, h_z$  не имеют разрывов. Практически, однако, они могут использоваться и в этом случае, если при численном интегрировании обходить точку разрыва производной путем выбора шага интегрирования таким образом, чтобы она находилась в центре интервала интегрирования.

*Самосогласованные уравнения возбуждения продольно-нерегулярного волновода электронным потоком.* Взаимодействие электронного потока с возбуждаемым в волноводе электромагнитным полем будем описывать системой безразмерных уравнений Максвелла для комплексных амплитуд  $s$ -гармоники рабочей частоты

$$\text{rot} \dot{\vec{B}}_s = jsW \dot{\vec{E}}_s + \dot{\vec{\delta}}_s; \quad \text{rot} \dot{\vec{E}}_s = -jsW \dot{\vec{B}}_s; \quad [\vec{n} \dot{\vec{E}}]_s = 0; \quad (8.88)$$

и уравнений движения крупных частиц, имитирующих движение электронов пучка

$$\frac{d\gamma_i \vec{\beta}_i}{dz} = -\{(\vec{E} + [\vec{\beta}_i \vec{B}]) + [\vec{\beta}_i \vec{F}] + S_q \vec{E}_{qi}\} / \beta_{zi}; \quad (8.89)$$

$$\frac{d\vec{r}_{\perp i}}{dz} = \frac{\vec{\beta}_{\perp i}}{\beta_{zi}}; \quad \frac{d\theta_i}{dz} = \frac{W}{\beta_{zi}}; \quad \gamma_i = 1 / \sqrt{1 - \vec{\beta}_i^2},$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\sum_s \dot{\vec{E}}_s(\vec{r}_{\perp i}, z_i) e^{js\theta_i}) \quad \vec{B} = \text{Re}(\sum_s \dot{\vec{B}}_s(\vec{r}_{\perp i}, z_i) e^{js\theta_i})$$

$$\vec{\beta}_i(0) = \vec{\beta}_i^0; \quad \vec{r}_{\perp i}(0) = \vec{r}_{\perp i}^0 \quad \theta_i(0) = 2\pi(i-1)/Ne; \quad i=1 \dots Ne.$$

Здесь и далее приняты следующие безразмерные переменные (штрихом будем обозначать размерные величины, имеющие одинаковое написание с безразмерными):

$x, y, z, u, v, a, b, q, h = (x', y', z', u', v', a', b', q', h') \cdot \omega_0 / c$ ,  $W = \omega / \omega_0$ ,  $\theta_i = \omega t_i$ ;  $\omega$  – рабочая частота,  $\omega_0$  – базовая,  $\vec{\beta}_i = \vec{v}_i / c$ ,  $\vec{v}_i$  – скорость крупных частиц,  $c$  – скорость света,

$$(\vec{E}, \dot{A}^e, \dot{A}^M, \dot{C}) = (\vec{E}', \dot{A}'^e, \dot{A}'^M, \dot{C}') / E_m, \quad (\vec{B}, \dot{B}^e, \dot{B}^M, D) = (\vec{H}, B'^e, B'^M, D') c \mu_0 / E_m, .$$

$$\dot{\delta}_s = \frac{1}{\varepsilon_0 \omega_0 E_m \pi} \int_0^{2\pi} J(z, \omega t) e^{-js\omega t} d\omega t, \quad J(z, t) - \text{плотность тока в ЭП}; \quad G_0 = \frac{2eI_0}{\varepsilon_0 m_0 c^3};$$

$I_0$  - ток пучка,  $E_m = m_0 \omega_0 c / e$ ,  $m_0, e$  - масса и заряд электрона,  $\vec{F} = e\vec{B}^0 / m_0 \omega_0$ ,  $\vec{B}^0$  - индукция магнитостатического поля,  $S_q \vec{E}_{qi}$  - силовая составляющая поля пространственного заряда, расчет которой в каждом конкретном случае определяется выбором формы крупных частиц, конфигурацией электронного потока и области взаимодействия.

Используя проекционные соотношения (8.82-8.87) для уравнений (8.88), а также закон сохранения заряда для связи плотности тока электронного пучка с электронными траекториями, описываемыми уравнениями (8.89), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерных амплитуд возбуждаемых мод в нерегулярном волноводе:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{spr} \equiv j\dot{B}_{spr}^e \chi_{pr}^2 / (sWaq) + \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_m \dot{A}_{smr}^e m \left( \frac{a_z}{a} I_{mp}^{lcs} + \frac{b_z}{a} I_{mp}^{cs} \right) + \right. \\ \left. + \sum_n \dot{A}_{spn}^e n \left( \frac{q_z}{q} I_{nr}^{lcs} + \frac{h_z}{\alpha q} I_{nr}^{cs} \right) + \frac{r}{\alpha} \sum_k \dot{A}_{skr}^M \left( \frac{a_z}{a} I_{kp}^{lcs} + \frac{b_z}{a} I_{kp}^{cs} \right) - \right. \\ \left. - p \sum_\ell \dot{A}_{spl}^M \left( \alpha \frac{q_z}{q} I_{lr}^{lcs} + \frac{h_z}{q} \cdot I_{lr}^{cs} \right) \right\} + I_{pr}^C; \quad p = 1..M; r = 1..N; . \end{aligned} \quad (8.90)$$

$$\dot{I}_{pr}^C = -\frac{jG_0}{sWaq\alpha} \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \sin \frac{p\pi(u_i + 1)}{2} \sin \frac{r\pi(v_i + \alpha)}{2\alpha} e^{-js\theta_i}; \quad (8.91)$$

$$\frac{d\dot{A}_{spr}^e}{dz} = \left[ \alpha \chi_{pr}^M f_{pr}^e + \gamma_{pr}^M f_{pr}^M \right] / \chi_{pr}^{eM}; \quad p = 1..M; r = 1..N; \quad (8.92)$$

$$\frac{d\dot{A}_{spr}^M}{dz} = \left[ \gamma_{pr}^e f_{pr}^e + \alpha \chi_{pr}^e f_{pr}^M \right] / \chi_{pr}^{eM}; \quad p = 0..K; r = 0..L;$$

$$\begin{aligned} f_{pr}^e = jsWB_{spr}^e \chi_{ps}^2 \alpha + \dot{C}_{pr} \alpha \chi_{pr}^e - \frac{r\pi}{2} \sum_k \dot{A}_{skr}^M \chi_{kr}^2 \left( \frac{a_z}{q} I_{kp}^{lcs} + \frac{b_z}{q} I_{kp}^{cs} \right) + \\ + \frac{p\pi}{2} \alpha \sum_\ell \dot{A}_{spl}^M \chi_{p\ell}^2 \left( \frac{q_z}{a} \alpha I_{lr}^{lcs} + \frac{h_z}{a} I_{lr}^{cs} \right); \quad p = 1..M; r = 1..N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{pr}^M = -jsWB_{spr}^M \chi_{pr}^2 \alpha - \dot{C}_{spr} \gamma_{pr}^e + \\ + \frac{\alpha p\pi}{2} \sum_k \dot{A}_{skr}^M \chi_{kr}^2 \left( \frac{a_z}{q} I_{kp}^{lcs} + \frac{b_z}{q} I_{kp}^{cs} \right) + \frac{r\pi}{2} \sum_\ell \dot{A}_{p\ell}^M \chi_{p\ell}^2 \left( \frac{q_z}{a} \alpha I_{lr}^{lcs} + \frac{h_z}{a} I_{lr}^{cs} \right); \quad p = 0..K; \end{aligned}$$

$r=0..L$ ;

$$\chi_{pr}^2 = \left(\frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{2\alpha}\right)^2; \quad \chi_{pr}^{em} = \chi_{pr}^e \chi_{pr}^m \alpha^2 - \gamma_{pr}^e \gamma_{pr}^m;$$

$$\gamma_{pr}^e = \begin{cases} \frac{pr\pi^2}{4} \left(\frac{a}{q} - \frac{q}{a}\right) & \text{если } E_{pr} \text{ присутствует} \\ 0 & \text{если } E_{pr} \text{ отсутствует} \end{cases}; \quad \chi_{pr}^e = \frac{q}{a} \left(\frac{p\pi}{2}\right)^2 + \frac{a}{q} \left(\frac{r\pi}{2\alpha}\right)^2;$$

$$\gamma_{pr}^m = \begin{cases} \frac{pr\pi^2}{4} \left(\frac{a}{q} - \frac{q}{a}\right) & \text{если } H_{pr} \text{ присутствует} \\ 0 & \text{если } H_{pr} \text{ отсутствует} \end{cases}; \quad \chi_{pr}^m = \frac{a}{q} \left(\frac{p\pi}{2}\right)^2 + \frac{q}{a} \left(\frac{r\pi}{2\alpha}\right)^2;$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{spr} = & -j/(sW) \left\{ \dot{A}_{spr}^m \chi_{pr}^2 \cdot (1 + b_z^2 + h_z^2) / aq + \right. & (8.93) \\ & + \sum_k \left[ \dot{A}_{skr}^m \chi_{kr}^2 \left( \frac{a_z^2}{aq} I_{kp}^{2cc} + \frac{2a_z b_z}{aq} I_{kp}^{1cc} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{d\dot{A}_{skr}^m}{dz} k \left( \frac{a_z}{q} I_{kp}^{1sc} + \frac{b_z}{q} I_{kp}^{sc} \right) \right] + \\ & + \sum_\ell \left[ \dot{A}_{skl}^m \chi_{p\ell}^2 \alpha \left( \frac{q_z^2 \alpha}{aq} I_{lr}^{2cc} + \frac{2q_z h_z}{aq} I_{lr}^{1cc} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{d\dot{A}_{skl}^m}{dz} \ell \left( \frac{q_z}{a} I_{lr}^{1sc} + \frac{h_z}{a\alpha} I_{lr}^{sc} \right) \right] - \\ & - \frac{r\pi}{2\alpha} \sum_m \left[ \left( \dot{C}_{smr} - \frac{d\dot{A}_{smr}^e}{dz} \right) \left( \frac{a_z}{q} I_{mp}^{1sc} + \frac{b_z}{q} I_{mp}^{sc} \right) \right] + \\ & + \frac{p\pi}{2} \sum_n \left[ \left( \dot{C}_{spn} - \frac{d\dot{A}_{spn}^e}{dz} \right) \left( \frac{q_z \alpha}{a} I_{nr}^{1sc} + \frac{h_z}{a} I_{nr}^{sc} \right) \right] \Big\}; \quad p=0..K; r=0..L; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{B}_{spr}^e}{dz} = & \frac{jsW}{\chi_{pr}^2} \frac{\pi^2}{4} \left\{ \dot{A}_{spr}^e \left[ \frac{q}{a} (1 + b_z^2) p^2 + \frac{a}{q} (1 + h_z^2) \frac{r^2}{\alpha^2} \right] + \right. & (8.94) \\ & + \dot{A}_{spr}^m \frac{pr}{\alpha} \left[ \frac{q}{a} (1 + b_z^2) - \frac{a}{q} (1 + h_z^2) \right] + \sum_m \dot{A}_{smr}^e mp \frac{q}{a} (2a_z b_z I_{mp}^{1cc} + a_z^2 I_{mp}^{2cc}) + \\ & + \sum_k \dot{A}_{skr}^m \frac{pr}{\alpha} \frac{q}{a} (2a_z b_z I_{kp}^{1cc} + a_z^2 I_{kp}^{2cc}) + \sum_n \dot{A}_{spn}^e rn \frac{a}{q} \left( \frac{2q_z h_z}{\alpha} I_{nr}^{1cc} + q_z^2 I_{nr}^{2cc} \right) - \\ & - \sum_\ell \dot{A}_{spl}^m pr \frac{a}{q} (2q_z h_z I_{lr}^{1cc} + q_z^2 \alpha I_{lr}^{2cc}) - \frac{2}{\pi} \sum_m \dot{C}_{smr} pq (b_z I_{mp}^{sc} + a_z I_{mp}^{1sc}) - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_n \dot{C}_{spn} \frac{r}{\alpha} a (h_z I_{nr}^{sc} + \alpha q_z I_{nr}^{1sc}) + \sum_{mn} \dot{A}_{smn}^e \gamma_{mn}^l + \sum_{k\ell} \dot{A}_{sk\ell}^m \gamma_{k\ell}^2 \Big\} + \dot{I}_{pr}^{Be}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{mn}^1 &= b_z h_z \left( \frac{mr}{\alpha} I_{mp}^{cs} I_{nr}^{sc} + \frac{np}{\alpha} I_{mp}^{sc} I_{nr}^{cs} \right) + b_z q_z \left( mr I_{mp}^{cs} I_{nr}^{lsc} + np I_{mp}^{sc} I_{nr}^{lcs} \right) + \\ &+ a_z h_z \left( \frac{mr}{\alpha} I_{mp}^{lcs} I_{nr}^{sc} + \frac{np}{\alpha} I_{mp}^{lsc} I_{nr}^{lcs} \right) + a_z q_z \left( mr I_{mp}^{lcs} I_{nr}^{lsc} + np I_{mp}^{lsc} I_{nr}^{lcs} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{kl}^2 &= b_z h_z \left( \frac{\ell r}{\alpha^2} I_{kp}^{cs} I_{lr}^{sc} - kp I_{kp}^{sc} I_{lr}^{cs} \right) + b_z q_z \left( \frac{\ell r}{\alpha} I_{kp}^{cs} I_{lr}^{lsc} - kp \alpha I_{kp}^{sc} I_{lr}^{lcs} \right) + \\ &+ a_z h_z \left( \frac{\ell r}{\alpha^2} I_{kp}^{lcs} I_{lr}^{sc} - kp I_{kp}^{lsc} I_{lr}^{lcs} \right) + a_z q_z \left( \frac{\ell r}{\alpha} I_{kp}^{lcs} I_{lr}^{lsc} - kp \alpha I_{kp}^{lsc} I_{lr}^{lcs} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_{pr}^{Be} &= -\frac{G_0}{\chi_{pr}^2 \alpha} \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{\beta_{xi}}{\beta_{zi}} - u_i a_z - b_z \right) \frac{p\pi}{2} \cos \frac{p\pi(u_i + 1)}{2} \sin \frac{r\pi(v_i + \alpha)}{2\alpha} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{q} \left( \frac{\beta_{yi}}{\beta_{zi}} - v_i q_z - h_z \right) \frac{r\pi}{2\alpha} \sin \frac{p\pi(u_i + 1)}{2} \cos \frac{r\pi(v_i + \alpha)}{2\alpha} \right] e^{-js\theta_i}; \end{aligned}$$

$$p = 1..M; r = 1..N;$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{B}_{spr}^M}{dz} &= -\dot{D}_{spr} - \frac{jsW}{\chi_{pr}^2} \frac{\pi^2}{4} \left\{ A_{spr}^e \frac{pr}{\alpha} \left[ \frac{q}{a} (1 + b_z^2) - \frac{a}{q} (1 + h_z^2) \right] + \right. \quad (8.95) \\ &+ \dot{A}_{spr}^M \left[ \frac{q}{a} (1 + b_z^2) \frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{a}{q} (1 + h_z^2) p^2 \right] + \sum_m \dot{A}_{spr}^e \frac{q}{a} \frac{mr}{\alpha} \left( I_{mp}^{lcc} 2a_z b_z + I_{mp}^{2cc} a_z^2 \right) + \\ &+ \sum_k \dot{A}_{skr}^M \frac{r^2}{\alpha^2} \frac{q}{a} \left( I_{kp}^{lcc} 2a_z b_z + I_{kp}^{2cc} a_z^2 \right) - \sum_n \dot{A}_{spn}^e np \frac{a}{q} \left( I_{nr}^{lcc} 2q_z h_z + I_{nr}^{2cc} \alpha q_z^2 \right) + \\ &+ \sum_\ell \dot{A}_{sp\ell}^M p^2 \alpha \frac{a}{q} \left( I_{lr}^{lcc} 2q_z h_z + I_{lr}^{2cc} \alpha q_z^2 \right) - \frac{2}{\pi} \sum_m \dot{C}_{smr} \frac{qr}{\alpha} \left( I_{mp}^{sc} b_z + I_{mp}^{lsc} a_z \right) + \\ &\left. + \frac{2}{\pi} \sum_n \dot{C}_{spn} ap \left( I_{nr}^{sc} h_z + I_{nr}^{lsc} \alpha q_z \right) - \sum_{mn} A_{smn}^e \gamma_{mn}^3 - \sum_{kl} A_{sk\ell}^M \gamma_{kl}^4 \right\} + \dot{i}_{pr}^{BM}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{mn}^3 &= b_z h_z \left( mp I_{mp}^{cs} I_{nr}^{sc} - \frac{nr}{\alpha^2} I_{mp}^{sc} I_{nr}^{cs} \right) + a_z h_z \left( mp I_{mp}^{lcs} I_{nr}^{sc} - \frac{nr}{\alpha^2} I_{mp}^{lsc} I_{nr}^{lcs} \right) + \\ &+ \alpha q_z b_z \left( mp I_{mp}^{cs} I_{nr}^{lsc} - \frac{nr}{\alpha^2} I_{mp}^{sc} I_{nr}^{lcs} \right) + \alpha a_z q_z \left( mp I_{mp}^{lcs} I_{nr}^{lsc} - \frac{nr}{\alpha^2} I_{mp}^{lsc} I_{nr}^{lcs} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{kl}^4 &= \frac{b_z h_z}{\alpha} \left( \ell p I_{kp}^{cs} I_{lr}^{sc} + kr I_{kp}^{sc} I_{lr}^{cs} \right) + \frac{a_z h_z}{\alpha} \left( \ell p I_{kp}^{lcs} I_{lr}^{sc} + kr I_{kp}^{lsc} I_{lr}^{lcs} \right) + \\ &+ q_z b_z \left( \ell p I_{kp}^{cs} I_{lr}^{lsc} + kr I_{kp}^{sc} I_{lr}^{lcs} \right) + a_z q_z \left( \ell p I_{kp}^{lcs} I_{lr}^{lsc} + kr I_{kp}^{lsc} I_{lr}^{lcs} \right); \end{aligned}$$

$$j_{pr}^{B_M} = \frac{G_0}{\chi_{pr}^2 \alpha} \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{\beta_{xi}}{\beta_{zi}} - u_i a_z - b_z \right) \frac{r\pi}{2\alpha} \cos \frac{p\pi(u_i + l)}{2} \sin \frac{r\pi(v_i + \alpha)}{2\alpha} - \right. \\ \left. - \frac{1}{q} \left( \frac{\beta_{yi}}{\beta_{zi}} - v_i q_z - h_z \right) \frac{p\pi}{2} \sin \frac{p\pi(u_i + l)}{2} \cos \frac{r\pi(v_i + \alpha)}{2\alpha} \right] e^{-js\theta_i}$$

$$p = 0..K; r = 0..L;$$

здесь  $u_i, v_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}, \beta_{zi}$  - координаты и скорости частиц в сечении  $z$ ,

$$I_{ij}^{cs} = \int_{-l}^l \cos \frac{i\pi(x+l)}{2} \sin \frac{j\pi(x+l)}{2} dx; \quad I_{ij}^{sc} = I_{ji}^{cs}; \\ I_{ij}^{lcs} = \int_{-l}^l x \cos \frac{i\pi(x+l)}{2} \sin \frac{j\pi(x+l)}{2} dx; \quad I_{ij}^{lsc} = I_{ji}^{lcs}; \\ I_{ij}^{2cs} = \int_{-l}^l x^2 \cos \frac{i\pi(x+l)}{2} \sin \frac{j\pi(x+l)}{2} dx; \quad I_{ij}^{2sc} = I_{ji}^{2cs};$$

аналогично обозначаются интегралы  $I_{ij}^{lcc}, I_{ij}^{2cc}, I_{ij}^{lss}, I_{ij}^{2ss}$ .

При учете связи (8.75) ковариантных проекций векторов электромагнитного поля с физическими, уравнения (8.89)-(8.95) представляют самосогласованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы возбуждения электромагнитных полей в нерегулярном волноводе прямоугольного сечения.

При задании граничных условий для уравнений (8.90)-(8.95) используем тот факт, что на регулярных участках волновода волновое поле представляет собой сумму прямой и обратной волн вида:

$$\sum_{mn} \left[ \dot{e}_{mn}^{e+} \cdot e^{-jK_{zmn}} \left( \dot{\vec{E}}^+ \dot{\vec{B}}^+ \right)_{mn}^e + \dot{e}_{mn}^{e-} \cdot e^{+jK_{zmn}} \left( \dot{\vec{E}}^- \dot{\vec{B}}^- \right)_{mn}^e \right] + \\ + \sum_{kl} \left[ \dot{e}_{kl}^{m+} \cdot e^{-jK_{zkl}} \left( \dot{\vec{E}}^+ \dot{\vec{B}}^+ \right)_{kl}^m + \dot{e}_{kl}^{m-} \cdot e^{+jK_{zkl}} \left( \dot{\vec{E}}^- \dot{\vec{B}}^- \right)_{kl}^m \right] \quad (8.96)$$

где  $\dot{e}_{mn}^{e\pm}, \dot{e}_{kl}^{m\pm}$  - постоянные амплитуды,  $\left( \dot{\vec{E}}^{\pm} \dot{\vec{B}}^{\pm} \right)^{e,m}$  - собственные функции  $E_{ij}$  и  $H_{ij}$  регулярного волновода,  $K_{zij} = \sqrt{W^2 - K_{tij}^2}$  - продольное волновое число,

$$K_{tij} = \sqrt{\left( \frac{i\pi}{D_{xp} - D_{ym}} \right)^2 + \left( \frac{j\pi}{D_{yp} - D_{xm}} \right)^2} - \text{поперечное волновое число.}$$

Используя соотношения (8.75) а также предполагая, что при  $z \leq 0$  волновод регулярный, запишем начальные условия для амплитуд:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{mn}^e(0) &= (\dot{e}_{mn}^{e-} - \dot{e}_{mn}^{e+}) \cdot K_{zmn} / K_{tmn}(0), \\
\dot{B}_{mn}^e(0) &= (\dot{e}_{mn}^{e-} + \dot{e}_{mn}^{e+}) \cdot W / K_{tmn}(0), \\
\dot{A}_{kl}^M(0) &= (\dot{e}_{kl}^{M+} + \dot{e}_{kl}^{M-}) \cdot W / K_{tkl}(0), \\
\dot{B}_{kl}^M(0) &= (\dot{e}_{kl}^{M+} - \dot{e}_{kl}^{M-}) \cdot K_{zkl} / K_{tkl}(0),
\end{aligned} \tag{8.97}$$

Безразмерная мощность, переносимая волновым полем через поперечное сечение волновода в выбранных переменных имеет вид

$$P(z) = -\alpha \cdot \sum_s \left[ \sum_{mn} \chi_{mn}^2 \operatorname{real}(\dot{A}_{smn}^e \dot{B}_{smn}^{e*}) + \sum_{kl} \chi_{kl}^2 \operatorname{real}(\dot{A}_{skl}^M \dot{B}_{skl}^{M*}) \right]. \tag{8.98}$$

Исходя из представления (8.96) на регулярных участках, а также в точках волновода, где  $a_z = b_z = q_z = h_z = 0$ , мощности прямой и обратной волн в выбранных безразмерных переменных выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
P^\pm &= -\alpha \cdot \sum_s \left\{ \sum_{mn} \chi_{mn}^2 \cdot \operatorname{real} \left[ \left( \dot{A}_{smn}^e \pm \frac{j}{K_{zmn}} \frac{d\dot{A}_{smn}^e}{dz} \right) \left( \dot{B}_{smn}^e \pm \frac{j}{K_{zmn}} \frac{d\dot{B}_{smn}^e}{dz} \right)^* \right] + \right. \\
&+ \left. \sum_{kl} \chi_{kl}^2 \cdot \operatorname{real} \left[ \left( \dot{A}_{skl}^M \pm \frac{j}{K_{zkl}} \frac{d\dot{A}_{skl}^M}{dz} \right) \left( \dot{B}_{skl}^M \pm \frac{j}{K_{zkl}} \frac{d\dot{B}_{skl}^M}{dz} \right)^* \right] \right\} \tag{8.99}
\end{aligned}$$

Эффективность взаимодействия электронного потока с возбуждаемым электромагнитным полем оценивается величиной электронного КПД

$$\eta_e = \frac{1}{Ne} \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\gamma_i(z) - \gamma_i(0)}{1 - \gamma_i(0)}; \tag{8.100}$$

или волнового КПД

$$\eta_v = \frac{P(z) - P(0)}{G_0(\gamma_0 - 1)}; \quad \eta_v^\pm = \frac{P^\pm(z) - P^\pm(0)}{G_0(\gamma_0 - 1)};$$

Расчет эффективности по разным формулам позволяет контролировать погрешность вычислений, т.к. при отсутствии потерь в стенках волновода из-

за сохранения баланса энергии должно выполняться условие  $\eta_e = \eta_v$ , а также на регулярных участках  $\eta_v = \eta_v^+ + \eta_v^-$ .

Ниже приведены *примеры моделирования приборов и устройств СВЧ на основе развитой теории.*

*ЛБВ-О на нерегулярном гофрированном волноводе прямоугольного сечения. Схема ЛБВ приведена на [Рис.8.3](#). Формируемый электронной пушкой*

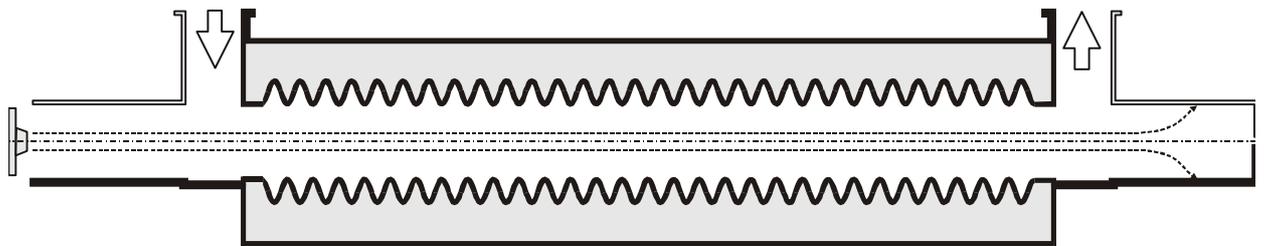


Рис. 8.3.

ленточный электронный поток, проходя в зазоре волновода с гофрированными

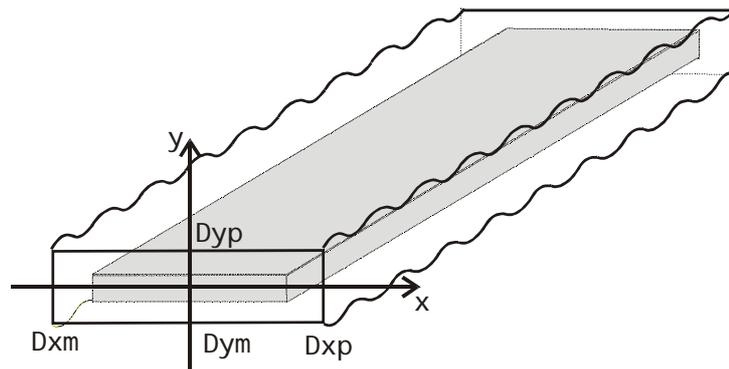


Рис.8.4

ми стенками ([Рис. 8.4](#)), взаимодействует с усиливаемой  $E_{11}$ -волной и другими связанными с ней волнами, после чего осаждается на коллекторе. Ввод сигнала и вывод СВЧ энергии осуществляется через согласованные переходы. В области взаимодействия создано однородное магнитное поле  $\vec{F} = F_0 \vec{z}_0$ , обеспечивающее минимизацию поперечных составляющих скорости пучка.

Профиль гофра задавался в виде:

$$D_{xm} = -D_{xo}; \quad D_{ym} = -D_{yo} - h_{ym}(z) \sin^2(n_{ym}\pi z / L); \quad (8.101)$$

$$D_{xp} = D_{xo}; \quad D_{yp} = D_{yo} + h_{yp}(z) \sin^2(n_{yp}\pi z / L).$$

В математической модели ЛБВ-О приняты трехмерные уравнения движения крупных частиц ([8.89](#)) с начальными условиями  $\vec{\beta}_i^0 = \beta_0 \vec{z}_0, \vec{r}_{\perp i}^0 = 0$ . Начальные условия для амплитуд ([8.87](#)) задавались исходя из того, что на вход

подается сигнал в виде падающей  $E_{11}$  - волны с амплитудой  $e_{11re}^{e^0} = e^0$ , амплитуды всех остальных распространяющихся волн задавались равными нулю. Тем самым обеспечивается полное согласование на входном конце лампы. Исходя из условия селекции рабочей  $E_{11}$ -волны на базовой частоте, были выбраны безразмерные (отнесенные к  $\lambda_0/2\pi$ ) значения  $D_{xo}=10, D_{yo}=2$ . Оптимизировались: глубина гофра  $h_{ym}(z)=h_{yp}(z)=h_y(z)$ , длина гребенки  $L$ , количество периодов  $n_{ym}=n_{yp}=n_y$ , ток пучка  $I_0$  амплитуда сигнала  $e^0$ . Анализ показывает, что в волноводе при таких размерах распространяется 12 типов волн, однако в результате расчетов выяснилось, что основной "паразитной" волной в рассматриваемой ЛБВ-О является волна  $HE_{11}$ , которая связана в нерегулярном волноводе с волной  $E_{11}$  и оказывает существенное влияние на процесс усиления. Все другие распространяющиеся типы волн не возбуждаются.

Был произведен поиск оптимизированных по величине волнового КПД вариантов ЛБВ-О в диапазоне напряжений электронного пучка ( $0.5 \leq \beta_0 \leq 0.85$ ). Анализ полученных результатов показал необходимость учета  $HE_{11}$  - волны. Оказалось, что предварительные расчеты по упрощенной модели с учетом только  $E_{11}$ - волны дают значительную погрешность. При  $\beta_0 > 0.7$  были найдены варианты с КПД 36% на регулярной гребенке и с КПД 57% на нерегулярной. Ниже приведены два варианта.

Вариант1(регулярная гребенка):

$$\beta_0 = 0.75, \quad I_0 = 100 \text{ A}, \quad L = 71, \quad n_y = 40, \quad h_y = 1.34, \\ e^0 = 0.0025, \quad \eta = 32\%, \quad K_u = 13 \text{ Дб}.$$

Вариант2: (нерегулярная гребенка)

$$\beta_0 = 0.85, \quad I_0 = 386 \text{ A}, \quad L = 88, \quad n_y = 40, \quad \eta = 57\%, \quad K_u = 23 \text{ Дб}.$$

В этом варианте глубина гофра изменяется в пределах  $1.005 < h_y < 1.345$ .

За счет оптимального профилирования глубины гофра эффективность лампы может быть увеличена примерно в 1.5-2 раза.

Таким образом, полученная математическая модель позволяет производить расчеты и оптимизацию ЛБВ-О с нерегулярным профилем гофра замедляющей системы. Проведенные исследования показали высокую эффективность ЛБВ-О с замедляющей системой в виде гребенки с оптимально профилированным гофром. Причем, с увеличением напряжения электронного пучка КПД такой лампы возрастает.

*Заграждающий фильтр на основе периодического гофра.* Рассмотрим расчет заграждающего фильтра для волны  $H_{10}$  - типа. Геометрия отрезка волновода, выполняющего функции фильтра представлена на [Рис. 8.4](#). Профиль гофра задавался формулами ([8.101](#)).

При расчете фильтра граничные условия выбираются следующим образом. На входе задаются падающая  $H_{10}$  волна с амплитудой  $\dot{e}_{01}^{M+} = 1 + j0$  и отраженная  $\dot{e}_{01}^{M-} = e^{\theta} \cdot e^{j\varphi_0}$ . Амплитуды всех других волн задавались равными нулю. На выходном конце при  $z=L$  задается условие отсутствия встречной волны  $P^-(L)=0$  и минимизируется величина проходящей мощности  $P^+(L)$ . В уравнениях (19)-(24) полагается  $\dot{I}^C = \dot{I}^{Be} = \dot{I}^{Bm} = 0$ .

Задавались значения  $D_{x0}$ ,  $D_{y0}$  и методом пристрелки подбирались значения  $e^{\theta}$ ,  $\varphi_0$ ,  $L$ ,  $h_y$ ,  $n_y$  из условия  $P^-(L)=0$  и  $\min P^+(L)$ .

Расчеты, в частности, показали, что при  $D_{x0} < \pi$ ,  $D_{y0} < \pi$ , (т.е. пока не распространяются волны  $H_{12}$ ,  $E_{12}$ ), рассматриваемый периодический фильтр ( $h_y = \text{const}$ ) при  $n_y = 10$  обеспечивает 25ДБ затухания. При этом волны  $H_{01}$ ,  $H_{11}$ ,  $E_{11}$  не возбуждаются.

Один из вариантов такого фильтра приведен ниже:

$$D_{x0} = 1.75, D_{y0} = 2.75, L = 70.5, n_y = 10, h_y = 1.38, P^+(L)/P^+(0) = 0.0034.$$

На [Рис. 8.5](#) приведено распределение мощностей прямой и встречной волн (8.99)  $P^+(z)$ ,  $P^-(z)$ . Полоса заграждения такого фильтра уменьшается с увеличением  $n_y$ .

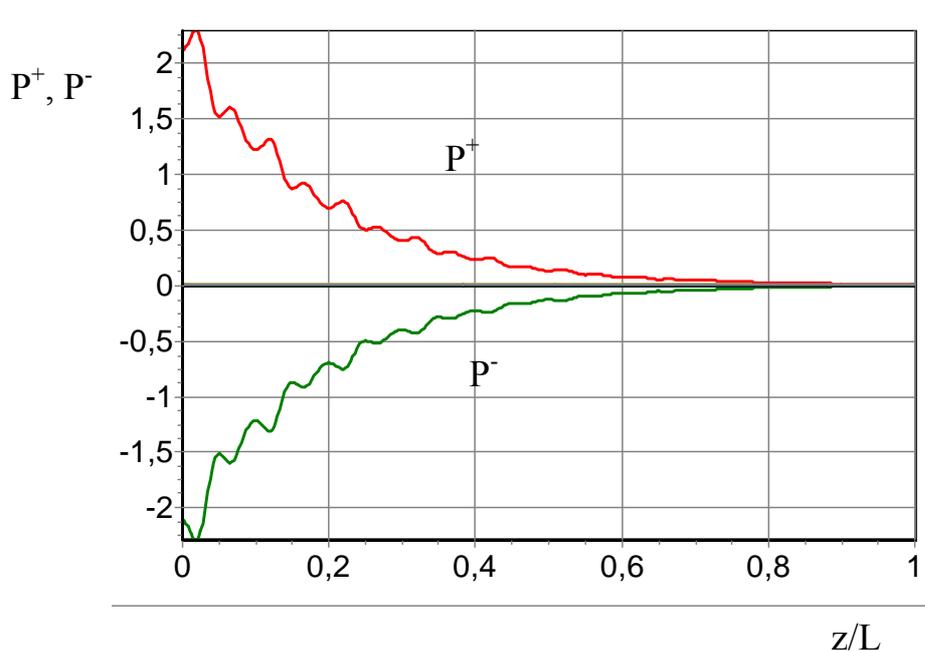


Рис 8.5.

*Расчет дисперсионных характеристик периодического волновода.* При расчете дисперсионных характеристик волн в периодических волноводах искомое решение для поля в волноводе подчиняется условию Флоке:

$$\left( \dot{\vec{E}}(x, y, z + kd), \dot{\vec{B}}(x, y, z + kd) \right) = \left( \dot{\vec{E}}(x, y, z), \dot{\vec{B}}(x, y, z) \right) \cdot e^{jk\varphi_0}. \quad (8.102)$$

здесь  $d$  - период,  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$  - набег фазы нулевой пространственной гармоники поля. Постоянные распространения пространственных гармоник определяются через  $\varphi_0$  и  $d$  по формуле:

$$\beta_{\varphi n} = \frac{d}{\varphi_0 + 2n\pi}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \beta_{\varphi n} = v_{\varphi n} / c \quad (8.103)$$

$v_{\varphi n}$  - фазовая скорость гармоники.

При расчете зависимости  $\varphi_0(W)$  для волны определенного типа ( $E_{mn}$  или  $H_{kl}$ ) граничные условия при  $z=0$  задаются следующим образом:  $\dot{e}_{ij}^+ = 1$ ,  $\dot{e}_{ij}^- = e_{or}$ . Методом пристрелки подбираются  $e_{or}$ ,  $\varphi_0$ , для которых выполняются условия при  $z=d$ , вытекающие из (8.102):

$$\dot{A}_{ij}(d) = \dot{A}_{ij}(0) \cdot e^{j\varphi_0}; \quad \dot{B}_{ij}(d) = \dot{B}_{ij}(0) \cdot e^{j\varphi_0}.$$

Анализ решений этой задачи, в частности, показал, что для отрезка периодического волновода нельзя одновременно удовлетворить условию (8.102) и условиям полного согласования на входе и выходе  $\dot{A}^-(0) = \dot{B}^-(0) = \dot{A}^-(L) = \dot{B}^-(L) = 0$ . Следовательно, решение, удовлетворяющее условию Флоке, является суперпозицией попутной и встречной волн и не реализуется в практически важных случаях, когда необходимо выполнение условий согласования. Однако, пространственные гармоники всегда присутствуют в волновом поле периодического волновода, хотя их амплитуды отличны от тех, которые реализуются в волновом поле Флоке. Поэтому знание их постоянных распространения позволяет предсказывать условия усиления и генерации волн электронными потоками.

В качестве примера расчета на Рис. 8.6. приведена зависимость  $\varphi_0(W)$  для периодического гофрированного волновода, используемого в приведенном выше варианте 1 ЛБВ-0. Верхняя кривая соответствует расчету для  $E_{11} + HE_{11}$  волны, нижняя - для  $E_{11}$  без учета  $HE_{11}$ . Анализ показывает, что при  $\dot{W} = 1$  нулевая пространственная гармоника  $E_{11} + HE_{11}$  имеет замедление  $\beta_{\varphi 0} = 0.71$ , эта же гармоника  $E_{11}$ -волны имеет замедление  $\beta_{\varphi 0} = 0.755$ . Таким образом, усиление в этом варианте реализуется при синхронизме именно с пространственной гармоникой комбинированной  $E_{11} + HE_{11}$  волны.

Развитая строгая теория произвольно-нерегулярного волновода с прямоугольным сечением позволяет корректно решать широкий круг задач анализа и оптимизации электронных приборов и устройств СВЧ. Приведенные в статье примеры демонстрируют недопустимость использования в этих задачах упрощенных теорий, в которых не учитывается связь различных типов волн в нерегулярных периодических и непериодических волноводах.

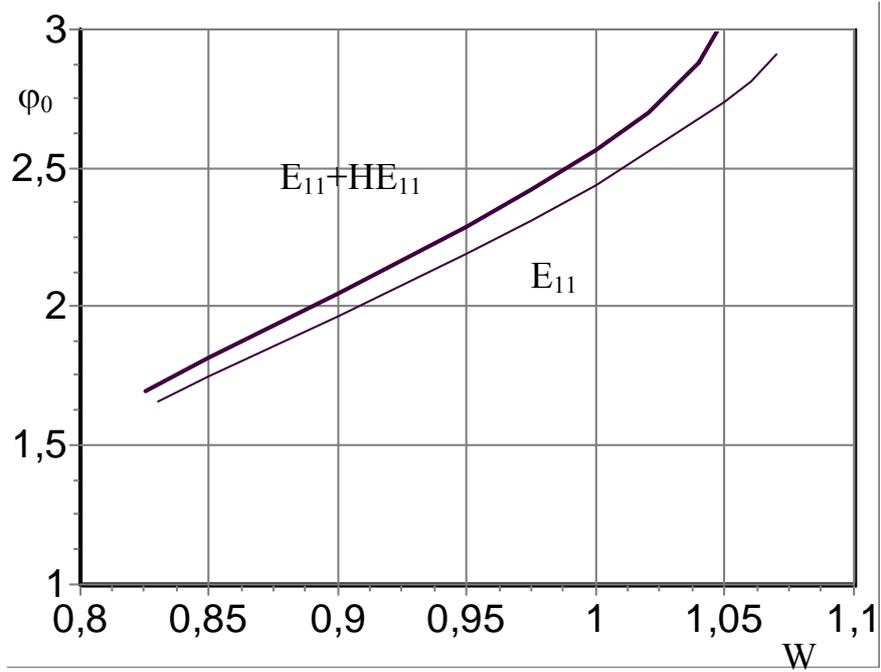


Рис.8.6.

## 8.9 Т-функции для решения двухточечных задач в теории нерегулярных волноводов

В [п.8.4](#) развита общая теория произвольно-нерегулярных волноводов, основанная на отображении произвольно-нерегулярной внутренней поверхности волновода на регулярный цилиндр. В преобразованной (косоугольной) системе координат решение представляется в виде связанных нормальных волн с использованием проекционной процедуры. При этом амплитуды связанных волн определяются системой ОДУ с переменными коэффициентами, вид которых определяется профилем нерегулярного волновода. Граничные условия к этой системе ставятся в начальном и конечном сечении отрезка нерегулярного волновода (двухточечная задача). Решение этой задачи традиционными методами не встречает затруднений, если рассматриваются только распространяющиеся волны. Как показано ниже, для точного расчета волновода необходим учет и связанных с распространяющимися закритических волн, существенно меняющих характеристики волновода. Однако для закритических волн численное решение граничной (двухточечной) задачи с использованием пошаговых методов типа Рунге-Кутты или Хемминга невозможно из-за их быстрой расходимости (из-за малых ошибок появляются резко возрастающие решения). В этом случае необходимо строить аналитические решения на системе заданных узловых точек, удовлетворяющие граничным условиям краевой задачи и представляющие собой разложение искомым функций в базисе специальных функций, обеспечивающих разрешимость получающейся системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Такие специальные дискретно определенные Т-функции введены и описаны ниже.

### 8.9.1 Т-функции

Будем предполагать, что эти функции определены на системе  $N$  равноотстоящих точек  $t_m$ :  $t_0, t_1 \dots t_{N-1}$  интервала  $L_N$ . Интервал  $L_N$  определим следующим образом:

$$L_N = 2\pi \frac{\sin(\pi/N)}{(\pi/N)} = 2N \sin(\pi/N). \quad (8.104)$$

В пределе при  $N \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_N = 2\pi \lim \frac{\sin(\pi/N)}{(\pi/N)} = 2\pi.$$

$$\text{Кроме того, } t_m = mh, \quad h = \frac{L_N}{N} = 2 \sin(\pi / N). \quad (8.105)$$

Определим системы базисных функций  $k$ -го порядка первого рода  $tc_{Nk}(kt_m)$  и второго рода  $ts_{Nk}(kt_m)$  следующим образом:

$$tc_{Nk}(kt_m) = \cos\left(\frac{2\pi k}{L_N} t_m\right) = \cos\left(\frac{\pi k \cdot t_m}{N \sin(\pi / N)}\right), \quad (8.106)$$

$k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$   $k$  – целое число.

$$ts_{Nk}(kt_m) = \sin\left(\frac{2\pi k}{L_N} t_m\right) = \sin\left(\frac{\pi k \cdot t_m}{N \sin(\pi / N)}\right). \quad (8.107)$$

Введем также комплексную  $te_{Nk}$ -функцию

$$te_{Nk}(kt_m) = tc_{Nk}(kt_m) + jts_{Nk}(kt_m). \quad (8.108)$$

В пределе  $N \rightarrow \infty, \Delta t_N \rightarrow 0, t_m \rightarrow t$ , имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} tc_{Nk}(kt_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{(\pi / N)}{\sin(\pi / N)} kt_m\right) = \cos kt,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ts_{Nk}(kt_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{(\pi / N)}{\sin(\pi / N)} kt_m\right) = \sin kt,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} te_{Nk}(kt_m) = \cos(kt) + j \sin kt = e^{jkt}.$$

Таким образом, в пределе, для непрерывного аргумента  $t$ ,  $T_{Nk}$ -функции переходят в обычные тригонометрические функции.

В дискретном же варианте, как следует из определений (8.106), (8.107), имеют место иные соотношения:

$$tc_{Nk}(kt_m) = \cos(kx_m), \quad (8.109)$$

$$ts_{Nk}(kt_m) = \sin(kx_m), \quad (8.110)$$

где  $x_m = \frac{2\pi}{N} m$ ,  $t_m = \frac{2 \sin(\pi / N)}{N} m$ .

Таким образом, аргументы в  $T$ -функциях и тригонометрических функциях  $k$ -го порядка различны. Это различие и реализует основное свойство  $T$ -

функций на дискретном множестве точек  $t_m$ , приводящее к аналитическим решениям: производные от этих функций на множестве  $t_m$  с точностью до коэффициента равны самим функциям. Действительно:

$$tc'_{Nk}(kt^m) = -R_k ts_{Nk}(kt^m), \quad (8.111)$$

$$ts'_{Nk}(kt^m) = R_k tc_{Nk}(kt^m), \quad (8.112)$$

$$te'_{Nk}(kt^m) = jR_k ie_{Nk}(kt^m), \quad (8.113)$$

$$tc''_{Nk}(kt_m) = -R_k^2 tc_{Nk}(kt_m), \quad (8.114)$$

$$ts''_{Nk}(kt_m) = -R_k^2 ts_{Nk}(kt_m), \quad (8.115)$$

$$te''_{Nk}(kt_m) = -R_k^2 te_{Nk}(kt_m), \quad (8.116)$$

$$R_k = \sin(\pi k / N) / \sin(\pi / N).$$

### 8.9.2 Взаимодействие $H_{oi}$ волн в гофрированном волноводе с круговым сечением

Воспользуемся общей теорией нерегулярных волноводов, развитой в [26]. В рассматриваемом случае система дифференциальных уравнений для амплитуд связанных волн  $H_{o1}(\dot{A}_1), \dots, H_{oi}(\dot{A}_i)$  имеет вид (источники внутри отрезка волновода отсутствуют):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \dot{A}_i}{dT^2} + \left( 1 - \left( \frac{\mu_i}{\mu_1} \right)^2 \frac{1}{g^2} - \frac{1}{3} \mu_i^2 \left( \frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \right)^2 \right) \dot{A}_i - \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^I \left[ \frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \gamma_{ij}^{(4)} \frac{d\dot{A}_j}{dT} + \left[ \left( \frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \right)^2 \gamma_{ij}^{(5)} - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dT^2} \gamma_{ij}^{(6)} \right] \dot{A}_j \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.117)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

Здесь  $T = \frac{2\pi}{\lambda} z$ ,  $z$  - расстояние вдоль оси волновода,  $0 \leq T \leq L_0$ ,  $\lambda$  - длина волны в свободном пространстве;  $g(T) = b(z)/b_{1kp}$ ,  $b(z)$  - радиус внут-

ренной поверхности нерегулярного волновода,  $b_{1кр}$  – критический радиус для волны  $H_{01}$ ,  $b_{1кр} = \lambda \cdot \mu_1 / 2\pi$ ,  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ) – корни производной функции Бесселя 1-го рода нулевого порядка ( $J'_0(\mu_i) = 0$ ).

$$\gamma_{ij}^{(4)} = \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \frac{2J_0(\mu_i)}{J_0(\mu_j)},$$

$$\gamma_{ij}^{(5)} = \left[ \frac{\mu_i \mu_j (\mu_i^2 + 3\mu_j^2)}{(\mu_i^2 - \mu_j^2)^2} \right] \cdot \frac{2J_0(\mu_i)}{J_0(\mu_j)},$$

$$\gamma_{ij}^{(6)} = -\frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \frac{2J_0(\mu_i)}{J_0(\mu_j)}.$$

В случае, когда а) вход и выход отрезка нерегулярного волновода согласованы; б) на входе и выходе выполняются условия:  $\frac{dg}{dT}(0) = \frac{dg}{dT}(L_0) = 0$ ; в) сигнал подается только с левого конца и только на волне  $H_{01}$ , граничные условия в системе (8.117) имеют вид [26]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{A}_i}{dT}(0) &= j \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2} / g_0^2 \dot{A}_i(0), \\ \frac{d\dot{A}_i}{dT}(L_0) &= -j \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2} / g_L^2 \dot{A}_i(L_0) \end{aligned} \right\}, \quad (8.118)$$

причем, при  $\left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2 / g^2 > 1$   $\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2} / g^2 = -j \sqrt{\left(\frac{\mu_1}{\mu_i}\right)^2 / g^2 - 1}$ . Здесь  $g_0 = g(0)$ ,  $g_L = g(L_0)$ .

Рассмотрим исходную систему (8.117) в виде, удобном для дальнейшего численного счета:

$$\frac{d^2 \dot{A}_i}{dT^2} + Q_i(T) \dot{A}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^I \left[ G_{ij}(T) \frac{d\dot{A}_j}{dT} + Q_{ij}(T) \dot{A}_j \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8.119)$$

где  $G_{ij} = \frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \gamma_{ij}^{(4)}$ ,  $i \neq j$ ,

$$Q_i(T) = 1 - \left( \frac{\mu_i}{\mu_1} \right)^2 \frac{1}{g^2(T)} - \frac{1}{3} \mu_i^2 \left( \frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \right)^2,$$

$$Q_{ij}(T) = \left( \frac{1}{g} \frac{dg}{dT} \right)^2 \gamma_{ij}^{(5)} - \frac{1}{g} \frac{d^2g}{dT^2} \gamma_{ij}^{(6)}, \quad i \neq j;$$

Профиль волновода зададим следующим образом

$$g(T) = 1 + \Delta + H \cdot \sin^2 \left( a_1 \left( \frac{T}{L_0} \right) + a_3 \left( \frac{T}{L_0} \right)^3 + a_5 \left( \frac{T}{L_0} \right)^5 \right). \quad (8.120)$$

Далее представим  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dots, \dot{A}_I$  в виде разложения в ряды по Т-функциям:

$$\dot{A}_i(t_m) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_{ik} te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right), \quad N = N_1 + N_2 + 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.121)$$

(Обычно  $N_1 = N_2$ ).

Здесь  $N$  – число точек на интервале  $[0; L_0]$ ;  $r = \frac{L_0}{L_N}$ , где  $L_N$  – период Т-функций, т.е.

$$L_N = 2\pi \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N} = 2N \sin(\pi/N).$$

По определению (8.108):

$$te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) = \exp \left( j \frac{\pi k t_m}{r N \sin(\pi/N)} \right).$$

Первая и вторая производные этой функции благодаря свойствам (8.113) и (8.116) выражаются соответственно как:

$$te'_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) = j R_k te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right),$$

$$te''_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) = -R_k^2 te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right), \quad (8.122)$$

где  $R_k = \sin \left( \frac{\pi k}{N} \right) / (r \sin(\pi/N))$ .

Подставляем (8.121) в (8.119) с учетом (8.122) (для всех точек  $t_m$ , исключая первую  $t_1$  и последнюю  $t_N$ ):

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \cdot R_k^2 \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) + \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \cdot Q_i(T) \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) + \\
& + j \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{1k} \cdot G_{i1}(T) \cdot R_k \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) - \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_{1k} \cdot Q_{i1}(T) \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) + \\
& + j \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{2k} \cdot G_{i2}(T) \cdot R_k \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) - \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_{2k} \cdot Q_{i2}(T) \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) \dots = 0, \\
& i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{8.123}$$

Группируя слагаемые в (8.123) относительно коэффициентов разложений  $c_{ik}$ , имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \left[ \left( -R_k^2 + Q_i(T) \right) te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) \right] - \\
& - \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{1k} \left[ \left[ -jG_{i1}(T)R_k + Q_{i1}(T) \right] \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) \right] - \\
& - \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{2k} \left[ \left[ -jG_{i2}R_k + Q_{i2}(T) \right] \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_m}{r} \right) \right] - \dots = 0, \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{8.124}$$

В полученной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) множество  $\{c_{ik}\}$  представляет собой вектор неизвестных; а стоящие в квадратных скобках выражения – матричные элементы СЛАУ. В крайних точках ( $t_1$  и  $t_N$ ) используется уравнение (8.118), выражающее граничные условия задачи.

Первые производные берутся в соответствии с конечно-разностным определением правосторонней производной (это не влияет на общую точность решения):

$$\frac{d\dot{A}_i(0)}{dT} = \frac{\dot{A}_i(t_2) - \dot{A}_i(t_1)}{h}; \quad h = \frac{L_N}{N};$$

$$\frac{d\dot{A}_i(L_0)}{dT} = \frac{\dot{A}_i(t_N) - \dot{A}_i(t_{N-1})}{h}; \quad i = 1, 2, \dots$$

Используя представление (8.121), получаем:

$$\frac{d\dot{A}_i(0)}{dT} = \frac{1}{h} \left( \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \left[ te_{Nk} \left( \frac{kt_2}{r} \right) - te_{Nk} \left( \frac{kt_1}{r} \right) \right] \right),$$

$$\frac{d\dot{A}_i(L_0)}{dT} = \frac{1}{h} \left( \sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \left[ te_{Nk} \left( \frac{kt_N}{r} \right) - te_{Nk} \left( \frac{kt_{N-1}}{r} \right) \right] \right).$$

Заменяя  $\frac{d\dot{A}_{1,i}(0)}{dT}$  и  $\frac{d\dot{A}_{1,i}(L_0)}{dT}$  правой частью уравнений граничных условий (8.118) и учитывая, что

$$\left[ te_{Nk} \left( \frac{kt_2}{r} \right) - te_{Nk} \left( \frac{kt_1}{r} \right) \right] / h = -jR_K te_{Nk} \left( \frac{kt^1}{r} \right), \text{ где } t^1 = t_1 + h/2 \text{ и что}$$

$\left[ te_{Nk} \left( \frac{kt_N}{r} \right) - te_{Nk} \left( \frac{kt_{N-1}}{r} \right) \right] / h = -jR_K te_{Nk} \left( \frac{kt^{N-1}}{r} \right)$ , где  $t^{N-1} = t_{N-1} + h/2$ , окончательно получаем дополняющие систему (8.124) уравнения в крайних точках  $t_1$  и  $t_N$ :

$$\sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{1k} \left[ jR_k te_{Nk} \left( \frac{kt^1}{r} \right) - j\sqrt{1-1/g_0^2} \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_1}{r} \right) \right] = \dot{A}_{01}, \quad (8.125)$$

$$\sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \left[ jR_k te_{Nk} \left( \frac{kt^1}{r} \right) - j\sqrt{1-\left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2 / g_0^2} \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_1}{r} \right) \right] = 0, \quad (8.126)$$

$$\sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{1k} \left[ jR_k te_{Nk} \left( \frac{kt^{N-1}}{r} \right) + j\sqrt{1-1/g_L^2} \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_N}{r} \right) \right] = 0, \quad (8.127)$$

$$\sum_{k=-N_1}^{N_1} c_{ik} \left[ jR_k te_{Nk} \left( \frac{kt^{N-1}}{r} \right) + j\sqrt{1-\left(\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)^2 / g_L^2} \cdot te_{Nk} \left( \frac{kt_N}{r} \right) \right] = 0. \quad (8.128)$$

Уравнения (8.124) вместе с (8.125)...(8.128) образуют полную СЛАУ для определения коэффициентов  $\{c_{ik}\}$ . После ее решения искомые распределения комплексных амплитуд волн  $\dot{A}_1(t_m)$ , ...,  $\dot{A}_i(t_m)$  определяются по формулам (8.121).

### 8.9.3 Результаты расчета

Точность расчетов по уровню относительной погрешности баланса мощностей волн  $\delta=1.5\%$  во всех ниже приведенных вариантах обеспечивалось при числе узловых точек  $N$  в пределах  $101\dots 121$ . Расчет проводился для трансформатора моды  $H_{01}$  в моду  $H_{02}$  на нерегулярном волноводе. Трансформирующий участок представляет собой плавно расширяющийся гофрированный волновод с одним, двумя гофрами и волновод с оптимизированным профилем. Оптимизация профиля трансформатора осуществлялась в соответствии с процедурой оптимизации, описанной в [26].

На [рис. 8.7](#) приведены данные расчета для трансформатора с одним гофром. На [рис. 8.7, а](#) изображен профиль трансформатора  $g(T)$ . Уровни, проведенные штриховыми линиями, указывают критические сечения  $g_{кри}$  для волн  $H_{02}$ ,  $H_{03}$ ,  $H_{04}$ , на регулярных участках волновода. Оптимизация профиля указывает на то, что наилучшая трансформация волны  $H_{01}$  в волну  $H_{02}$  достигается при радиусе выходного регулярного участка, близком к критическому для волны  $H_{02}$ . На [рис. 8.7, б](#) приведены распределения модулей амплитуд  $A_i = |\dot{A}_i|$  волн  $H_{0i}$  ( $i = \overline{1,5}$ ) по длине трансформатора. Расчеты показали, что учет волны  $H_{06}$  не меняет результатов в пределах допускаемой относительной погрешности по мощности  $\delta=1.5\%$ . Расчеты без учета  $H_{04}$ ,  $H_{05}$  волн также дают удовлетворительные результаты:  $\delta$  не превышает  $5\%$  (по отношению к расчетам с учетом  $H_{04}$ ,  $H_{05}$ ,  $H_{06}$  волн). Таким образом, сходимость проекционной процедуры по числу типов волн  $i$  весьма высока. Однако, существенным является учет ближайшей закритической волны  $H_{03}$ : без ее учета результаты оказываются совершенно неверными. Это указывает на необходимость учета хотя бы ближайших закритических волн при расчетах нерегулярных волноводов.

На [рис.8.7, в](#) приведены распределения “парциальных” потоков мощностей волн  $H_{01}$ ,  $H_{02}$ ,  $H_{03}$ , ...,  $H_{0i}$  через поперечные сечения трансформатора в положительном направлении  $T$  (или  $z$ ).

$$P_i = \frac{\pi}{2} \cdot J_0^2(\mu_i) \cdot Jm(\dot{A}_i \frac{d\dot{A}_i^*}{dt})$$

Отрицательные значения  $P_i$  соответствуют обратным (по  $T$ ) “парциальным” потокам мощности. В сечениях  $T$ , где  $\frac{dg}{dT} = 0$  и волны энергетически не связаны,  $P_i$  приобретают смысл реальных потоков мощностей волн  $H_{0i}$  и  $P_\Sigma = \sum_{i=1}^5 P_i$  представляют собой полную мощность, переносимую через эти сечения (т. е. разность потоков мощности, идущих вправо и влево через это сечение). Контроль точности расчетов осуществлялся по сохранению суммарного потока мощности  $P_\Sigma$  вдоль интервала  $T$  в точках, где  $\frac{dg}{dT} = 0$ .

На [рис. 8.7, г](#) приведены распределения  $P_1$  и  $P_2$ , рассчитанные без учета закритической волны  $H_{03}$ . Сравнение этих результатов с данными [рис. 8.7, в](#) указывает на необходимость учета этой закритической волны, как указывалось выше.

Как следует из [рис. 8.7](#), для данного варианта трансформатора с простейшей конфигурацией профиля полного преобразования волны  $H_{01}$  в  $H_{02}$  не происходит:  $P_1$  на выходе не близка к нулю.

На [рис. 8.8](#) приведены аналогичные данные расчетов для трансформатора с двумя гофрами. Форма представления этих результатов та же, что и в предыдущем случае. Суть этих данных остается прежней: 1) для обеспечения необходимой точности необходимо учитывать взаимодействие распространяющихся волн  $H_{01}$  и  $H_{02}$  с закритическими вплоть до  $H_{05}$ ; 2) оптимизированный двухгофровый трансформатор, как и одногофровый, не обеспечивает полного преобразования волны  $H_{01}$  в  $H_{02}$ , необходима полная оптимизация профиля.

На [рис. 8.9](#) приведены результаты полной оптимизации профиля трансформатора: [рис. 8.9, а](#) – оптимизированный профиль, [рис. 8.9, б](#) – распределение  $P_i$  для  $H_{01}$ ,  $H_{02}$  и  $H_{03}$  волн. Трансформация мод в этом варианте практически полная. Существенную роль в преобразовании  $H_{01}$  в  $H_{02}$  волну играет закритическая волна  $H_{03}$ , как это видно из [рис. 8.9, б](#).

Наконец, следует указать и на эффективность использования аппарата Т-функций. Прямое интегрирование системы ДУ ([8.117](#)) при граничных условиях ([8.118](#)) пошаговыми методами Рунге-Кутты и Хемминга оказалось невозможным при учете закритических волн из-за расходимости этих методов (из-за малых ошибок появляются быстро возрастающие решения). Использование же в качестве базисов представления искомого решения традиционных систем функций – тригонометрических, ортогональных полиномов, атомарных функций, не обладающих свойствами Т-функций, приводит к плохо обусловленным СЛАУ и при числе узловых точек порядка 100 их решение из-за накопления ошибок не дает нужного результата.

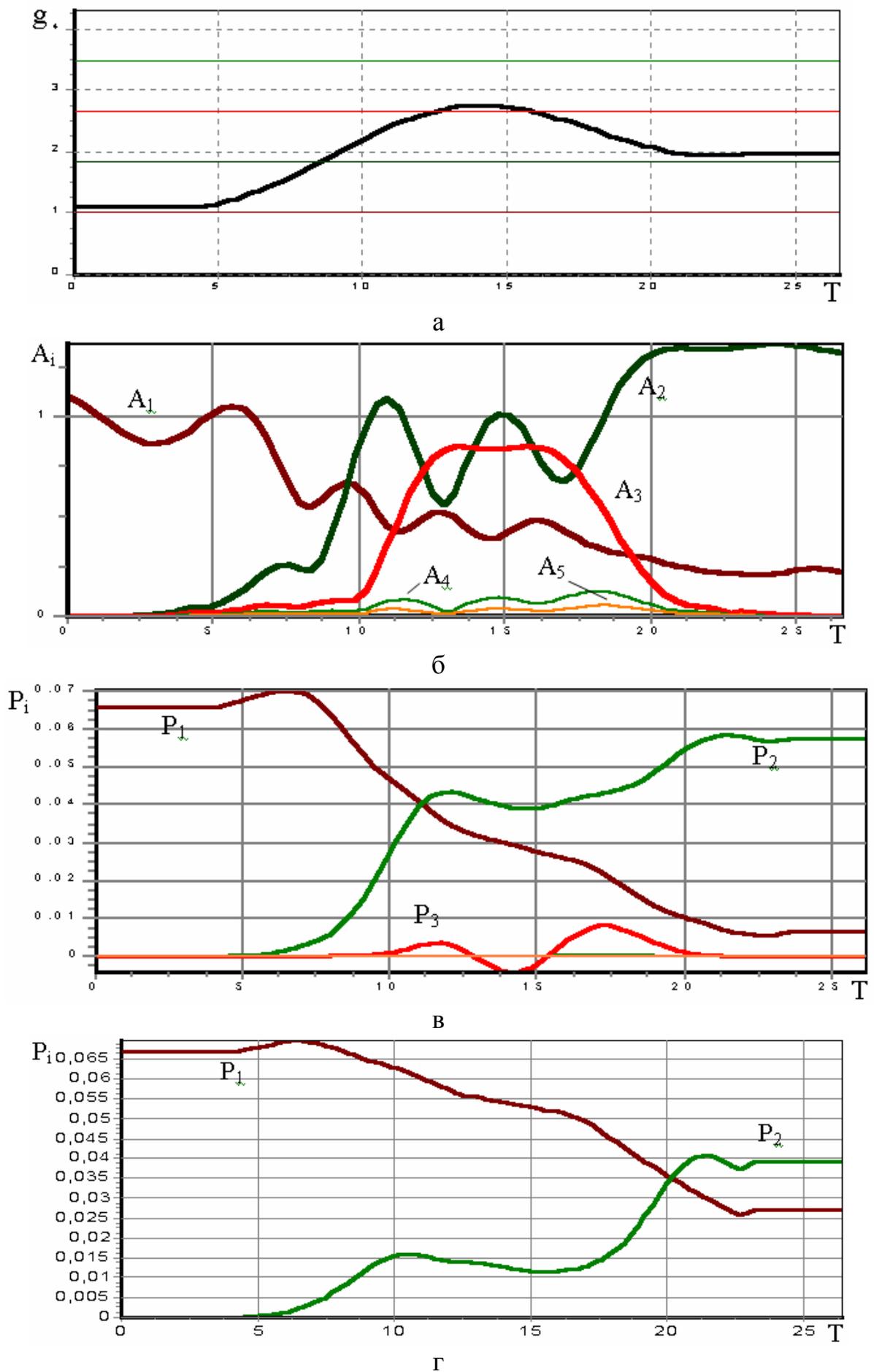
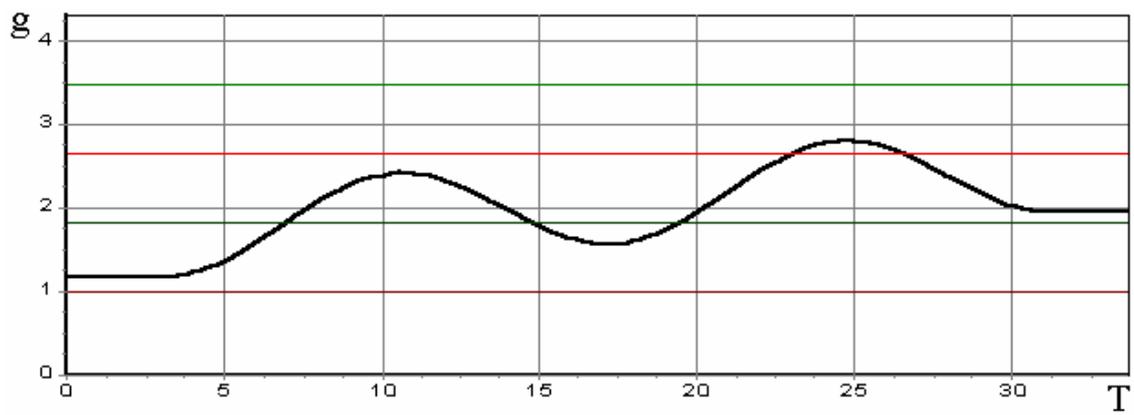
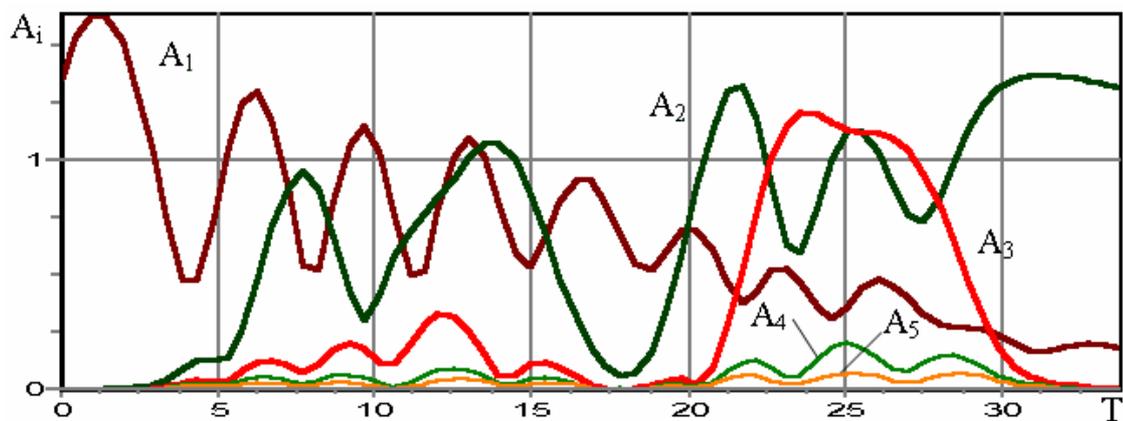


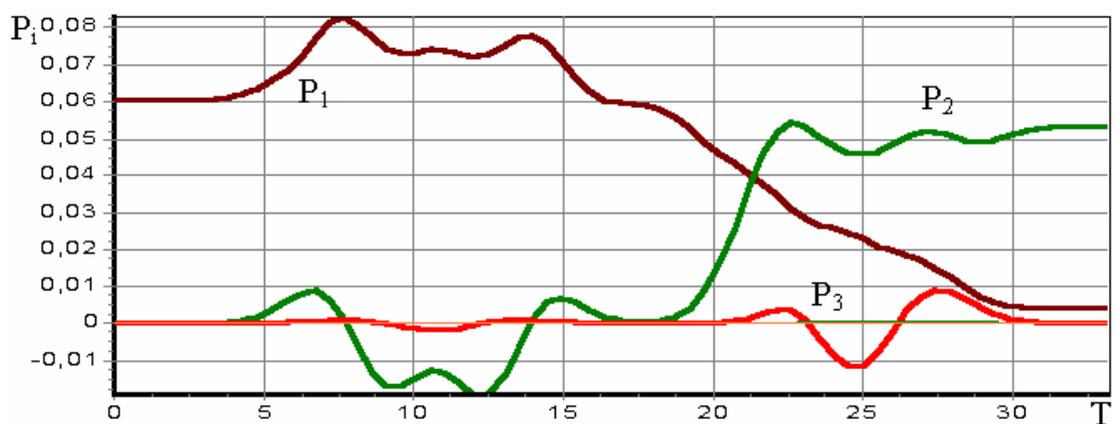
Рис. 8.7



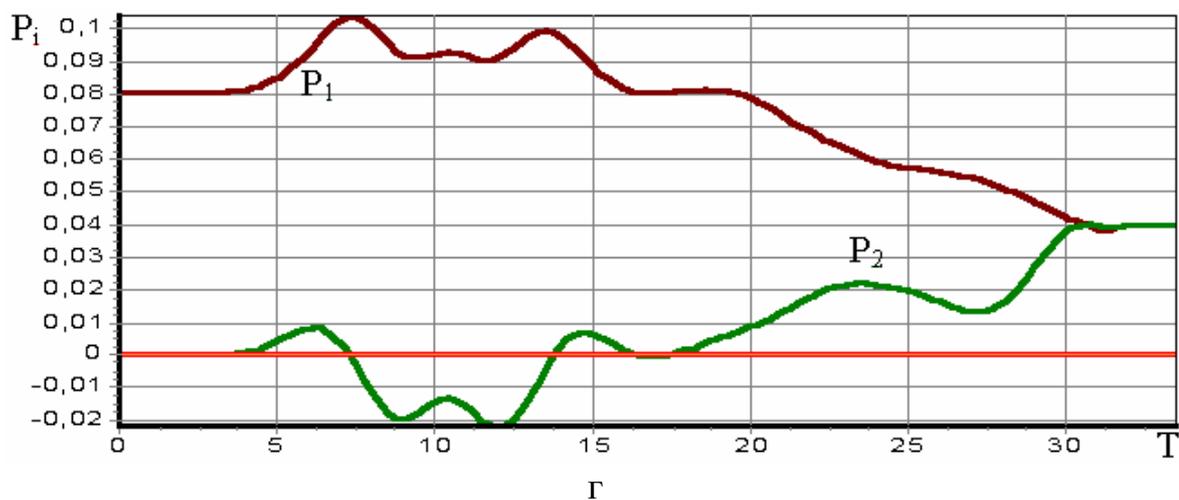
a



б



B



Г

Рис. 8.8

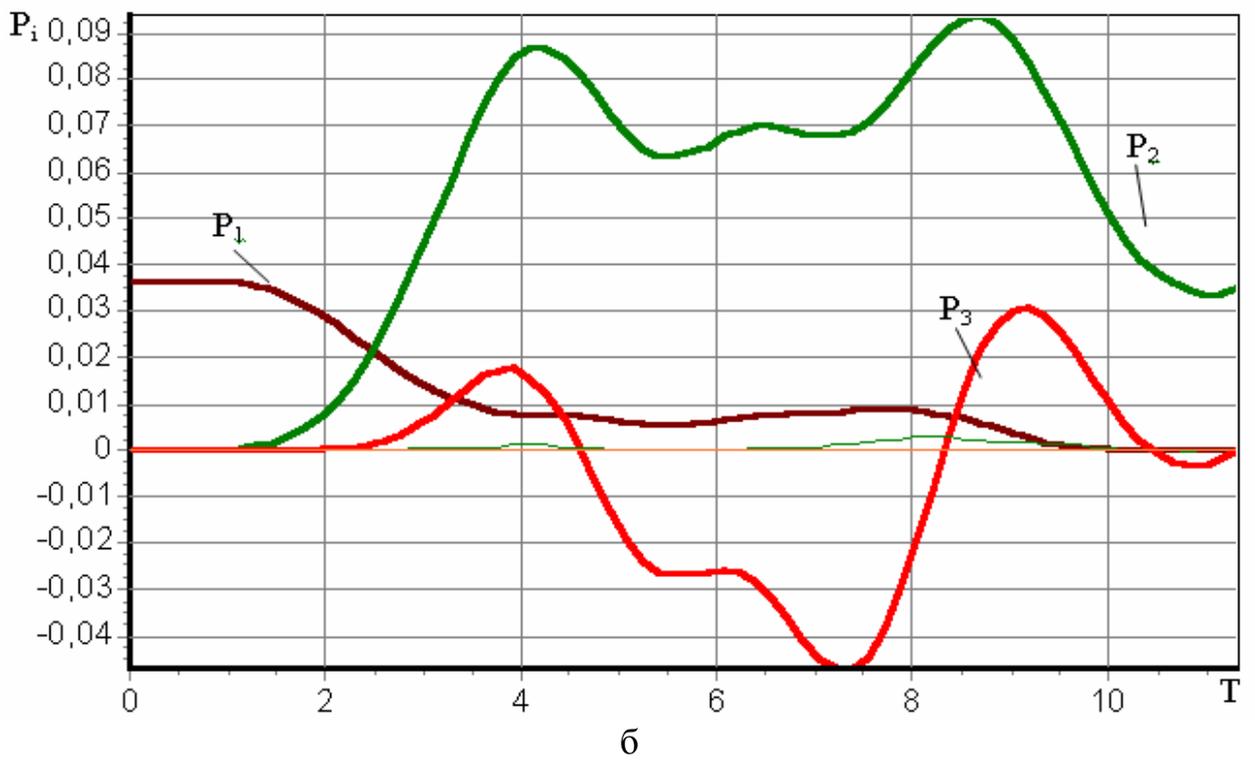
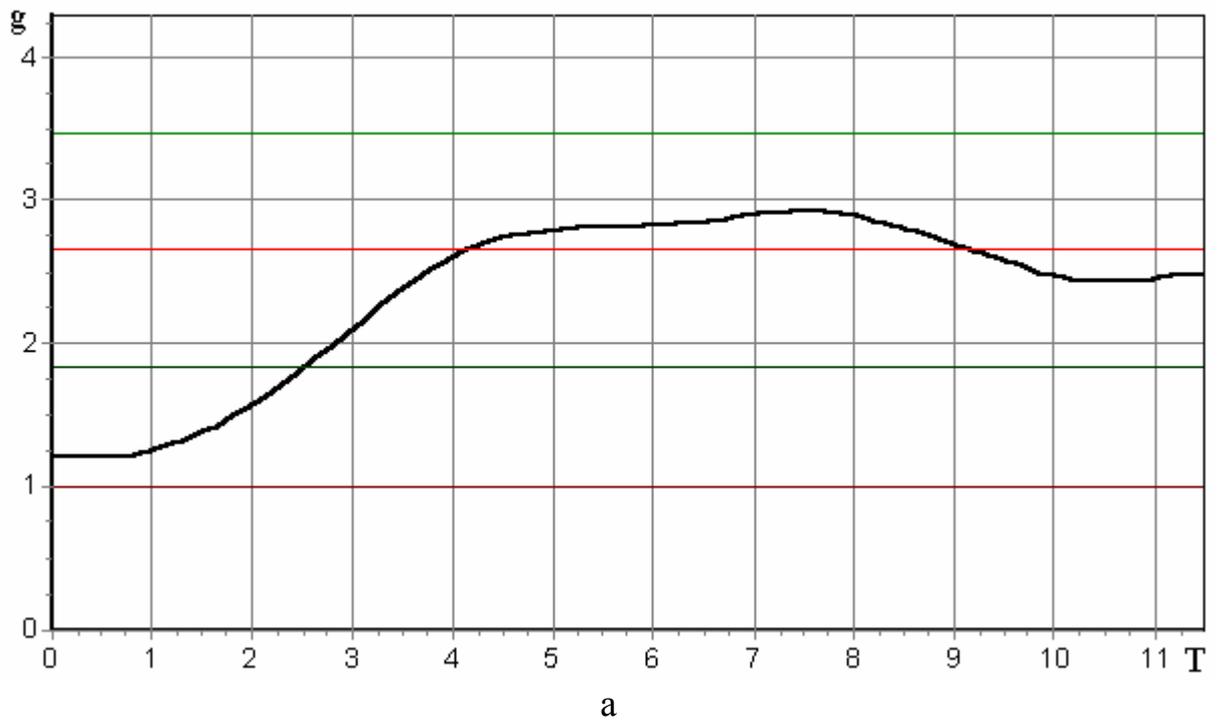


Рис. 8.9

## ГЛАВА 9. ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

### 9.1. Телеграфные уравнения.

Линии передачи, как было сказано в [главе 6](#), делятся по признаку односвязного или многосвязного поперечного сечения. Их принципиальное отличие состоит в том, что в структурах с многосвязным поперечным сечением могут существовать поперечные электромагнитные волны (ТЕМ или Т-волны). У поперечных волн нет продольных компонент векторов  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ , они не имеют частоты отсечки и могут существовать при любом значении  $\omega$ .

Частным случаем линий передачи с многосвязным поперечным сечением являются двухсвязные линии передачи, содержащие два параллельных проводника (коаксиальная линия, двухпроводная линия, микрополосковая линия). В двухсвязной линии передачи наряду с электрическими и магнитными волнами может существовать одна поперечная волна, которую можно описать с помощью так называемых *телеграфных уравнений*. Телеграфные уравнения формулируются относительно двух величин - напряжения  $U=U(z, t)$  и тока  $I=I(z, t)$  - которые задаются для каждого поперечного сечения  $z$  данной линии передачи в каждый момент времени  $t$  :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial z} &= RI + L \frac{\partial I}{\partial t}; \\ -\frac{\partial I}{\partial z} &= GU + C \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Здесь  $L$  - это погонная (т.е. приходящаяся на единицу длины) индуктивность линии;  $C$  - погонная емкость линии;  $R$  - погонное сопротивление линии;  $G$  - погонная проводимость (погонный коэффициент утечки).

В комплексной форме:

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dz} &= (R + j\omega L)I \\ -\frac{dI}{dz} &= (G + j\omega C)U \end{aligned} \quad (9.2)$$

(временной множитель берется как  $e^{j\omega t}$ , а производные по  $z$  обозначены через  $d/dz$ , поскольку комплексные амплитуды зависят только от переменной  $z$ ).

Для получения общего решения уравнения [\(9.2\)](#) исключается одна из величин, например  $I$ , и после дифференцирования, в данном случае, первого уравнения [\(9.2\)](#) формулируется уравнение относительно  $U$

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -\Gamma^2 U, \quad (9.3)$$

где  $\Gamma$  - постоянная или коэффициент распространения

$$\Gamma^2 = (jR - \omega L)(jG - \omega C)$$

и

$$\Gamma = [(jR - \omega L)(jG - \omega C)]^{1/2}. \quad (9.4)$$

Этот параметр обычно комплексный:  $\Gamma = \beta - j\alpha$ ;  $\alpha$  - коэффициент затухания, т.е. величина потерь, вносимых отрезком линии единичной длины;  $\beta = \omega/v_\phi$  - коэффициент фазы, т.е. фазовый сдвиг на той же длине.

Общее решение уравнения (9.3) записывается в виде

$$U(z) = Ae^{-j\Gamma z} + Be^{j\Gamma z}. \quad (9.5)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (9.2), находится ток

$$I(z) = \frac{1}{Z_B}(Ae^{-j\Gamma z} - Be^{j\Gamma z}), \quad (9.6)$$

где величина

$$Z_B = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} \quad (9.7)$$

называется *волновым сопротивлением линии*.

Из формул (9.5) и (9.6) следует, что общее решение телеграфных уравнений равно сумме двух бегущих навстречу друг другу волн с произвольными комплексными амплитудами  $A$  и  $B$  соответственно.

В линии без потерь утечка полагается равной нулю ( $G=0$ , т.е. пространство между проводниками является непроводящим) и проводники считаются идеально проводящими ( $R=0$ ), поэтому в этом случае

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Рассмотрим вывод телеграфных уравнений (9.1) для линии передачи, состоящей из двух проводов – двухпроводной линии передачи без потерь

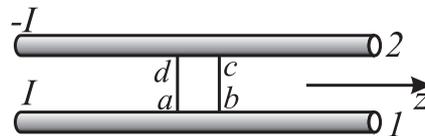


Рис. 9.1

(рис. 9.1).

Будем считать, что в первом проводе ток  $I=I(z, t)$ , а во втором проводе ( $-I$ ). Напряжение  $U=U(z, t)$  между проводами 1 и 2 будем определять как интеграл

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad (9.8)$$

взятый в данном поперечном сечении  $z=\text{const}$  по кратчайшему пути от провода 1 к проводу 2.

Запишем второе уравнение Максвелла в интегральной форме (закон электромагнитной индукции Фарадея)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s} = -\frac{d\Phi_M}{dt}, \quad (9.9)$$

где  $S$  – поверхность, опирающаяся на замкнутый контур  $L$ .

Применим это уравнение к прямоугольному контуру  $abcd$  (рис.9.1).

В данном случае

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_b^c \vec{E} d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} d\vec{l} = U_{z2} - U_{z1}, \quad (9.10)$$

где  $U_{z2}$  и  $U_{z1}$  - напряжения между нижним и верхним проводами в сечениях  $bc$  и  $ad$  соответственно. Т.е. можно записать, что

$$dU = U_{z2} - U_{z1} = -\frac{d\Phi_M}{dt}. \quad (9.11)$$

С другой стороны, величина магнитного потока  $d\Phi_M$  через контур  $abcd$  в соответствии с определением индуктивности будет равна

$$d\Phi_M = I \cdot L \cdot dz, \quad (9.12)$$

где  $L$  – погонная индуктивность линии.

Таким образом, из (9.10), (9.11) и (9.12) следует первое телеграфное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (9.13)$$

Для вывода второго телеграфного уравнения будем исходить из уравнения непрерывности (глава 1) в интегральной форме, т.е. из закона сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv + \oint_S \vec{j} d\vec{s} = 0. \quad (9.14)$$

Применим его к отрезку  $[z; z+dz]$  провода 1 (рис. 9.2).

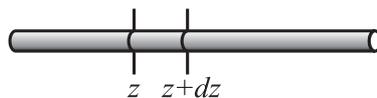


Рис. 9.2.

Интеграл

$$\int_V \rho dV = qdz \quad (9.15)$$

определяет заряд в объеме  $V$ , а из определения электрического тока вытекает, что

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{s} = I_2 - I_1, \quad (9.16)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  - величины токов в сечениях  $bc$  и  $ad$ . Следовательно, можно записать, что

$$dI = I_2 - I_1 = -\frac{d(q \cdot dz)}{dz}. \quad (9.17)$$

Так как распределение электрического поля в плоскости поперечного сечения совпадает с распределением электростатического поля, то можно утверждать, что погонная плотность заряда равна  $q=CU$ , где  $C$  – погонная электростатическая емкость линии. Учитывая это соотношение, из (9.17) получаем

$$dI = -\frac{d}{dt}(U \cdot C \cdot dz),$$

или окончательно

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (9.18)$$

Уравнения (9.13) и (9.18) и образуют систему телеграфных уравнений для тока и напряжения в линии без потерь

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t},$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (9.19)$$

Так как для вывода телеграфных уравнений к законам электродинамики добавляются предположения о локальном характере магнитного и электрического полей, то и телеграфные уравнения применимы лишь при достаточно низких частотах. Условие применимости телеграфных уравнений для волны, распространяющейся в бесконечно длинной однородной линии, имеет вид  $\sqrt{k^2 - \Gamma^2} \cdot b \ll 1$  ( $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu$ ). Для идеально проводящих линий ( $R=0, G=0$ ) оно удовлетворяется автоматически, так как в таких линиях  $\beta^2 = \Gamma^2 = k^2$ . Постоянная распространения в этом случае определяется из (9.4) как

$$\beta = \omega(LC)^{1/2},$$

а фазовая скорость волны в линии равна

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

## 9.2. Расчет параметров коаксиальной и двухпроводной линий.

Основными параметрами линии передачи без потерь, описываемой с помощью телеграфных уравнений, являются погонная емкость, погонная индуктивность и волновое сопротивление линии.

Для определения погонной емкости коаксиальной линии сопоставим электростатическое поле этой линии и поле цилиндрического конденсатора (рис.9.3).

Вектор электрической индукции в цилиндрическом конденсаторе име-

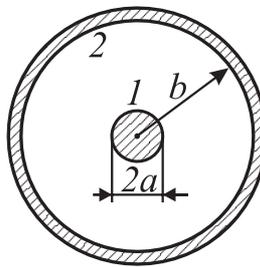


Рис. 9.3.

ет только радиальную составляющую

$$D_r = q/2\pi, \quad (9.20)$$

что следует из теоремы Гаусса, если применить ее к цилиндру единичной длины по оси z.

Учитывая, что вектор электрической индукции  $\vec{D}$  связан с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в линейной изотропной среде как

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

и вычисляя напряжение между внутренним проводником 1 и внешним проводником 2, имеем

$$U = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (9.21)$$

( $a$  – радиус внутреннего провода,  $b$  – радиус экрана коаксиальной линии).

Тогда погонная емкость коаксиальной линии

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon}{\ln(b/a)}. \quad (9.22)$$

Аналогично можно найти и погонную индуктивность. Пусть по проводнику 1 течет постоянный ток  $I$ , а по проводнику 2 течет ток  $-I$ . В этом случае магнитное поле будет отлично от нуля только в области  $a < r < b$ , так как при  $r > b$  магнитные поля проводников 1 и 2 будут взаимно уничтожаться. Магнитное поле данной системы будет иметь только одну составляющую

$$H_{\varphi} = I / 2\pi r, \quad (9.23)$$

что вытекает из закона Ампера.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  связан с вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  через материальное уравнение

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

следовательно, можно записать, что

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}. \quad (9.24)$$

Вычисляя погонный магнитный поток  $\Phi_M$  по формуле (9.9), получаем

$$\Phi_M = \int_a^b \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (9.25)$$

а погонная индуктивность, соответственно, будет равна

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (9.26)$$

Волновое сопротивление линии передачи без потерь определяется как

$$Z_B = U / I = (L / C)^{1/2}, \quad (9.27)$$

что позволяет с помощью (9.22) и (9.26) окончательно записать выражение

$$Z_B = \frac{1}{2\pi} (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2} (\mu / \varepsilon)^{1/2} \ln \frac{b}{a}. \quad (9.28)$$

Выражения (9.22) и (9.26) удовлетворяют соотношению

$$LC = 1/c^2, \quad (9.29)$$

из которого видно, что при отсутствии потерь в проводах волны в линии распространяются со скоростью света  $c$ . Этот результат был получен с помощью телеграфных уравнений исторически раньше, чем была создана теория электромагнитных волн в свободном пространстве.

Рассчитаем погонную емкость двухпроводной линии, состоящей из двух параллельных проводов радиуса  $a$ , центры которых расположены на расстоянии  $b$  друг от друга (рис. 9.4). Рассмотрим эту линию приближенно при условии  $a/b \ll 1$ , т.е. когда радиус проводов значительно меньше расстояния между ними.

Обозначим через  $q$  погонный заряд провода 1 и через  $-q$  погонный за-

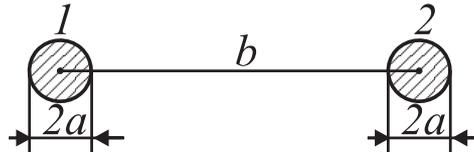


Рис. 9.4.

ряд провода 2 и вычислим электрическое поле каждого провода в отдельности. Электрическая индукция в каждой точке, лежащей на прямой, соединяющей центры проводников, будет равна сумме индукций, создаваемых каждым из проводников:

$$D = \frac{q}{2\pi r} - \frac{-q}{2\pi(b-r)}. \quad (9.30)$$

Разность потенциалов между проводниками

$$U = \int_a^{b-a} E_r dr, \quad (9.31)$$

или согласно формуле (9.30) и материальному уравнению, связывающему  $D$  и  $E$ ,

$$U = \int_a^{b-a} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \left( \frac{q}{2\pi r} + \frac{q}{2\pi(b-r)} \right) dr = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_a^{b-a} \frac{dr}{r} - \frac{q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_{b-a}^a \frac{dr}{(b-r)} = \frac{q}{\pi \epsilon_0 \epsilon} \ln \frac{b-a}{a}, \quad (9.32)$$

причем в последнем выражении в силу условия  $a \ll b$  вместо  $(b-a)$  можно написать  $b$ . Следовательно, погонная емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{q}{U} \approx \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln(b/a)}. \quad (9.33)$$

При выводе формулы (9.33) распределение заряда на поверхности каждого провода считалось симметричным. Это значит, что не учитывался так называемый эффект близости, состоящий в неравномерном распределении

зарядов (и токов) по окружности проводов из-за взаимодействия зарядов. При условии  $b/a \gg 1$  этот эффект выражен слабо.

Определим погонную индуктивность двухпроводной линии. Так как линия состоит из двух проводников, то нужно просуммировать магнитные поля, создаваемые каждым из них:

$$H = \frac{I}{2\pi r} + \frac{I}{2\pi(b-r)}. \quad (9.34)$$

Находим магнитную индукцию

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right),$$

что позволяет определить магнитный поток

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi} \int_a^{b-a} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

и погонную индуктивность

$$L = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (9.35)$$

Исходя из (9.33) и (9.35) получаем волновое сопротивление двухпроводной линии при  $b \gg a$

$$Z_B = (L/C)^{1/2} = \left( \frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi} \ln \frac{b-a}{a} \approx \left( \frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (9.36)$$

Для оценки условия, при котором излучением линии можно пренебречь, рассмотрим разомкнутую на конце двухпроводную линию (рис.9.5).

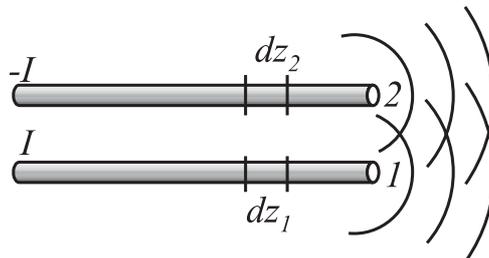


Рис. 9.5.

Переменный ток, текущий в каждом элементарном отрезке провода, можно рассматривать как элементарный диполь – источник сферических электромагнитных волн. В результате сложения волн, создаваемых обоими проводами, возникает электромагнитная волна, расходящаяся от открытого конца двухпроводной линии и уносящая с собой часть мощности волны линии. Но в случае выполнения условия  $kb \ll 1$  (где  $k$  – волновое число в вакууме,  $b$  – расстояние между проводами), сферическая волна уносит лишь пренебрежи-

мо малую часть мощности набегающей волны. Это объясняется тем, что дипольный момент отрезка  $dz_1$  провода 1 отличается от дипольного момента соответствующего отрезка  $dz_2$  на проводе 2 лишь знаком, а волны, создаваемые этими диполями, в любой дальней точке пространства имеют при условии  $kb \ll 1$  малую дополнительную разность фаз и практически полностью гасят друг друга.

Если же условие  $kb \ll 1$  не выполняется, то линия интенсивно излучает электромагнитные волны в окружающее пространство, причем это излучение никак не учитывается телеграфными уравнениями. На практике при невыполнении условия  $kb \ll 1$  двухпроводная линия становится не пригодной для передачи электромагнитной энергии, так как любая неоднородность приводит к большим потерям энергии на излучение

### 9.3. Трансформирующие свойства отрезков линий передачи.

Отрезок линии, нагруженный на одном конце на некоторое сопротив-

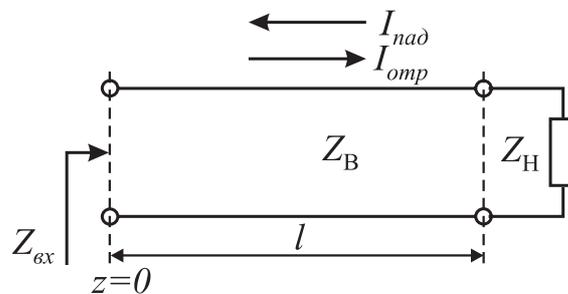


Рис. 9.6.

ление (рис.9.6), обладает трансформирующими свойствами, поскольку его входное сопротивление отличается от сопротивления нагрузки. Установим зависимость между этими сопротивлениями.

Для начала перепишем равенство (9.5), полагая, что сопротивление нагрузки  $Z_H$  не равно  $Z_B$ :

$$U(z) = Ae^{-j\Gamma z} + Be^{j\Gamma z}, \quad (9.37)$$

где  $\Gamma = \beta - j\alpha$ .

Полный ток в каждом сечении линии (рис. 9.6.) равен сумме токов, которые создаются падающей волной  $I_{пад}$ , распространяющейся в направлении от сечения  $z=0$  к нагрузке, и волной  $I_{отр}$ , отраженной от нагрузки:

$$I(z) = I_{nad}(z) - I_{omp}(z), \quad \text{т.е.} \quad I(z) = \frac{A}{Z_B} e^{-j\Gamma z} - \frac{B}{Z_B} e^{j\Gamma z}. \quad (9.38)$$

В сечении  $Z = \ell$  отношение величин  $U_H = U(\ell)$  и  $I_H = I(\ell)$  из (9.37) и (9.38) равно сопротивлению нагрузки

$$Z_H = \frac{U_H}{I_H} = Z_B \frac{Ae^{-j\Gamma l} + Be^{j\Gamma l}}{Ae^{-j\Gamma l} - Be^{j\Gamma l}}. \quad (9.39)$$

Отсюда можно выразить отношение коэффициентов  $B$  и  $A$ , которое понадобится в дальнейшем

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} e^{-2j\Gamma l}. \quad (9.40)$$

Теперь рассмотрим ток и напряжение в сечении  $z=0$ . Полагая  $z=0$ , запишем отношение выражений (9.37) и (9.38):

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{U(0)}{I(0)} = Z_B \frac{A + B}{A - B},$$

откуда

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{Z_B} = \frac{(1 + B/A)}{(1 - B/A)}. \quad (9.41)$$

Здесь  $Z_{\text{вх}}$  – входное сопротивление отрезка линии (рис. 9.5). Подставляя (9.40) в (9.41), получаем

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{Z_B} = \frac{Z_H [1 + \exp(-2j\Gamma l)] + Z_B [1 - \exp(-2j\Gamma l)]}{Z_H [1 - \exp(-2j\Gamma l)] + Z_B [1 + \exp(-2j\Gamma l)]}. \quad (9.42)$$

Применив известные соотношения для гиперболических функций, получим

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{Z_B} = \left[ \frac{Z_H}{Z_B} + th(j\Gamma l) \right] / \left[ 1 + \frac{Z_H}{Z_B} th(j\Gamma l) \right]. \quad (9.43)$$

Выражение (9.43) устанавливает искомую связь между сопротивлением нагрузки на конце линии длиной  $l$  и входным сопротивлением последней.

Из (9.43) следует, что при равенстве сопротивлений нагрузки и волнового сопротивления линии ( $Z_H = Z_B$ ) входное сопротивление  $Z_{\text{вх}}$  линии совпадает с волновым, т.е.  $Z_{\text{вх}} = Z_B$ . В этом случае исчезает волна, отраженная от нагрузки, и говорят, что линия идеально согласована.

Запишем формулу (9.43) для входного сопротивления отрезка линии без потерь ( $\Gamma = \beta$ ;  $\alpha = 0$ )

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{Z_B} = \left[ \frac{Z_H}{Z_B} + tg(\beta l) \right] / \left[ 1 + \frac{Z_H}{Z_B} tg(\beta l) \right] \quad (9.44)$$

и установим свойства отрезков линий передачи, длины которых кратные половине или четверти длины волны в этой линии на определенной частоте.

При  $\beta l = \pi$  или  $\beta l = n\pi$ , где  $n$  – целое число,  $tg\pi = tg(n\pi) = 0$ . Подставляя это значение тангенса в (9.44), получаем

$$Z_{ex} = Z_H. \quad (9.45)$$

Значению  $\beta\ell = \pi$  соответствует  $\ell = \lambda_B / 2$ , так как  $\beta = 2\pi / \lambda_B$ . Следовательно, входное сопротивление полуволнового отрезка линии передачи без потерь равно величине сопротивления, подключенного к его концу.

Еще одно важно свойство полуволновых трансформаторов – дополнительный фазовый сдвиг  $180^\circ$ , вносимый трансформатором.

Интересный результат следует из (9.44) при  $\beta\ell = \pi/2$ . Если подставить  $\beta\ell$ , равное  $\pi/2$  или  $n\pi/2$ , где  $n$  – нечетное целое число, то можно в (9.44) пренебречь слагаемым  $Z_H/Z_B$ , так как функция  $\text{tg}(\beta\ell)$  стремится к бесконечности. Поэтому из (9.44) следует  $Z_{Bx}/Z_B = Z_B/Z_H$ , откуда

$$Z_B = \sqrt{Z_{ex} Z_H}. \quad (9.46)$$

Согласно этому равенству два разных сопротивления ( $Z_{Bx}$  и  $Z_H$ ) можно согласовать, если между ними включить четвертьволновой отрезок линии или отрезок с длиной, составляющей нечетное число четвертей длины волны с волновым сопротивлением  $Z_B$ , равным среднему геометрическому из согласуемых сопротивлений.

#### 9.4. Короткозамкнутые и разомкнутые на конце отрезки линии передачи (шлейфы).

Отрезку линии, разомкнутому на конце, соответствует нагрузка с бесконечно большим сопротивлением ( $Z_H = \infty$ ), а короткозамкнутому отрезку линии – нагрузка с нулевым сопротивлением ( $Z_H = 0$ ). Входное сопротивление линии при коротком замыкании ( $Z_{Bx.kz}$ ) определяется из равенства (9.44), связывающего входное сопротивление и сопротивление нагрузки:

$$Z_{ex.kz} = Z_B \text{th}(j\Gamma\ell).$$

Если потери достаточно малы, и ими можно пренебречь, то

$$Z_{ex.kz} = Z_B \text{th}(j\beta\ell) = jZ_B \text{tg}(\beta\ell). \quad (9.47)$$

Для разомкнутой на конце линии, т.е. при отключенной нагрузке,

$$Z_{ex.xx} = Z_B / \text{th}(j\Gamma\ell).$$

При малых потерях

$$Z_{ex.xx} = -jZ_B / \text{tg}(\beta\ell) = -jZ_B \text{ctg}(\beta\ell). \quad (9.48)$$

Из выражений (9.47) и (9.48) следует, что входное сопротивление короткозамкнутого или разомкнутого на конце отрезка линии зависит от его длины  $\ell$  и носит либо емкостной, либо индуктивный характер. В литературе такие отрезки линии получили название шлейфов. Зависимость входного со-

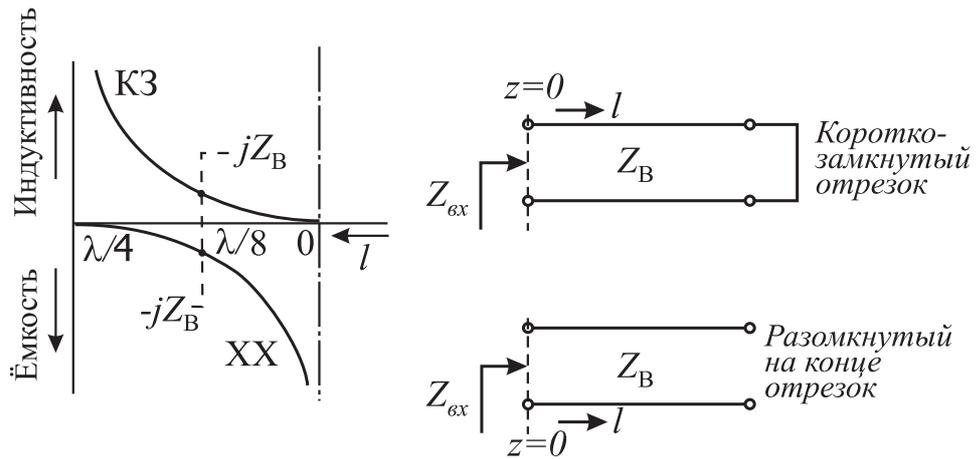


Рис. 9.7.

противления шлейфа от длины волны, рассчитанная по (9.47) и (9.48) при  $0 \leq l \leq \lambda/4$  представлена на [рис. 9.7](#).

В идеально разомкнутой либо короткозамкнутой линии вся энергия падающей волны отражается от конца линии и возвращается к ее входу.

Перемножая выражения (9.47) и (9.48), находим

$$Z_{ex.кз} \cdot Z_{ex.хх} = Z_B^2. \quad (9.49)$$

На этом равенстве основан простой метод определения волнового сопротивления линии передачи: сначала измеряется входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания, а затем в режиме холостого хода.

На [рис. 9.8](#) представлена зависимость входного сопротивления корот-

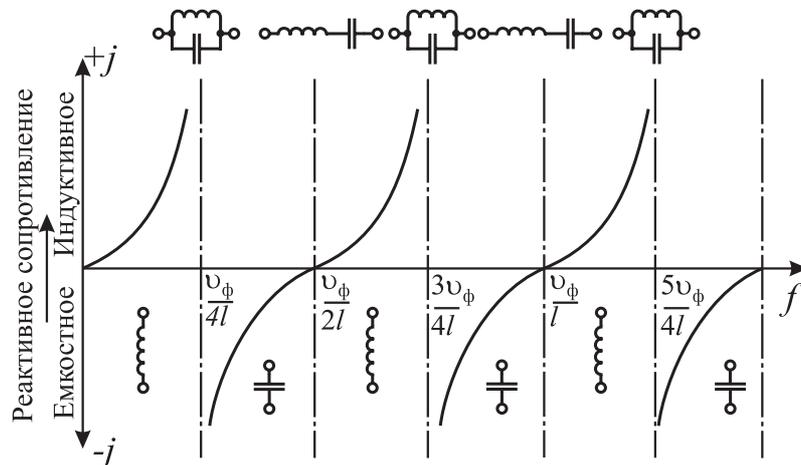


Рис. 9.8.

козамкнутого отрезка линии передачи без потерь от частоты при фиксированной длине отрезка. ( $Z_{ex} = jZ_B \operatorname{tg}(2\pi fl / \nu_\phi)$ )

На низких частотах входное сопротивление носит чисто индуктивный характер. Бесконечно большое реактивное сопротивление при  $f = \nu_\phi / (4l)$ , где длина отрезка равна четверти длины волны в линии, сходно с сопротивлением параллельного резонансного контура на частоте резонанса. При дальнейшем увеличении частоты входное сопротивление становится чисто емкост-

ным, так как значения тангенса отрицательны. Затем входное сопротивление изменяется от емкостного к индуктивному, проходя через нуль на частоте  $f = v_{\phi} / (2\ell)$ , что аналогично последовательному резонансному LC-контуре. При дальнейшем повышении частоты картина периодически повторяется.

Возможность реализации произвольных значений индуктивности и емкости с помощью короткозамкнутых и разомкнутых шлейфов позволяет использовать их при построении согласующих схем.

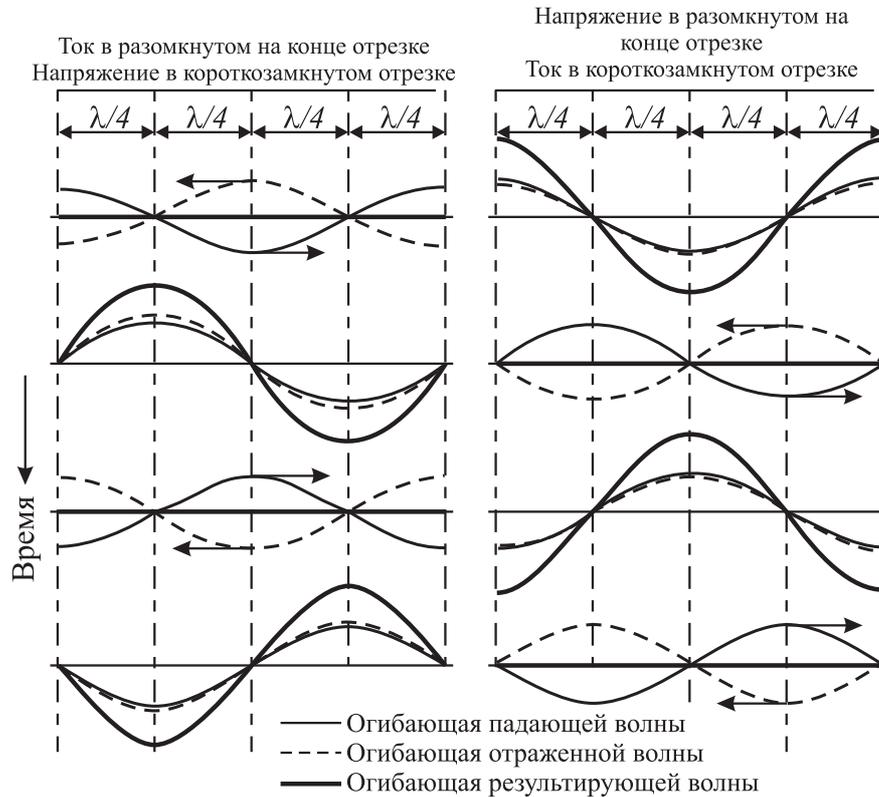


Рис. 9.9.

На [рис. 9.9](#) иллюстрируются процедура формирования стоячей волны при полном отражении в короткозамкнутом отрезке.

Из левой диаграммы 1 на [рис. 9.9](#) видно, что в начальный момент времени падающая и отраженная волны тока противофазны, а суммарный ток в любом сечении линии равен нулю. В тот же момент времени падающая и отраженная волны напряжения синфазны (правая диаграмма 1). Из диаграммы 2, соответствующей более позднему моменту времени, видно, что отраженная волна прошла справа налево расстояние, равное  $\lambda / 4$ , а падающая – то же расстояние, но в обратном направлении, в результате чего обе тока волны оказались в фазе. В тот же момент падающая и отраженная волны напряжения полностью гасят друг друга в любом сечении линии. Аналогично строятся распределения тока и напряжения, представленные на диаграммах 3 и 4. Суперпозиция падающей и отраженной волн представляет собой в линии без потерь стоячую волну – [рис.9.10](#). В режиме холостого хода на [рис. 9.9](#) достаточно поменять местами распределения тока и напряжения.

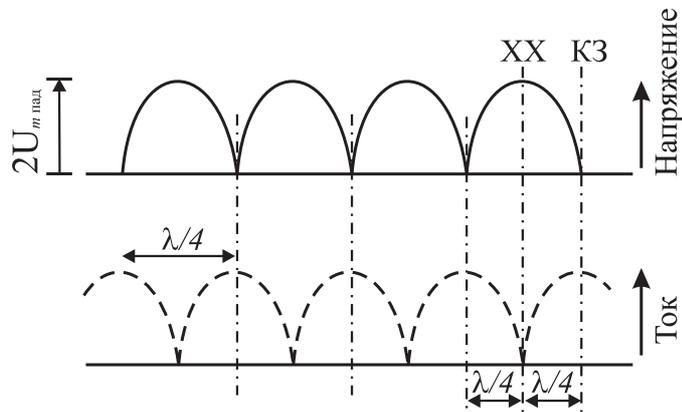


Рис. 9.10.

### 9.5. Частичное отражение волн в линиях передачи.

В режиме стоячей волны напряжение в максимуме вдвое превышает напряжение падающей волн ([рис. 9.10](#)), а в результате интерференции падающей и отраженной волн вдоль линии появляются сечения, в которых при отсутствии потерь в линии напряжение равно нулю. Реальные линии всегда вносят затухание, следовательно, амплитуда как падающей, так и отраженной волны уменьшается по мере их перемещения вдоль линии. В результате

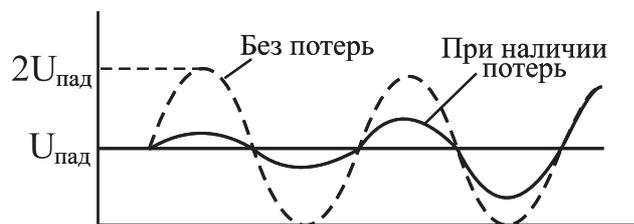


Рис. 9.11.

напряжение (ток) в максимумах не достигает удвоенного значения, а в нулях становится невозможной полная компенсация - [рис. 9.11](#).

Для характеристики режима работы линии передачи вводят понятие

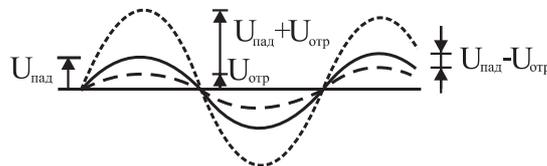


Рис. 9.12.

коэффициента стоячей волны по напряжению ( $KCB_u$ ) или просто коэффициента стоячей волны ( $KCB$ ), равного отношению ([рис.9.12](#))

$$KCB_u = \frac{|U_{пад}| + |U_{отр}|}{|U_{пад}| - |U_{отр}|}, \quad (9.50)$$

где  $U_{пад}$  и  $U_{отр}$  - значения напряжений падающей и отраженной волн в максимумах.

В линии без потерь в режиме стоячих волн отношение (9.50) равно бесконечности. В реальных линиях с потерями величина  $KCB_u$  всегда конечна. Аналогично вводится понятие коэффициента стоячей волны по току  $KCB_i$ .

Обычно лишь часть энергии падающей волны отражается от нагрузки. Поглощение (полное или частичное) энергии падающей волны нагрузкой возможно, если активная часть сопротивления нагрузки отлична от нуля.

Нагрузкой может быть сосредоточенное сопротивление  $Z_H$  либо отрезок линии с волновым сопротивлением  $Z_H$ , отличным от  $Z_B$ . В обоих случаях отражение части энергии падающей волны происходит в том сечении  $AA'$ , где расположена нагрузка (рис. 9.13).

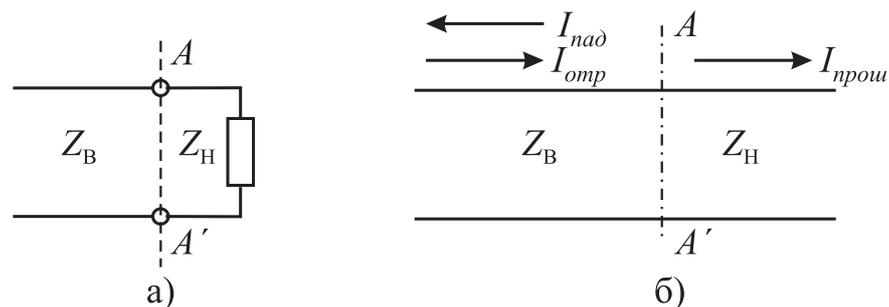


Рис. 9.13.

Для того, чтобы ввести понятие коэффициента отражения волны, запишем уравнение Кирхгофа в сечении  $AA'$  для тока

$$U_{пад}/Z_B - U_{отр}/Z_B = U_{прош}/Z_H \quad (9.51)$$

и напряжения

$$U_{пад} + U_{отр} = U_{прош}. \quad (9.52)$$

Подставляя  $U_{прош}$  из (9.52) в (9.51), определяем коэффициент отражения волны по напряжению

$$K = \frac{U_{отр}}{U_{пад}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}. \quad (9.53)$$

Так как сопротивления  $Z_H$  и  $Z_B$  в общем случае комплексны, то комплексна и величина  $K$ .

Согласно (9.50) из (9.53) следует, что модуль коэффициента отражения

$$|K| = \left| \frac{U_{отр}}{U_{пад}} \right| = \frac{KCB_u - 1}{KCB_u + 1}. \quad (9.54)$$

Величина  $KCB_u$  в отличие от  $K$  всегда действительна и меняется от единицы при идеальном согласовании ( $Z_H = Z_B$ ) до бесконечности при коротком замыкании ( $Z_H = 0$ ) или холостом ходе ( $Z_H = \infty$ ). В реальных устройствах  $KCB_u$  обычно не превышает 1,1, что соответствует передаче в нагрузку 99,8% мощности.

По известному значению коэффициента отражения можно определить входное сопротивление линии (рис. 9.14).

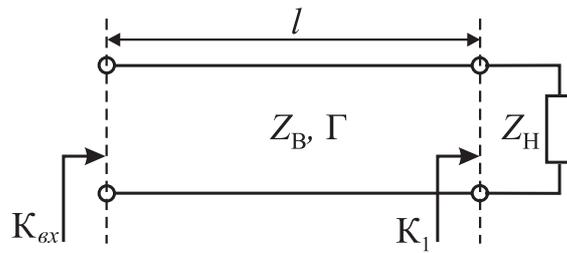


Рис. 9.14.

В принятых обозначениях

$$K_1 = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}, \quad \text{а} \quad K_{BX} = \frac{Z_{BX} - Z_B}{Z_{BX} + Z_B}$$

Учитывая, что  $K_{вх}$  и  $K_1$  связаны между собой соотношением  $K_{вх} = K_1 \exp(-2j\Gamma l)$ , получим, что

$$Z_{BX} = \frac{1 + K_1 \exp(-2j\Gamma l)}{1 - K_1 \exp(-2j\Gamma l)}. \quad (9.55)$$

## ГЛАВА 10. ПЛАНАРНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

### 10.1. Понятие планарных линий передачи.

На [рис. 10.1](#) в поперечном сечении показаны некоторые линии передачи, называемые планарными. В таких линиях проводники выполнены в виде узких металлических полосок, нанесенных на диэлектрическую подложку (экранированную или неэкранированную в случае нескольких полосок), поэтому многие из планарных линий часто называют полосковыми ([рис.10.1,а,б,в,ж](#)). Если же проводники представляют собой широкие металлические пластины с прорезанными в них продольными щелями, то такие линии называют щелевыми ([рис.10.1,г,з](#)).

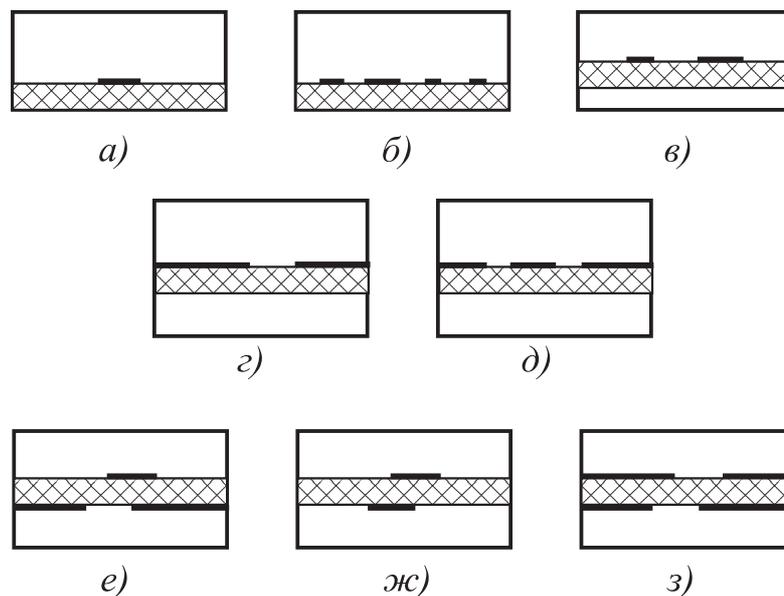


Рис. 10.1.

Интенсивное развитие и распространение планарных структур связано в первую очередь с миниатюризацией СВЧ аппаратуры. Так называемые интегральные схемы (ИС) СВЧ обычно формируются из полосковых элементов, располагаемых на одной подложке. Если поперечные размеры полых волноводов не могут быть меньше некоторых критических, то поперечные размеры полосковых линий могут быть, практически, сколь угодно малыми.

Следует заметить, что переход от устройств на полых волноводах к ИС СВЧ, использующих полосковые линии, является возвратом к многосвязным волноводным структурам, к которым относятся двухпроводная линия, в свое время уступившим место полым волноводам. Полые же волноводы широко распространились с 40-х годов прошлого века при освоении сантиметровых волн и по сегодняшний день сохраняют значительную область применения, в частности, при передаче большой мощности.

Волны, направляемые полосковыми и щелевыми линиями, являются гибридными. Это касается и низшей (основной) волны полосковой линии, которая аналогична Т-волне двухпроводной линии. Она так же не имеет отсечки ( $f_{кр}=0$ ). В типичных условиях – при относительно малых поперечных

размерах – поперечные компоненты значительно преобладают над продольными. Дисперсия такой волны невелика. Величину  $(\beta/k_0)^2$  для основной волны называют эффективной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{эфф}$  полосковой линии ( $\beta$  – продольное волновое число).

Кроме основной волны полосковой линии, которая получила название *квази-Т волны*, в этой линии может существовать множество других волн, имеющих разнообразное физическое происхождение. Во-первых, это так называемые экранные волны, связанные с наличием в линии экрана и существующие независимо от полоскового проводника. В результате связи экранных волн, обусловленной внесенным полосковым проводником, образуются комплексные волны. Эти волны, также как и экранные, в состоянии отсечки не переносят энергии, однако повышению частоты все большее число волн выходит из области отсечки. Среди них оказываются и такие волны, поля которых подобно полю основной волны сконцентрированы в области подложки под полосковым проводником. Эти волны называются подполосочными. Основная волна полосковой линии и высшие подполосочные волны будут направляться полосковой линией и без замкнутого экрана; достаточно широкий экран на них почти не оказывает влияния.

Из сказанного следует, что строгая электродинамическая теория направляющих структур, показанных на [рис. 10.1](#), оказывается довольно сложной.

В инженерной практике для описания линий передачи часто используются волновые сопротивления, характеризующие основные волны планарных структур. В случае полосковой линии ([рис. 10.1](#), а) волновое сопротивление можно определить как

$$Z_B = \frac{U}{I}, \quad U = \int_A^B \vec{E} d\vec{\ell}, \quad (10.1)$$

где имеется в виду полный ток полоскового проводника. Существует также «энергетическое» определение, согласно которому

$$Z_B = \frac{2\bar{P}}{I^2}, \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} [\vec{E}, \vec{H}^*] d\vec{s}. \quad (10.2)$$

Обе формулы дают близкие значения в типичных случаях, когда толщина подложки значительно меньше длины волны в ее диэлектрике (поле в подложке квазистационарно).

В случае щелевой линии

$$Z_B = \frac{U^2}{2\bar{P}}, \quad U = \int_A^B \vec{E} d\vec{\ell}, \quad (10.3)$$

а мощность  $\bar{P}$  вычисляется по [\(10.2\)](#).

Как видно из сказанного выше, планарные, в частности полосковые и щелевые, линии лишь с натяжкой можно отнести к линиям, в которых распространяются Т-волны. Причем наличие диэлектрического слоя и сравнительно сложная геометрия этих линий позволяют произвести простой коли-

качественный анализ лишь в отдельных случаях, в большинстве же случаев приходится ограничиваться приближенными, а иногда и только качественными результатами.

## 10.2. Симметричная полосковая линия

Симметричная полосковая линия (СПЛ) представляет собой тонкую металлическую полосу конечной ширины  $W$ , расположенную между двумя параллельными металлическими пластинами на одинаковом расстоянии от каждой из них (рис. 10.2). Зазор между полоской и заземленными пластина-

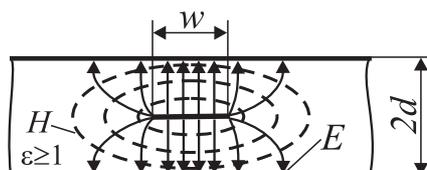


Рис. 10.2.

ми по конструктивным соображениям (жесткость крепления, устойчивость по отношению к вибрациям и т.п.) и с целью сокращения размеров СВЧ устройств заполняется твердым магнитодиэлектриком ( $\epsilon > 1, \mu > 1$ ) с достаточно высоким значением показателя преломления  $\sqrt{\epsilon\mu}$ . Симметричная полосковая линия является исторически первым типом полосковой линии передачи. Долгое время основным ее недостатком считались большие омические и диэлектрические потери, однако за последние годы удалось резко снизить потери в металле и диэлектрике за счет новой технологии изготовления материалов.

Основным типом волны, распространяющейся вдоль СПЛ, является волна, которую с достаточной степенью точности можно считать поперечной (Т-волной). Фазовая скорость этой волны равна

$$v_{\phi} = C / \sqrt{\epsilon}, \quad (10.4)$$

где  $C$  – скорость света в вакууме,  $\epsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость однородного материала, полностью заполняющего поперечное сечение СПЛ.

Симметричная полосковая линия применяется обычно на частотах, превышающих несколько сотен мегагерц. Она используется в разнообразных устройствах совместно с коаксиальной линией или волноводом, когда в качестве активных элементов используются диоды Ганна или смесительные диоды, а также там, где необходимо обеспечить широкополосность либо малые габариты. Однако эта линия заметно проигрывает коаксиальной линии и волноводу по уровню взаимного влияния между элементами цепи и уровню передаваемой мощности.

Выражения для волнового сопротивления СПЛ с известной геометрией выводились различными авторами. Эти формулы решают задачу анализа, т.е. по заданным размерам линии и параметрам диэлектрического заполнения на-

ходится величина волнового сопротивления. Одним из первых исследователей был Кон, рассмотревший методом конформных преобразований полосковые системы с очень тонким центральным проводником. В этом методе внутренняя область полосковой линии с прямоугольным экраном отображается на внутреннюю область круга, и волновое сопротивление линии рассчитывается по формуле:

$$Z_B = \left( \frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \frac{K'(\tilde{k})}{K(\tilde{k})}, \quad \tilde{k} = th \left( \frac{\pi W}{4d} \right) \quad (10.5)$$

где  $W$  – ширина полоски,  $d$  – толщина диэлектрика,  $K'(\tilde{k}) = K\left[\left(1-\tilde{k}^2\right)^{1/2}\right]$  – полные эллиптические интегралы первого ряда.

При конечной толщине полоски  $t$  погрешность, не превышающую 0,5% при  $W/(2d-t) < 10$ , дают формулы:

$$Z_B = \left( \frac{30}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \ln \left( 1 + \left( \frac{4}{\pi m} \right) \left\{ \left( \frac{8}{\pi m} \right) + \left[ \left( \frac{8}{\pi m} \right) + 6,27 \right]^{1/2} \right\} \right), \quad (10.6)$$

где

$$m = W / (2d - t) + \Delta W / (2d - t);$$

$$\Delta W / (2d - t) = x / \pi (1 - x) \left\{ 1 - 0,5 \ln \left[ \left( \frac{x}{2 - x} \right)^2 + \left( \frac{0,0796x}{W / 2d + 1,1x} \right)^P \right] \right\}; \quad (10.7)$$

$$P = 2 / \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{1 - x} \right) \text{ и } x = \frac{t}{2d}$$

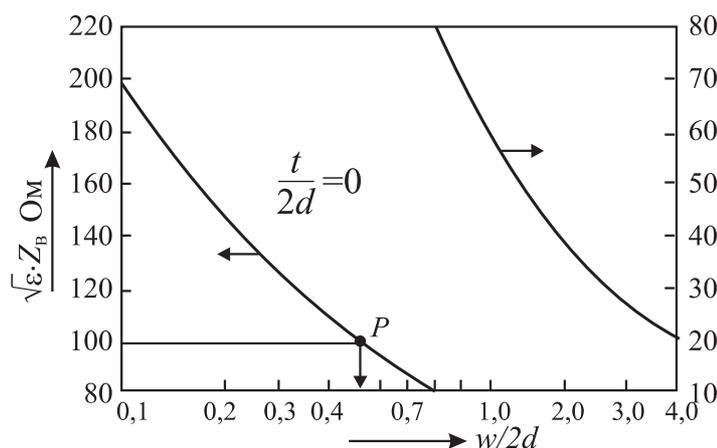


Рис. 10.3.

Часто у разработчиков возникает необходимость решать задачу синтеза, когда заданы волновое сопротивление и диэлектрическая проницаемость. Необходимо определить отношение ширины полоски к расстоянию между

проводниками экрана ( $W/2d$ ). Для этой цели можно использовать итерационную процедуру, основанную на соотношениях (10.6) и (10.7). Задается некоторое начальное значение  $W/2d$  и вычисляется величина волнового сопротивления по (10.6), которая сравнивается с требуемым значением. Затем отношению  $W/2d$  дается небольшое приращение  $\Delta W/2d$ . Расчет по (10.6) и сравнение волновых сопротивлений повторяются до тех пор, пока разница между вычисленной и требуемой величинами превышает  $\pm 2/\sqrt{\epsilon}$ .

### 10.3. Несимметричная полосковая линия

Несимметричная полосковая линия (НПЛ) (микроросковая линия) выполняется нанесением слоя металла бесконечной ширины с одной стороны подложки и проводника конечной ширины – с другой стороны (рис. 10.4, а). Основным (низшим) типом волны, распространяющейся в НПЛ, является квази-Т-волна, структура полей которой схематически показана на рис. 10.4, а, б).

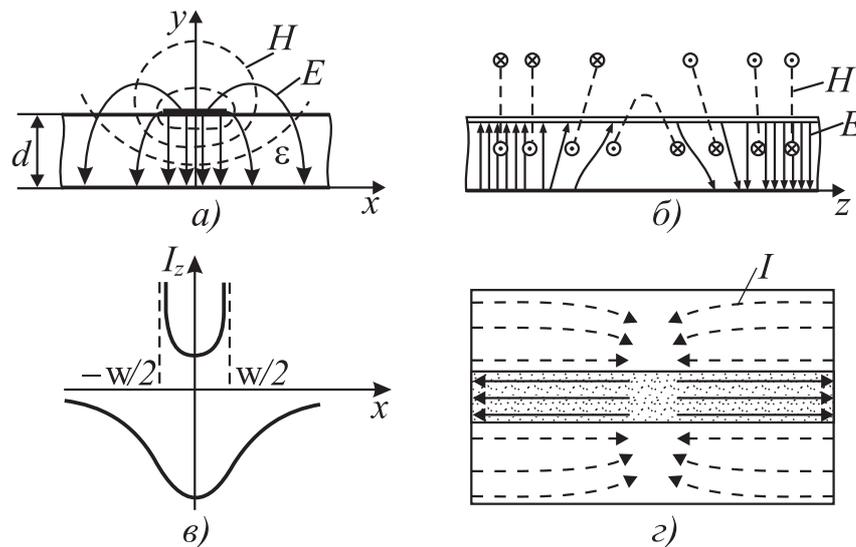


Рис. 10.4.

Продольное распределение тока в узком проводнике описывается экспоненциальной либо логарифмической функцией, в слое металла – колоколообразной функцией вида  $I_z \left[ 1 + (x/d)^2 \right]^{-1}$  (рис. 10.4, в). Общее распределение тока в проводниках НПЛ приведено на рис. 10.4, г.

Несмотря на внешнюю простоту конструкции НПЛ по своим электродинамическим характеристикам существенно отличается от СПЛ. Основное отличие состоит в том, что НПЛ представляет собой открытую электродинамическую структуру, и построение ее теории оказалось связанным с целым рядом сложнейших проблем математической теории дифракции и вычислительной электродинамики. Вместе с тем, для целого ряда приложений и использования НПЛ в устройствах СВЧ достаточно длинноволновых диапазо-

нов оказываются весьма полезными приближенные результаты, полученные в рамках квазистатического приближения (приближения Т-волны).

При расчете НПЛ возникает необходимость определять величину, получившую название эффективной диэлектрической проницаемости ( $\epsilon_{эфф}$ ). Эта величина характеризует соотношение между энергиями, концентрирующимися в воздухе и диэлектрике. Как было сказано в [гл. 9](#), любая линия с Т-волной характеризуется величиной фазовой скорости  $v_\phi$ . Напомним, что  $v_\phi$  - это скорость перемещения фронта волны вдоль линии:

$$v_\phi = 1/(LC)^{1/2}.$$

При отсутствии диэлектрического заполнения фазовая скорость в линии совпадает со скоростью света в свободном пространстве

$$C = 1/(LC_{возд})^{1/2},$$

где  $C \approx 3 \cdot 10^8$  м/с; L – погонная индуктивность линии с диэлектриком, равная в данном случае погонной индуктивности линии с воздушным заполнением;  $C_{возд}$  – погонная емкость линии с воздушным заполнением; C – то же, но при наличии слоя из диэлектрика.

Из этих равенств следует

$$\begin{aligned} C/v_\phi &= (C/C_{возд})^{1/2}, \quad \text{т.е.} \\ C/C_{возд} &= (C/v_\phi)^2 = \epsilon_{эфф} \end{aligned} \quad (10.8)$$

Микрополосковая линия с относительно широкой полоской ( $W/d \rightarrow \infty$ , W - ширина полоски) близка по своим свойствам к плоскому конденсатору, в котором практически вся энергия электрического поля концентрируется в диэлектрике под полоской. Потому величина  $\epsilon_{эфф}$  весьма близка к  $\epsilon$ . Если полоска узкая ( $W/d \rightarrow 0$ ), то энергия электрического поля распределяется практически поровну между воздухом и диэлектриком. В этом случае величина  $\epsilon_{эфф}$  близка к полусумме  $\epsilon$  воздуха и диэлектрического слоя, т.е.  $\epsilon_{эфф} \approx (\epsilon + 1)/2$ . Следовательно,  $(\epsilon + 1)/2 < \epsilon_{эфф} < \epsilon$ .

Для любой волны, распространяющейся в линии, фазовая скорость распространения

$$\begin{aligned} c &= f\lambda_0 \text{ в свободном пространстве,} \\ v_\phi &= f\lambda_g \text{ при наличии диэлектрика} \end{aligned}$$

( $\lambda$  - длина волны в линии передачи).

В квазистатическом приближении волновое сопротивление рассчитывается с довольно низкой погрешностью (порядка  $\pm 1\%$ ) для параметров подложки:  $\epsilon \leq 16$  и геометрических размеров в области  $0,5 < W/d < 20$ . Волновое сопротивление для широких проводников ( $W/d > 1$ ) равно

$$Z_B = 120\pi\epsilon_{эфф}^{-1/2} \left[ \frac{W}{d} + 1,393 + 0,667 \ln \left( \frac{W}{d} + 1,444 \right) \right]^{-1}, \quad (10.9)$$

для узких проводников ( $W/d < 1$ )

$$Z_B = 60\varepsilon_{\text{эфф}}^{-1/2} \ln\left(8\frac{d}{W} + \frac{W}{4d}\right). \quad (10.10)$$

Формулы (10.9) и (10.10) справедливы для бесконечно тонкого проводника, а эффективная диэлектрическая проницаемость, входящая в них, определяется так:

$$2\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)/R, \quad (10.11)$$

где

$$R = \begin{cases} (1 + 12d/W)^{1/2}, & W/d > 1, \\ \left[ (1 + 12d/W)^{-1/2} + 0,04(1 - W/d)^{-1} \right], & W/d < 1. \end{cases}$$

Для проектирования устройств СВЧ желательно иметь зависимости геометрических размеров от волнового сопротивления  $Z_B$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  подложки. Это не трудно сделать, пользуясь формулами (10.9) – (10.11) и записав их в виде

$$\begin{aligned} W/d &= 64 \left\{ 1 - \left[ 1,0455 - \left( 0,0512 \cdot 60\pi / Z_B \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}} \right) \right]^{1/2} \right\}, \\ Z_B &< 128 / \sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}}, \\ W/d &= 2 \left[ \exp\left\{ Z_B \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}} / 60 \right\} - \left\{ \exp\left( Z_B \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}} / 30 \right) - 8 \right\}^{1/2} \right], \\ Z_B &> 128 / \sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где значение  $\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}$  аппроксимируется выражением

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}} = 0,2775 + 0,722\varepsilon \quad (10.13)$$

Формулы (10.12) – (10.13) дают максимальную погрешность 4% при значениях  $Z_B \in [5; 250]$  Ом и  $\varepsilon < 16$ . Для значений  $Z_B \cdot \varepsilon < 800$  Ом погрешность не превышает 2%. Если же проведенную процедуру повторить еще раз, произведя при этом замену  $\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}$  на  $\varepsilon_{\text{эфф}}$ , то погрешность уменьшается до 0,5%.

При конструировании СВЧ схем часто оказывается, что характеристики физической цепи значительно отличаются от теоретических данных. Это объясняется наличием таких факторов, как конечная толщина проводников, тепловые потери и т.д. Поэтому следует учитывать влияние этих факторов.

Влияние толщины полосы можно учесть, введя в (10.9) и (10.10) вместо физической ширины  $W$  полосы ее эффективную ширину  $W_{\text{эфф}}$ :

$$W_{\text{эфф}} = W + \begin{cases} (t/\pi\varepsilon)(\ln(2/T)+1), & \frac{W}{d} > 1/2 > 2T \\ (t/\pi\varepsilon)(\ln(4/T)+1), & \frac{W}{d} < 1/2 < 2T \end{cases} \quad (10.14)$$

где  $T=t/d$ ,  $t$  – толщина полоски.

Формулы (10.14) получены для подложек с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon \leq 128$  и размеров проводника НПЛ  $\frac{W}{d} \in [0,01; 100]$ .

На частотах до 10 ГГц дисперсия эффективной диэлектрической проницаемости в микрополосковой линии обычно настолько мала, что ею можно пренебречь. Пример расчета дисперсионных характеристик НПЛ с широким проводником и экраном, расположенным над плоскостью проводника на расстоянии  $5d$ , приведен на рис. 10.5. На рисунке представлены дисперсионные кривые для различного типа гибридных волн и приведена область собственных значений, соответствующих полю излучения.

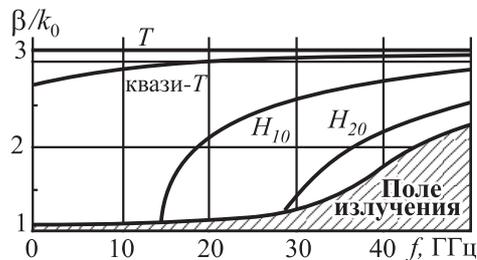


Рис. 10.5.

На основании результатов, приведенных на рис. 10.5, можно сделать следующие выводы. Для основного типа волны собственное значение продольного волнового числа существует, начиная с нулевой частоты. Для каждой волны высшего типа есть своя нижняя частота среза, отличная от нуля, которая возрастает с увеличением порядка волны. На частотах, лежащих ниже частоты среза для данного типа волны, последняя в НПЛ не распространяется, поскольку возбуждающаяся в линии энергия, соответствующая данному типу волны, не распространяется вдоль линии, а излучается в пространство. На частотах, больших частоты среза, волны высших типов распространяются в НПЛ с фазовыми скоростями большими, чем фазовые скорости всех волн более низкого типа на данной частоте. С ростом частоты фазовая скорость имеет нижний предел, численная величина которого равна фазовой скорости в диэлектрике подложки.

Волновое сопротивление микрополосковых линий, изготавливаемых промышленностью, обычно не выше 125 Ом и не ниже 20 Ом. Снизу значения  $Z_b$  ограничиваются потерями на излучение и преобразованием в моды, распространяющиеся в поперечной плоскости линии.

Так как толщина подложки микрополосковых плат невелика, вводят дополнительный металлический экран, обеспечивая тем самым механическую жесткость, возможность отвода тепла от активных элементов и защиту от атмосферного воздействия. Однако введение экрана оказывает влияние на

параметры линии, описываемые формулами (10.9 – 10.14). Экран отделяет внутреннее пространство от внешних полей. Часть краевых полей линии замыкается на экран, а не рассеивается во внешнем пространстве, что приводит к увеличению напряженности полей в воздушном зазоре между экраном и линией. Когда крышка и боковые части металлического экрана удалены на расстояние, приблизительно в пять или шесть раз больше, чем соответственно толщина подложки и ширина полоски, влияние экрана на параметры НПЛ пренебрежимо мало.

Для приближенного анализа и синтеза НПЛ можно воспользоваться графиками на рис. 10.6, построенными по формулам (10.9) и (10.10).

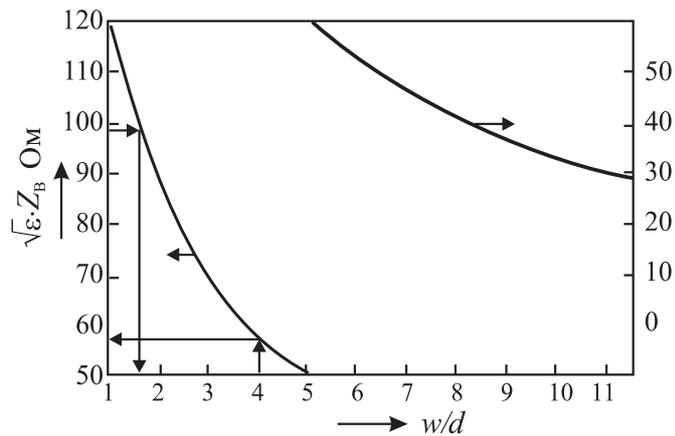


Рис. 10.6.

#### 10.4. Симметричная щелевая линия

*Симметричная щелевая линия (СЩЛ) представляет собой узкую щель, вырезанную в бесконечной металлической плоскости, расположенной на одной из сторон диэлектрической подложки (рис. 10.7, а). Линии электрического поля при  $\epsilon > 1$  концентрируются в подложке, а магнитного поля – имеют вид элементов, переходящих в кривые типа «седло» (рис. 10.7, б), образуя, таким образом, основную волну СЩЛ, напоминающую конструкцию поля волны типа  $H_{10}$  прямоугольного волновода. Распределение тока в слое на металлических полуплоскостях (рис. 10.7, в, г) – экспоненциальное.*

Необходимо отметить, что к настоящему времени не существует достаточно точной теории СЩЛ и такого отчетливого физического понимания принципа работы СЩЛ, которое характерно, например, для НПЛ. Сказанное относится и к другим щелевым структурам, таким, как несимметричная щелевая линия (НСЩЛ) и др. Ниже приведены некоторые приближенные соотношения, поясняющие, с одной стороны, физику работы СЩЛ, а с другой – пригодные для непосредственного практического использования.

Для расчета параметров СЩЛ необходимо знать основные компоненты электрического и магнитного полей. При  $W/\lambda \ll 1$  напряжение между краями бесконечно протяженной регулярной щели можно заменить эквивалент-

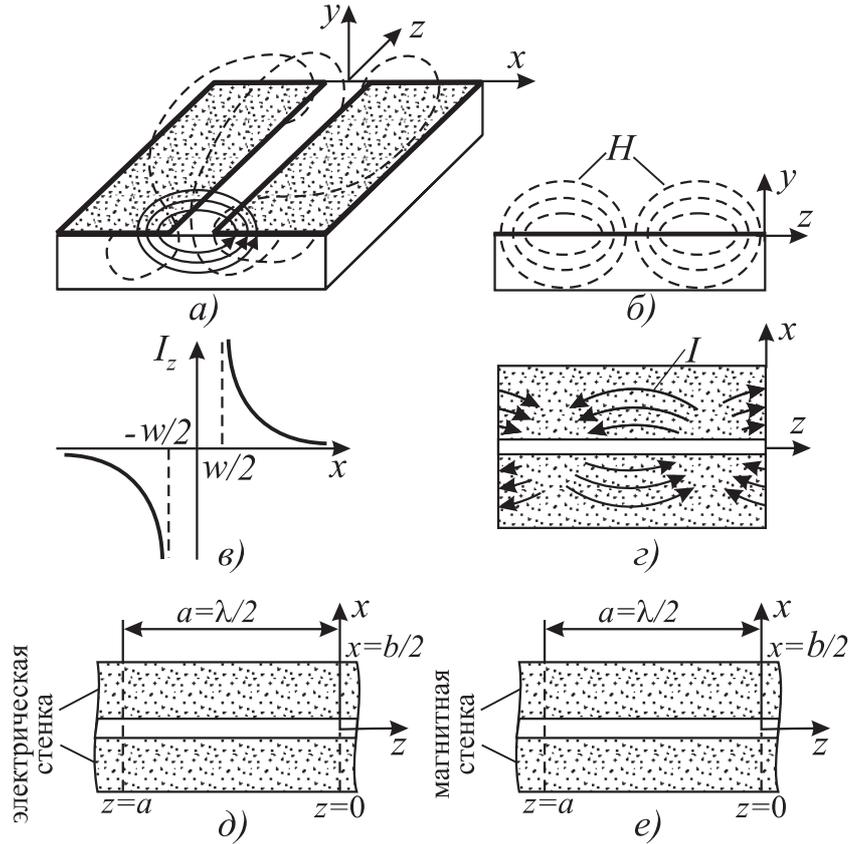


Рис. 10.7.

ным магнитным током. При этом продольная составляющая магнитного поля для любой точки пространства записывается в виде уходящей волны

$$H_z(r) = AH_0^{(1)}(gr), \quad (10.15)$$

$$g^2 = -\beta^2 + k_0^2, \quad (10.16)$$

где  $r$  – расстояние от начала координат до точки наблюдения,  $H_n^{(1)}(\zeta)$  – функция Ханкеля первого рода  $n$ -го порядка,  $\beta = 2\pi/\lambda$  – продольное волновое число,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число для воздуха,  $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{эфф}}$  – длина волны в СЦЛ,  $\varepsilon_{эфф}$  – эффективная диэлектрическая проницаемость СЦЛ.

Поперечные составляющие поля СЦЛ в цилиндрических координатах определяются из уравнений Максвелла и имеют вид:

$$H_r = -\frac{\beta}{g^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} = A \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{-1/2} H_1^{(1)}(gr), \quad (10.17)$$

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{g^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} = -120\pi \frac{\lambda}{\lambda_0} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{-1/2} H_1^{(1)}(gr). \quad (10.18)$$

Используя свойства функции Ханкеля и условие  $|H_z/H_r|=1$ , определим расстояние  $r_{кр}$  от плоскости щели до места нахождения области круговой поляризации:

$$\left| H_1^{(1)}(gr_{kp}) / H_0^{(1)}(gr_{kp}) \right| = \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_0)^2} \quad (10.19)$$

Из формул (10.15) и (10.17) следует, что выражение (10.19) при  $g \rightarrow \infty$  стремится к единице. Поэтому на некотором расстоянии от щели электромагнитная волна имеет эллиптическую поляризацию (близкую к круговой).

Напряжение в произвольной точке слоя металла, нормированное на напряжение в щели, определяется следующей формулой:

$$U_r / U_0 = (\pi / 2) gr \left| H_1^{(1)}(gr) \right|. \quad (10.20)$$

При расчетах эффективной диэлектрической проницаемости и волнового сопротивления СЩЛ часто используется модель линии с электрическими и «магнитными» стенками (рис.10.7, д, е); это позволяет приближенно представить СЩЛ в виде прямоугольного волновода и решать задачу в прямоугольных координатах. Волноводные модели, изображенные на рис. 10.7, д, е, предполагают распространение волны без потерь в продольном направлении СЩЛ.

Введение электрических стенок на расстоянии  $a$ , равном половине длины волны ( $E_\tau = 0$ ), и «магнитных» стенок симметричного осевой линии щели на достаточно большом расстоянии в ( $H_\tau = 0$ ) не искажают в СЩЛ компоненты поля. В результате из первоначальной структуры (рис. 10.7, а) мы выделили участок, который можно рассматривать как прямоугольный волновод с емкостной диафрагмой, размещенной на диэлектрической подложке (рис.10.7, д). В подобной структуре полный спектр волн, удовлетворяющих граничным условиям, состоит из волн  $H_{1,2n}$  для  $n \geq 0$  и  $E_{1,2n}$  для  $n \geq 1$ .

Волны  $H_{10}$  и все высшие типы волн в волноводе без диэлектрика не распространяются, поскольку величина  $a$  меньше половины длины волны в воздухе. В диэлектрике распространяются волны  $H_{10}$ , а распространение высших типов волн зависит от ширины волновода  $a$ .

Результаты расчета и аппроксимации по описанной выше модели даются следующими выражениями ( $9,6 \leq \varepsilon \leq 20$ ):

для  $0,2 \leq W / d \leq 1$  ( $W$  – ширина щели,  $d$  – толщина полоски)

$$\lambda / \lambda_0 = 0,987 - 0,483 \lg \varepsilon + (W / d)(0,111 - 0,0022 \varepsilon) - (0,121 + 0,094 W / d - 0,032 \varepsilon) \lg(100d / \lambda_0), \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} Z_B = & 113,19 - 53,55 \lg \varepsilon + 1,25(W / d)(114,59 - 51,88 \lg \varepsilon) + \\ & + 20(W / d - 0,2)(1 - W / d) - \\ & - [10,25 - 51 \lg \varepsilon + (W / d)(2,1 - 1,421 \lg \varepsilon) - 100d / \lambda_0]^2 \times \\ & \times [0,15 + 0,23 \lg \varepsilon + (W / d)(2,07 \lg \varepsilon - 0,79)] \end{aligned} \quad (10.22)$$

для  $0,02 \leq W / d \leq 0,2$

$$\lambda / \lambda_0 = 0,923 - 0,448 \lg \varepsilon + 0,2W / d - (0,29W / d + 0,017) \lg(100d / \lambda_0) \quad (10.23)$$

$$Z_B = 72,66 - 35,19 \lg \varepsilon + 50(d / W)(W / d - 0,02) \times (W / d - 0,1) + \lg(100W / d)(44,28 - 19,58 \lg \varepsilon) - [0,321 \lg \varepsilon - 0,11 + (W / d)(1,07 \lg \varepsilon + 1,44)] \times [11,4 - 6,07 \lg \varepsilon - 100d / \lambda_0]^2 \quad (10.24)$$

Необходимо напомнить, что волновое сопротивление в СЦЛ определяется неоднозначно. При выводе формул (10.22) и (10.24) использовано энергетическое определение сопротивления.

Структура же поля СЦЛ такова, что волновое сопротивление можно определить и как отношение максимального напряжения в щели к току, текущему в продольном направлении по металлическим полуплоскостям:

$$Z_B = \frac{U}{I}. \quad (10.25)$$

Аналитическое выражение для волнового сопротивления в соответствии с (10.25) имеет вид:

$$Z_B = 296,1 \sqrt{\varepsilon_{эфф}} \left\{ \left( 1 - \varepsilon_{эфф} \right) \left[ \ln \left( k_0 d \sqrt{\varepsilon_{эфф} - \frac{1}{4}} \right) + \ln \gamma \right] \right\}^{-1} \quad (10.26)$$

где  $\ln \gamma = 0,5772$  - постоянная Эйлера.

Формула (10.26) в отличие от (10.22) и (10.23) лучше соответствует действительности в коротковолновой части сантиметрового и миллиметрового диапазонов волн. В дециметровом и длинноволновой части сантиметрового диапазонов (10.22) и (10.23) дают более точное совпадение с эксперимен-

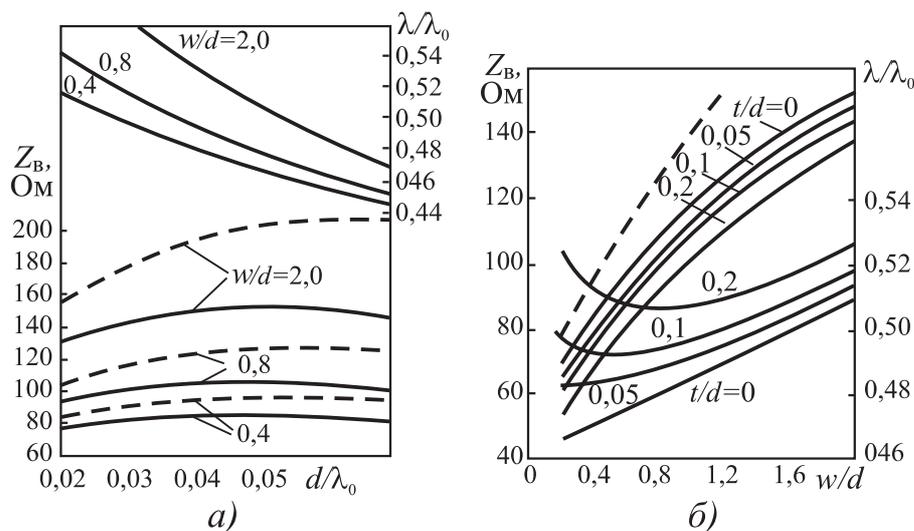


Рис. 10.8.

На [рис.10.8,а](#) приведены дисперсионные кривые волнового сопротивления и длины в СЦЛ с достаточно удаленными стенками экрана, а также результаты, рассчитанные по формулам (10.22) и (10.23). Влияние толщины металлических полуплоскостей на частотные характеристики волнового сопротивления и длины волны в СЦЛ показано на [рис.10.8,б](#). Для узких щелей, как видно из кривых [рис.10.8,б](#), необходимо учитывать толщину металлических полуплоскостей. Для сравнения на [рис.10.8,б](#) приведена кривая волнового сопротивления СЦЛ при нулевой толщине проводников.

### 10.5. Несимметричная щелевая линия

*Несимметричная щелевая линия (НЩЛ) образуется металлическими полуплоскостями, нанесенными с разных сторон диэлектрической подложки. В зависимости от взаимного расположения полуплоскостей относительно друг друга возможны различные модификации НЩЛ: линия с перекрытием либо без перекрытия ([рис.10.9, а, б](#)), а также с нулевым перекрытием, когда края полуплоскостей находятся друг против друга.*

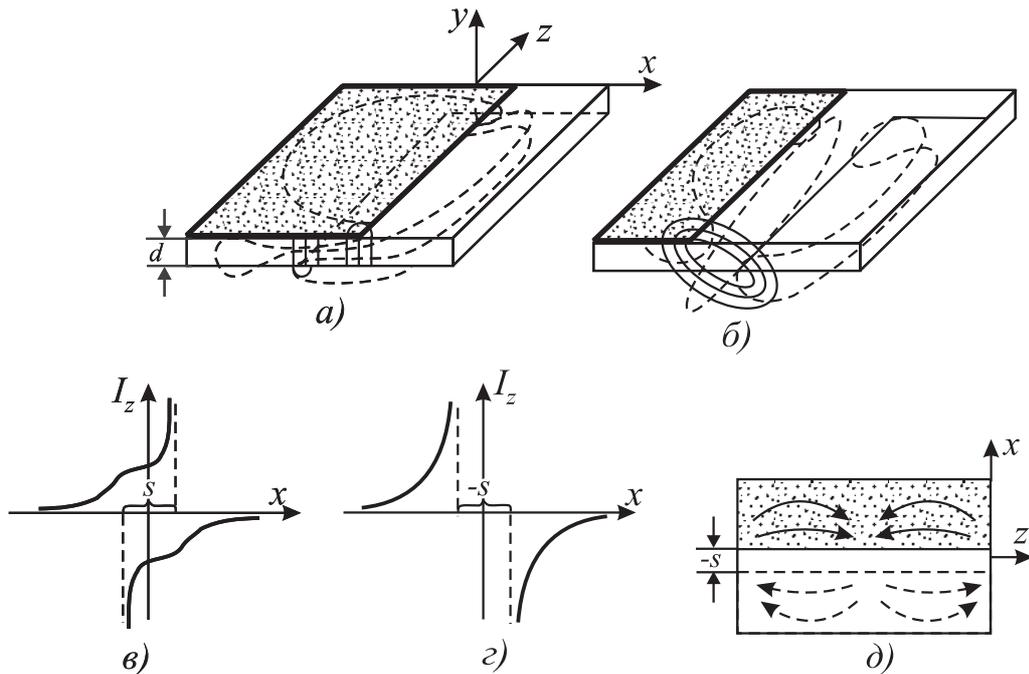


Рис. 10.9.

В НЩЛ отсутствует конструкторско-технологическая особенность, связанная с реализацией узких проводников и щелей. Это позволяет выполнять НЩЛ с практически любой величиной волновых сопротивлений. Ограничения накладываются лишь наличием излучения энергии (открытая НЩЛ) со стороны больших волновых сопротивлений (большое расстояние между полуплоскостями), а со стороны малых – возможностью возникновения волн волноводного типа и поверхностных волн. Кроме того, НЩЛ обладает боль-

шой широкополосностью и простой конструктивной реализацией СВЧ элементов на ее основе в комбинации с НПЛ и СЦЛ, что во многом упрощает включение в нее (последовательно или параллельно) полупроводниковых приборов.

Поле НЦЛ описывается путем формулировки и решения интегрального уравнения с использованием метода Галеркина. Однако для простого и наглядного в физическом плане описания НЦЛ можно воспользоваться полуэмпирической моделью, полученной в результате обработки большого числа экспериментальных данных.

Результатом аппроксимации экспериментальных данных для эффективной диэлектрической проницаемости НЦЛ является формула:

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = (1/4)\varepsilon \left[ 3 + \text{th}(W/d - q) / 2(\varepsilon - 1) \right], \quad (10.27)$$

где  $q = (W/d)(2 - \varepsilon) + \varepsilon(\varepsilon - 1)/4$ .

Волновое сопротивление, рассчитанное методом конформных отображений для ограничений ширины проводников и сопоставленное с экспериментальными данными, в результате аппроксимации приводит к следующей зависимости:

$$Z_B = (120\pi / \sqrt{2\varepsilon}) K'(k) / K(k) \quad (10.28)$$

где  $k = 0,515 + 0,5\text{th}(W/d - 0,75)$ . Сравнение расчетных данных с экспериментальными дает максимальную погрешность порядка 8% при  $S < 0$  и до 1% при  $S > 0$ .

На [рис. 10.10](#) приведены экспериментальные данные (точки) по изучению НЦЛ, выполненной на подложке из поликора ( $\varepsilon = 9,8$ ). Измерения проводились в длинноволновой области сантиметрового диапазона; результаты расчета по формулам (10.27) и (10.28) представлены кривой 1. Для сравнения

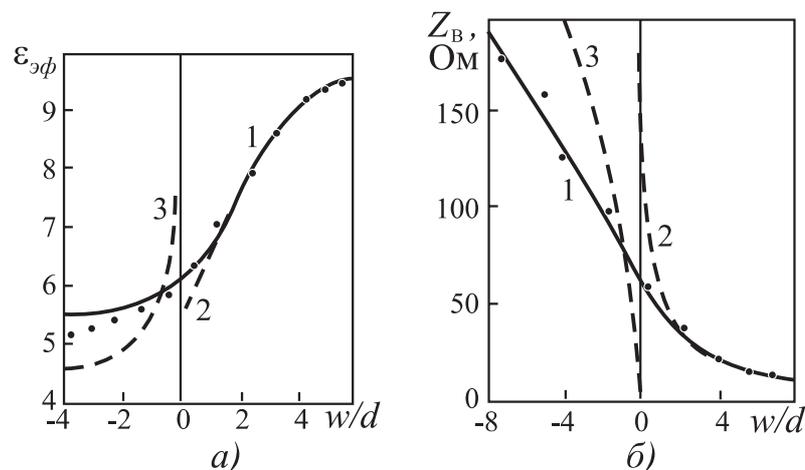


Рис. 10.10.

на этом же рисунке приведены результаты расчета НПЛ (кривая 2) и СЦЛ (кривая 3).

Анализ приведенных на [рис. 10.10](#) результатов показывает, что НЦЛ обладает рядом интересных свойств. Во-первых, в случае перекрытия проводников ( $S > 0$ ) волновое сопротивление НЦЛ практически совпадает с НПЛ. Полное количественное совпадение наблюдается при величине перекрытия порядка полуволны и более. В случае без перекрытия проводников ( $S < 0$ ) НЦЛ по своим характеристикам в некоторой степени похожа на СЦЛ.

## 10.6. Модифицированный метод неортогональных рядов для расчета характеристик полосковых линий передачи.

### 10.6.1 Общая формулировка метода

В данном параграфе рассматривается модифицированный вариант метода неортогональных рядов, в котором системы неортогональных функций вводятся как решения семейств специальных краевых задач для области более простой формы, чем рассматриваемая. Эти семейства выбираются так, чтобы получаемые системы функций также обладали всеми необходимыми свойствами (полнота, линейная независимость), но учитывали геометрию и характер краевых условий. Они сложнее по форме и методике построения, но лучше передают особенности искомого решения. В связи с этим высокая точность достигается использованием небольшого их числа. В ряде задач для коэффициентов разложения по таким системам функций получаются системы линейных алгебраических уравнений 2-го рода, для которых гарантирована сходимость процесса редукции и вычислительная устойчивость. Таким образом, использование этих систем функций для разложения искомого решения эквивалентно процедуре регуляризации.

Описываемый подход реализуется на примере задачи математического моделирования процессов распространения электромагнитных волн в линиях передачи для интегральных схем диапазона сверхвысоких частот. Построение базисных функций выполняется аналитически при помощи метода задачи Римана-Гильберта.

Сформулируем метод сначала в общем виде. Для этого рассмотрим резонатор сложной формы в виде объема  $V$  ([рис. 10.11 а, б](#)), внутри которого будем решать уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \varphi + p^2 \varphi = 0. \quad (10.29)$$

Рассмотрим задачи двух типов:

1. Найти собственные значения  $p_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , уравнения (3.1) при граничном условии

$$\varphi|_S = 0, S = S_0 \cup S', S' = \bigcup_{\alpha=1}^N S_\alpha. \quad (10.30)$$

2. Решать уравнения (3.1) при граничном условии

$$\varphi|_S = f(Q), Q \in S. \quad (10.31)$$

где:  $f(Q)$  - заданная функция.

Конфигурации резонаторов сложных форм (а, б) и соответствующая им ключевая задача для волнового трансформатора (в).

Мысленно удалим поверхность  $S_\alpha$  и продолжим отрезки регулярных волноводных каналов до бесконечности. При этом придем к волноводному трансформатору (рис. 10.11 в), для каждого из каналов которого известны полные системы собственных волн  $\varphi_{m(\alpha)} e^{\pm j\Gamma_{m(\alpha)} Z_\alpha}$  зависят только от попереч-

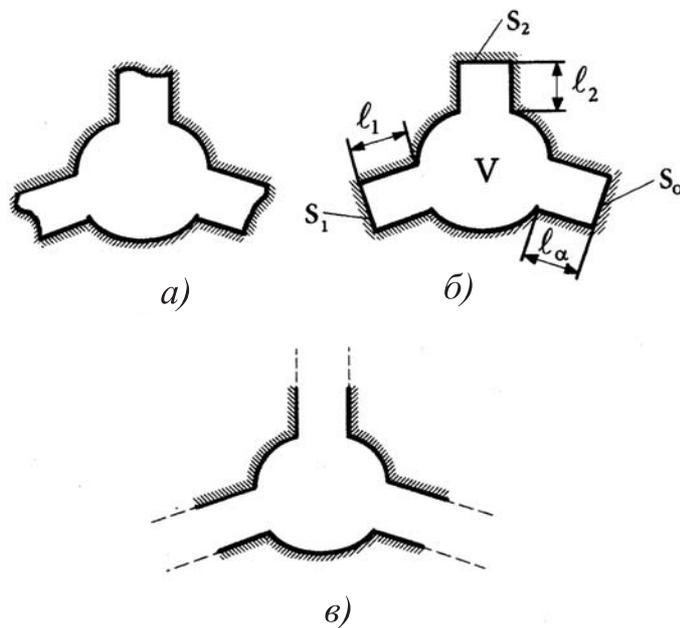


Рис. 10.11.

ных для соответствующего канала координат),  $\alpha=1, 2, \dots, N$ ;  $m=1, 2, \dots$ . Введем систему функций  $\{\Phi_\beta^m\}$ , каждая из которых представляет собой решение задачи о возбуждении рассматриваемого волноводного трансформатора  $m$ -ой волной  $\beta$ -го канала. Внутри канала с номером  $\alpha$

$$\Phi_\beta^m = \Phi_{\alpha\beta}^m = \sum_{n=1}^{\infty} R_{n(\alpha)}^m \varphi_{n(\alpha)} e^{j\Gamma_{n(\alpha)} Z_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \varphi_{m(\alpha)} e^{-j\Gamma_{m(\alpha)} Z_\alpha} \quad (10.32)$$

где  $R_{n(\alpha)}$  - постоянные коэффициенты,  $\delta_{\alpha\beta}$  - символ Кронекера,

$\Gamma_n = \left( p^2 - \chi_{n(\alpha)}^2 \right)^{1/2}$ ,  $\chi_{n(\alpha)}$  есть  $n$ -е собственное значение двумерной области  $S_\alpha$ . (В задаче 2 можно перейти, полагая  $p=0$ , к уравнению Лапласа. При этом в (10.32) будет  $\Gamma_{n(\alpha)} \rightarrow j\chi_{n(\alpha)}$ ).

Систему функций  $\{\Phi_\beta^m\}$  будем использовать для разложения искомого поля  $\varphi$ . Фактическое построение  $\Phi_\beta^m$ , в частности вычисления  $R_{n(\alpha)}^m$  для многих практически интересных задач можно выполнить аналитически (при помощи метода Винера-Хопфа, переходом к задаче Римана и т.д.). в более сложных случаях для этой цели можно применить численно-аналитические методы.

Для первой задачи искомое поле в канале с номером  $\alpha$  обозначим символом  $\varphi_\alpha$  и представим разложением по функциям (10.32):

$$\varphi_\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^N C_{m(\beta)} \Phi_{\alpha\beta}^m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^N C_{m(\beta)} \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} R_{n(\alpha)}^m \varphi_{n(\alpha)} e^{j\Gamma_{n(\alpha)} Z_\alpha} + \delta_{\alpha\delta} \varphi_{m(\alpha)} e^{-j\Gamma_{m(\alpha)} Z_\alpha} \right] \quad (10.33)$$

Для второй задачи разложения (10.33) модифицируется следующим образом:

$$\varphi = \Phi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^N C_{m(\beta)} \Phi_\beta^m.$$

где  $\Phi_0$  - частное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничному условию (10.31) на поверхности  $S_0$ .

Вычисление неизвестных коэффициентов  $C_{m(\beta)}$  производится при помощи граничных условий на поверхностях  $S_\alpha$ . Будем использовать для этого метод моментов (для определенности рассмотрим его на примере задачи (1), заключающийся в переходе от условий (10.30) при  $z_\alpha = l_\alpha$  к цепочке соотношений ортогональности

$$\int_{S_\alpha} \varphi_\alpha \varphi_{n(\alpha)} dS = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.34)$$

Подставляя в эти равенства (3.5) и интегрируя по  $S_\alpha$ , получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений для  $C_{m(\beta)}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^N C_{m(\beta)} \left[ R_{n(\alpha)}^m e^{2j\Gamma_{n(\alpha)} l_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \right] = 0. \quad (10.35)$$

Спектральный параметр  $p$  входит в (3.7) через  $R_{n(\alpha)}^m$  и  $\Gamma_{n(\alpha)}$ . Характеристические числа  $p$  отыскиваются из условий существования нетривиального решения системы (10.35).

Справедливо утверждение (теорема эквивалентности), что собственные значения задачи 1 и характеристические числа системы (10.35) совпадают, а собственные функции задачи 1 и нетривиальные решения системы (10.35) связаны соотношением (10.33).

Следует отметить, что как изложенная выше схема решения, так и теорема эквивалентности остаются в силе и для других типов граничных условий: Неймана, 3-го рода и т.д. Однако в последнем случае, если коэффициент в граничном условии комплексный, рассматриваемая краевая задача стано-

вится несамосопряженной. Это может потребовать добавления в (10.33) присоединенных волн. Аналогичные схемы можно построить и в случае краевых задач для системы уравнений Максвелла.

Для обоснования различных вычислительных схем на основе функций (10.32) существенны вопросы о полноте и линейной независимости таких функциональных систем. Рассмотрим эти свойства.

Пусть все  $\ell_\alpha$  таковы, что некоторое действительное число  $p$  не является собственным значением задачи 1 в области  $V$ . Тогда система функций  $\{\Phi_\beta^m(p)\}$  линейно независима на  $S'$  и полна в  $L_2(S')$ .

Свойство полноты будет доказано, если из условий

$$\int_{S'} \varphi \Phi_\beta^{m*} dS = \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_\alpha} \Phi_{\beta\alpha}^{m*} dS = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, N; \quad m = 1, 2, \dots, \infty. \quad (10.36)$$

вытекает  $\varphi=0$  на  $S'$ . Подставим в (10.36) разложение (10.33) и получим, что набор равенств (10.36) эквивалентен системе линейных алгебраических уравнений (символ "\*" означает комплексное сопряжение).

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} d_{n(\alpha)} R_{n(\alpha)}^{m*} e^{-2j\Gamma_{n(\alpha)} \ell_\alpha} + d_{n(\beta)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} = 0. \quad (10.37)$$

относительно

$$d_{n(\alpha)} = \int_{S_\alpha} \varphi \varphi_{n(\alpha)} dS$$

Видно, что в условиях сделанного утверждения система (10.37) имеет только тривиальное решение: все  $d_{n(\alpha)}=0$ . При этом следует учесть, что матрицы систем (10.37) и (10.35) являются эрмитово-сопряженными, а область  $V$  нерезонансна. Но из равенства  $d_{n(\alpha)}=0$  следует  $\varphi=0$  на  $S'$ , т.к. системы  $\{\varphi_{n(\alpha)}\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , для каждого  $\alpha$  полны в соответствующих пространствах  $L_2(S_\alpha)$ .

Для доказательства линейной независимости приравняем к нулю некоторое разложение по функциям  $\Phi_\beta^m$  на  $S'$ :

$$\sum_{\beta=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{C}_{m(\beta)} \Phi_\beta^m = 0 \text{ на } S'. \quad (10.38)$$

Далее перейдем от (10.38) к эквивалентной цепочке соотношений ортогональности вида (10.34). Тогда для  $\tilde{C}_{m(\beta)}$  получим вновь систему (10.35), которая, как показано выше, имеет лишь тривиальное решение.

Аналогично можно рассмотреть также уравнение (10.29) со смешанными граничными условиями на  $S$  (условие Дирихле на  $S_0$ , условие Неймана на  $S'$ ). В предположении, что  $p$  не является собственным значением данной

краевой задачи, можно утверждать, что система функций  $\left\{ \frac{\partial \Phi_\beta^m(p)}{\partial n} \right\}$  линейно независима и полна в  $L_2(S')$ .

Рассмотрим теперь область  $\tilde{V} \subset V$ , ограниченную  $S_0$  и гладкими, но не плоскими поверхностями  $\Sigma_\alpha$  (рис. 3.1a). Пусть выполнены условия теорем о линейной независимости и полноте, доказанных выше, и  $\Sigma_\alpha \cup S_\alpha = \emptyset$ . Справедливо следствие, состоящее в том, что система функций  $\{\Phi_\beta^m(p)\}$  полна в  $L_2(\Sigma')$ ,

$$\Sigma' = \bigcup_{\alpha=1}^N \Sigma_\alpha.$$

Это следствие доказывается следующим образом: пусть  $\tilde{\varphi}(M)$ ,  $M \in \tilde{V}$ , - решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию Дирихле на  $S_0$  и условию  $\tilde{\varphi}(M)|_{\Sigma'} = f(M_0)$ , а  $f(M_0)$  - заданная функция,  $M_0 \in \Sigma'$ .

Функция  $\tilde{\varphi}(M)$  существует для произвольной  $f(M_0) \in L_2(\Sigma')$ . Для любого набора  $\Sigma_\alpha$  имеется  $S'$  такая, что соответствующий ей объем  $V$  нерезонансен. Аналогично по теореме Купрадзе можно показать, что существует  $F(Q) \in L_2(S')$ , для которой

$$\tilde{\varphi}(M) = \int_{S'} F(Q) G(M, Q) dS'_Q, \quad Q \in S', \quad (10.39)$$

где  $G(M, Q)$  - функция Грина в области  $V$ , подчиненная указанным выше смешанным граничным условиям. Используя (3.11) и неравенство Буняковского-Шварца, получаем, что

$$\left\| f(M_0) - \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{\beta=1}^N \hat{C}_{m(\beta)} \Phi_\beta^m(p) \right\|_{L_2(\Sigma')} \leq \text{const} \left\| F(Q) - \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{\beta=1}^N \hat{C}_{m(\beta)} \frac{\partial \Phi_\beta^m}{\partial n} \right\|_{L_2(\Sigma')} \quad (10.40)$$

где  $\hat{C}_{m(\beta)}$  - произвольные коэффициенты. Выбором  $n_0$  и подбором этих коэффициентов правая часть (3.12) может быть сделана сколь угодно малой, откуда и вытекает утверждение следствия. Совершенно аналогично можно доказать полноту  $\{\Phi_\beta^m(p)\}$  в  $L_2$ , на произвольной замкнутой поверхности внутри  $V$ .

Доказанное выше утверждение о полноте  $\{\Phi_\beta^m\}$  позволяют использовать эти функции для представления решений, в том числе в областях достаточно сложных некоординатных форм. для отыскания коэффициентов разложения по ним, кроме обычного метода моментов, можно использовать вариационные принципы, метод наименьших квадратов, коллокационные процедуры и т.д.

### 10.6.2 Расчет физических параметров полосковых линий передачи

Конфигурация рассматриваемой модели линии передачи показана на рис. 10.12а. Она является достаточно общей и позволяет исследовать ряд типов линий, широко применяемых в технике.

В квази-Т-приближении задача сводится к вычислению потенциала  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа  $\nabla_{xy}^2 \varphi = 0$  в области

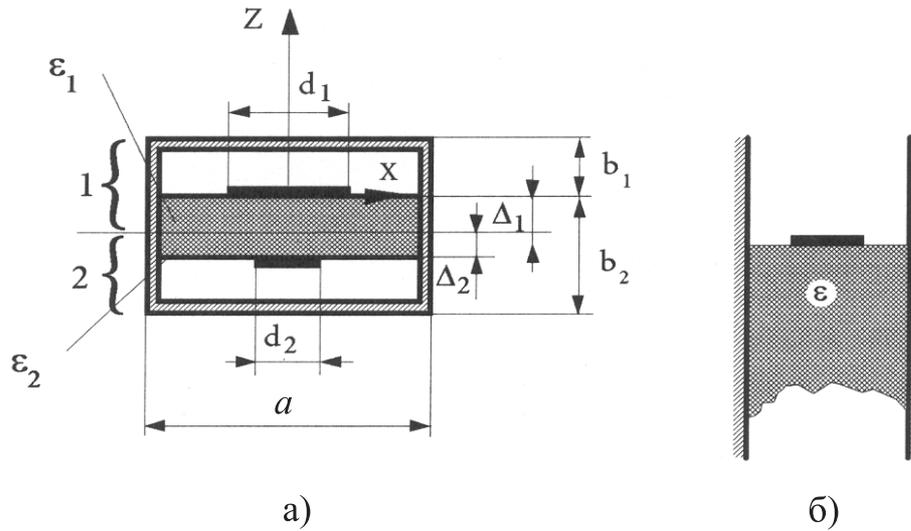


Рис. 10.12.

$|x| < \frac{a}{2}$ ,  $-b_2 \leq z \leq b_1$  Граничные условия имеют вид

$$\varphi\left(\frac{\pm a}{2}, z\right) = \varphi(x, -b_2) = \varphi(x, b_1) = 0,$$

$$\varphi(x, -(\Delta_1 + \Delta_2))\Big|_{|x| \leq \frac{d_2}{2}} = 0, \quad \varphi(x, 0)\Big|_{|x| \leq \frac{d_1}{2}} = 1.$$

Кроме того, должны быть выполнены условия непрерывности Z-компонента вектора электрического смещения  $\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$  при  $z=0$   $\left(|x| \geq \frac{d_1}{2}\right)$ ,  $z=-\Delta_1$ ,  $z=-(\Delta_1+\Delta_2)$   $|x| \geq \frac{d_2}{2}$  (при этом  $\varepsilon=1$  при  $z>0$ ,  $z \leq -(\Delta_1 + \Delta_2)$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_1$ , при  $0 \geq z \geq -\Delta_1$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_2$ , при  $-\Delta \geq z \geq -(\Delta_1 + \Delta_2)$ ).

Наибольший прикладной интерес представляет погонная емкость линии, определяемая соотношением

$$C = \varepsilon_0 \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-0} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=+0} \right) dx,$$

где  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума.

Через нее выражается  $\varepsilon_{\text{эфф}} = \frac{C}{C_0}$ , где  $C_0 = \lim_{\varepsilon_{1,2} \rightarrow 1} C$

и волновое сопротивление  $Z_B = 120\pi\varepsilon_0^{-1} (C - C_0)^{-\frac{1}{2}}$ .

Конкретизируем для данной задачи способ построения базисных функций из п.10.6.1. Рассмотрим полосу  $|x| \leq \frac{\alpha}{2}$ ,  $-\infty \leq Z \leq \infty$  (рис. 10.12б) и построим семейство решений краевых задач для уравнения Лапласа  $U_m(X, Z)$ ,  $m=1, 2, \dots$ , при граничных условиях

$$\begin{aligned} U_m \left( \pm \frac{a}{2}, Z \right) = 0, \quad U_m(X, 0) = 0, \quad |X| \leq \frac{d}{2}, \\ \frac{\partial U_m}{\partial Z} \Big|_{z=+0} = \varepsilon \frac{\partial U_m}{\partial Z} \Big|_{z=-0}. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Потребуем, чтобы

$$\lim_{Z \rightarrow -\infty} U_m = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{Z \rightarrow -\infty} [U_m - \cos(\gamma_m x) e^{\gamma_m Z}] = 0,$$

где  $\gamma_m = (2m+1) \frac{\pi}{a}$ . Функции  $U_m(X, Z)$  можно представить в виде разложений:

$$U_m(X, Z) = \cos(\gamma_m x) e^{\gamma_m Z} + \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(m)} \cos(\gamma_p x) e^{\pm \gamma_p Z}. \quad (10.42)$$

(знаки “+” и “-” соответствуют областям  $Z > 0$  и  $Z < 0$ ), а для коэффициентов  $C_p^{(m)}$  получить из граничных условий (10.41) системы парных сумматорных уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(m)} \cos(\gamma_p x) = -\cos(\gamma_m x), \quad x \leq \frac{d}{2}, \\ \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(m)} \gamma_p \cos(\gamma_p x) = \gamma_m \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cos(\gamma_m x), \quad x \geq \frac{d}{2}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

Уравнения (10.43) могут быть точно решены методом задачи Римана-Гильберта; в результате имеем

$$C_p^{(m)} = \frac{2 \left( m + \frac{1}{2} \right) (-1)^p}{(\varepsilon + 1) \left( p + \frac{1}{2} \right)} \left[ \left( V_p^m - V_p^{-(m+1)} - \frac{R_p}{R_\sigma} (V_\sigma^m - V_\sigma^{-(m+1)}) \right) \right] - \delta_{pm} (-1)^p, \quad (10.44)$$

где  $V_p^m, V_\sigma^m, R_p, R_\sigma$  - специальные функции аргумента  $U = \cos\left(\frac{\pi(d-a)}{a}\right)$ ,

выражаемые через полиномы Лежандра:

$$V_p^m = \frac{p+1}{2(p-m)} [P_p(u)P_{m+1}(u) - P_{p+1}(u)P_m(u)], \quad p \neq m;$$

$$V_m^m(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m+1} \rho_{m+1-k}(u) P_{k-m-1}(u), \quad m \geq 0,$$

где  $\rho_0(u) = 1, \rho_1(u) = -u, \rho_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u), n \geq 2$ ;

$$R_p = \frac{1}{2} P(u), \quad R_\sigma = \frac{\pi}{2} P_{\frac{1}{2}}(u);$$

$$V_\sigma^m = -\frac{\pi}{4\left(m + \frac{1}{2}\right)} \left[ P_{-\frac{1}{2}}(u)P_{m+1}(u) - P_{\frac{1}{2}}(u)P_m(u) \right].$$

Кроме того, введем семейство функций  $V_m(X, Z)$  удовлетворяющих уравнению Лапласа, граничным условиям (10.41), но с условиями на бесконечности вида

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} V_m = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{Z \rightarrow \infty} [V_m - \cos(\gamma_m x) e^{-\gamma_m Z}] = 0.$$

Функции  $V_m(X, Z)$  даются разложениями

$$V_m(X, Z) = \cos(\gamma_m z) e^{-\gamma_m Z} + \sum_{p=0}^{\infty} B_p^{(m)} \cos(\gamma_p z) e^{\mp \gamma_p Z} \quad (10.45)$$

а коэффициенты  $B_p^{(m)}$  вычисляются аналогично и даются выражением

$B_p^{(m)} = \varepsilon C_p^{(m)} - \delta_{mp}(1 - \varepsilon)$ . Функции (10.42) и (10.44) будут использованы для разложения искомого потенциала  $\varphi$ . В соответствии с полученными в п. 10.6.1 результатами, они обладают требуемыми свойствами полноты.

Для построения алгоритма решения разобьем исследуемую область на две частичные подобласти:

$$\text{область 1: } |x| \leq \frac{a}{2}, \quad -\Delta \leq z \leq b;$$

$$\text{область 2: } |x| \leq \frac{a}{2}, \quad -b_2 \leq z \leq -\Delta_1.$$

Будем искать решение в виде (область 1)

$$\varphi(X, Z) = V(X, Z) + \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m^{(1)} U_m^{(1)}(X, Z) + \beta_m^{(1)} V_m^{(1)}(X, Z)]$$

и (область 2)

$$\begin{aligned} \varphi(X, Z) = & \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_m^{(2)} U_m^{(2)}(a-x, -(z + \Delta_1 + \Delta_2)) + \\ & + \beta_m^{(2)} V_m^{(2)}(a-x, -(z + \Delta_1 + \Delta_2))]; \end{aligned}$$

$\alpha_m^{(j)}, \beta_m^{(j)}$  - неизвестные коэффициенты;  $U_m^{(j)}, V_m^{(j)}$  - функции (10.42), (10.44) при  $d=d_1, \varepsilon=\varepsilon_1$  для  $j=1$  и  $d=d_2, \varepsilon=\varepsilon_2$  для  $j=2$ ;  $V(X, Z)$  - решение уравнения Лапласа, убывающее при  $z \rightarrow \pm \infty$ , удовлетворяющее условию  $V(X, 0) = 1, |X| \leq \frac{d_1}{2}$ , а в остальном - граничным условиям (10.41). Оно имеет

вид

$$\begin{aligned} V(X, Z) &= \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(\gamma_p x) e^{\pm \gamma_p Z} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(-1)^p R_p}{(2p+1)R_\sigma} \cos(\gamma_p x) e^{\mp \gamma_p Z}. \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов  $\alpha_m^{(1)}, \beta_m^{(1)}$  следует наложить условия непрерывности  $\varphi$  и  $z$ -компоненты  $\bar{D}$  при  $z = -\Delta_1$ , а также граничные условия для  $\varphi$  при  $z = b_1, z = -b_2$ . Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{pmatrix} \xi^{11} & \xi^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^{23} & \xi^{24} \\ \xi^{31} & \xi^{32} & -\xi^{33} & \xi^{34} \\ \xi^{31} & \xi^{32} & -2I \xi^{33} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} & \xi^{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \beta^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \\ \beta^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (10.46)$$

где  $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}$  - бесконечномерные векторы коэффициентов  $\alpha_n^{(j)}, \beta_n^{(j)}$ , а  $\xi^{ij}$  - матрицы следующей структуры:

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{11} &= \delta_{mn} + \bar{C}_n^{(m)} e^{-2\gamma_n b_1}, \\ \xi_{mn}^{12} &= \left( \delta_{mn} + \bar{B}_n^{(m)} \right) e^{-2\gamma_n b_1}, \\ \xi_{mn}^{31} &= \left( \delta_{mn} + \bar{C}_n^{(m)} \right) e^{-2\gamma_n \Delta_1}, \\ \xi_{mn}^{32} &= \delta_{mn} + \bar{B}_n^{(m)} e^{-2\gamma_n \Delta_1}, \\ \xi_{mn}^{33} &= \left( -\delta_{mn} + \bar{C}_n^{(m)} \right) e^{-\gamma_n (\Delta_1 + \Delta_2)}, \\ \xi_{mn}^{34} &= \left\{ -\delta_{mn} e^{-\gamma_n (\Delta_2 - \Delta_1)} - \bar{B}_n^{(m)} e^{-\gamma_n (\Delta_1 + \Delta_2)} \right\}, \\ \xi_{mn}^{44} &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left\{ -\delta_{mn} e^{-\gamma_n (\Delta_2 - \Delta_1)} + \bar{B}_n^{(m)} e^{-\gamma_n (\Delta_1 + \Delta_2)} \right\}, \end{aligned}$$

$I_{mn} = \delta_{mn}, \xi^{23}, \xi^{24}$  получаются из  $\xi^{11}, \xi^{12}$  заменами

$\bar{C}_n^{(m)}, \bar{B}_n^{(m)} \rightarrow \bar{C}_n^{(m)}, \bar{B}_n^{(m)}$  и  $b_1 \rightarrow b_1 - \Delta_1 - \Delta_2$  (одна либо две черты над

$C_n^{(m)}$ ,  $B_n^{(m)}$  означают их принадлежность, соответственно, первой и второй частичным областям). Коэффициенты  $v_{1,2}$  в правой части (10.46) даются равенствами

$$\begin{aligned} v_1 &= -A_n e^{-2\gamma_n b}, \\ v_2 &= -A_n e^{-2\gamma_n \Delta_1}, \end{aligned}$$

Система (10.46) является Фредгольмовой, что следует из асимптотических оценок  $C_n^{(m)}$ ,  $B_n^{(m)}$ ,  $A_n$ . Для нее строго обоснован метод редукции.

В качестве простейшего примера рассмотрим экранированную микрополосковую линию (рис. 10.13а).

Предельный переход к экранированной микрополосковой линии от более общей конфигурации 10.12а можно выполнить различными способами, например:  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ ,  $d_2 \rightarrow a$ , либо  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ ,  $\Delta_1 + \Delta_2 \rightarrow b_2$ , либо  $\Delta_2 \rightarrow 0$ ,  $d_2 \rightarrow a$  (рис. 10.13б, в, г).

На рис.10.14 приведены результаты расчета погонной емкости микро-

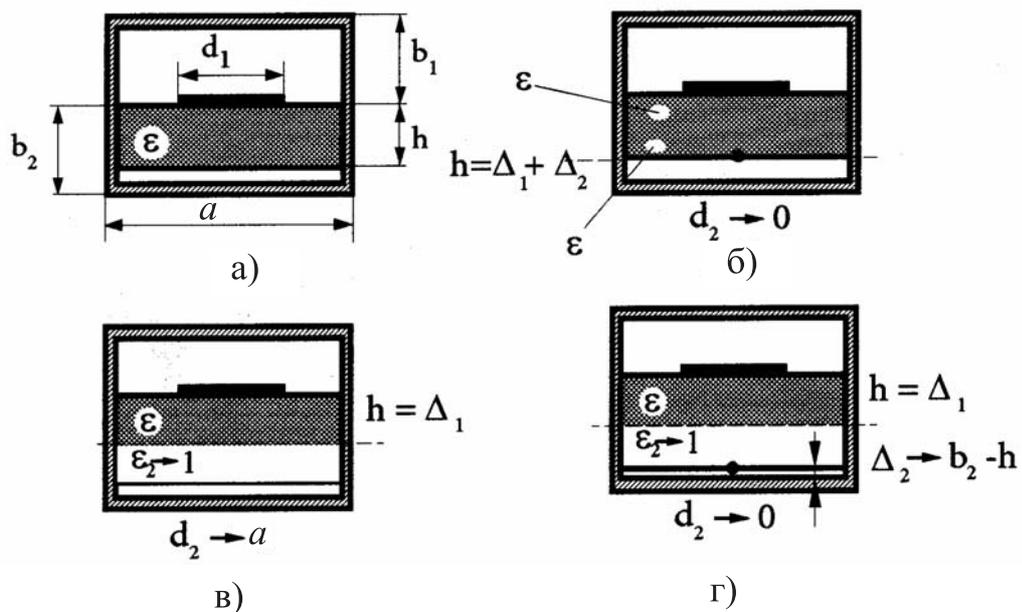


Рис. 10.13.

полосковой линии методом неортогональных рядов (эти результаты нанесены кружками). Для сравнения взяты данные (сплошные линии), полученные методом полуобращения с использованием задачи Римана-Гильберта. На рисунке:

$$\text{линия 1: } \frac{b_2}{a} = 0.25; \quad \frac{b_1 + b_2}{a} = 0.5; \quad \varepsilon = 10.5;$$

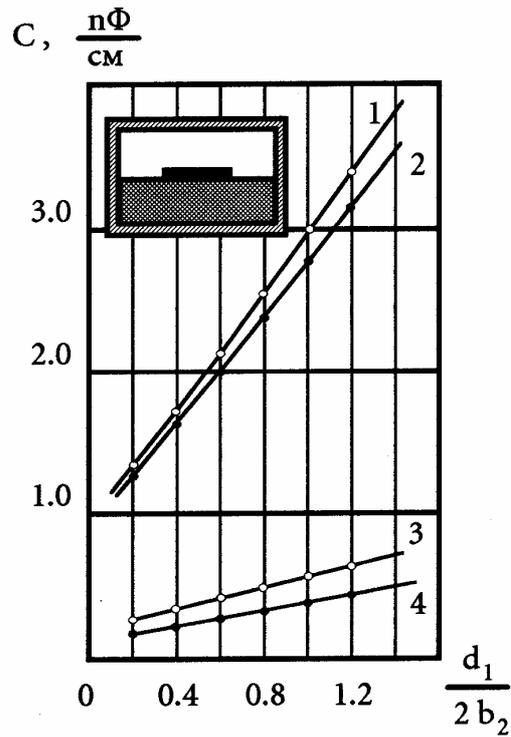


Рис. 10.14.

линия 2:  $\frac{b_2}{a} = 0.1$ ;  $\frac{b_1 + b_2}{a} = 0.9$ ;  $\epsilon = 10.5$ ;

линия 3:  $\frac{b_2}{a} = 0.25$ ;  $\frac{b_1 + b_2}{a} = 0.5$ ;  $\epsilon = 1.0$ ;

линия 4:  $\frac{b_2}{a} = 0.1$ ;  $\frac{b_1 + b_2}{a} = 0$ .  $\epsilon = 1.0$ .

В [табл. 10.1](#) приведены примеры характеристик полосковых линий, часто применяемых на практике

Табл.10.1

$\varepsilon$	a, MM	d <sub>1</sub> , MM	b <sub>1</sub> , MM	h, MM	$\frac{N}{4}$	I	$\varepsilon_{эфф}$	Z <sub>B</sub> , OM
9.8	1	0.02	20	1	2	300	5.403383	136.3948
9.8	1.5	0.05	20	1	3	300	5.430295	118.5018
9.8	2	0.1	20	1	5	300	5.492849	103.9079
9.8	8	0.6	20	1	5	300	6.229931	64.07808
9.8	10	1	20	1	5	300	6.484238	50.78413
9.8	15	3	20	1	10	300	7.28545	26.13688
9.8	20	8	20	1	10	300	8.107649	12.14053
3.78	2	0.1	20	1	5	300	2.419478	156.5620
3.78	8	0.6	20	1	5	300	2.662139	98.02476
3.78	10	1	20	1	5	300	2.744443	78.06032
3.78	18	5	20	1	10	300	3.136074	28.01408
1	20	8.87	0.5	0.5	10	500	1	10.18
1	25	7.31	0.5	0.5	10	500	1	12.27
1	25	6.2	0.5	0.5	10	500	1	14.33
1	23	5.37	0.5	0.5	10	500	1	16.40
1	20	4.72	0.5	0.5	10	500	1	18.46
1	15	3.13	0.5	0.5	10	500	1	26.73
1	5	1.21	0.5	0.5	10	500	1	57.98
1	3	0.19	0.5	0.5	10	500	1	162.02

### 10.6.3 Пример использования метода неортогональных рядов: расчет характеристик области сильной связи трехдецибелльного направленного ответвителя

Для создания трехдецибелльных направленных ответвителей (НО) на связанных полосковых линиях используются смещенные линии (рис. 10.15а). Полоса перекрытия НО более октавы реализуется каскадным соединением отрезков связанных линий с различной степенью связи в каждом каскаде. При увеличении числа каскадов в симметричном НО расширяется полоса рабочих частот и одновременно степень связи в его центральном каскаде. Следовательно, широкополосность симметричных НО ограничена возможностью реализации сильной связи.

Максимальная величина связи достигается при конфигурации нулевого смещения (рис. 10.15б), т.е., когда полоски расположены одна над другой.

Часто при проектировании НО на смещенных линиях пользуются формулами, полученными методом конформных преобразований, предполагая, что пространство внутри экрана заполнено однородным диэлектриком. Ис-

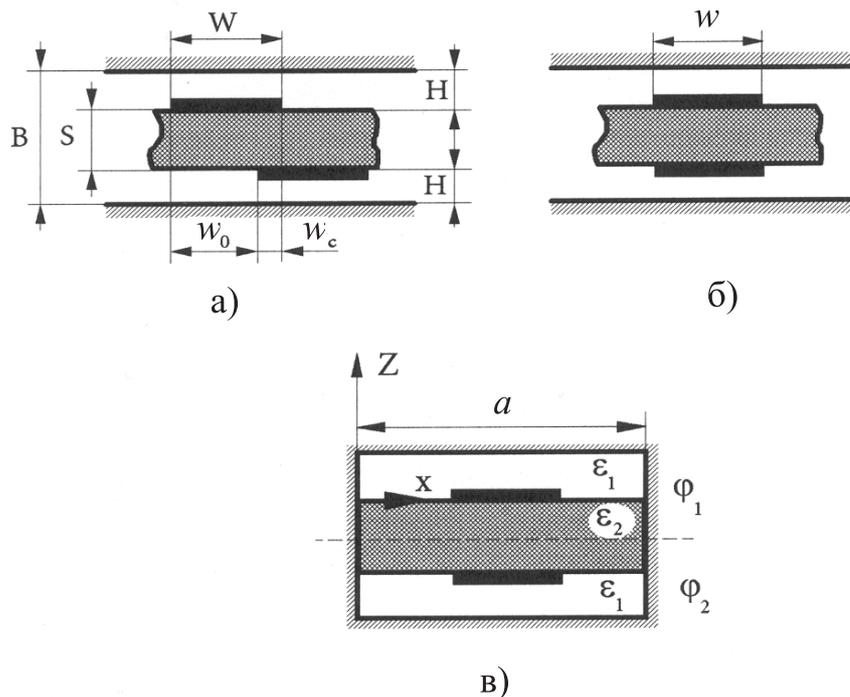


Рис. 10.15.

пользование прокладок из материалов с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , даже слабо отличающейся от проницаемости подложек  $\epsilon_2$ , ведет к ошибке в нахождении волновых сопротивлений четной и нечетной мод порядка 2-5%. Расчеты на ЭВМ показывают, что это приводит к увеличению девиации переходного ослабления относительно расчетного значения на 0,2-0,5 дБ. Кроме того, имеются ограничения на геометрические размеры связанных линий:

$$\frac{W_0}{S} \geq 0.7; \quad \frac{\frac{W}{B}}{\left(1 - \frac{S}{B}\right)} \geq 0.35.$$

Анализ этих ограничений показывает, что существует предел максимальных значений волновых сопротивлений, достоверно полученных таким методом. Поэтому метод конформных преобразований не позволяет точно определить геометрические параметры линий для высоких значений волновых сопротивлений четной моды, необходимые для создания сверхширокополосных симметричных НО.

Расчет же с помощью метода неортогональных рядов не связан с какими-либо ограничениями, накладываемыми на геометрию линий и характеристики материалов прокладки и подложек. Будем рассчитывать полностью экранированную модификацию линии ([рис. 10.17В](#)), что более удобно для применения метода, и при достаточно большом  $a$  не приводит к ощутимым погрешностям.

Эффективная диэлектрическая проницаемость и волновое сопротивление четной и нечетной мод вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{эфф}}^{++} &= \frac{\rho(\varepsilon) + \rho_{12}(\varepsilon)}{\rho(1) + \rho_{12}(1)}, & \varepsilon_{\text{эфф}}^{+-} &= \frac{\rho(\varepsilon) - \rho_{12}(\varepsilon)}{\rho(1) - \rho_{12}(1)}, \\ Z^{++} &= Z_0 \frac{1}{\sqrt{[\rho(\varepsilon) + \rho_{12}(\varepsilon)][\rho(1) + \rho_{12}(1)]}}, \\ Z^{+-} &= Z_0 \frac{1}{\sqrt{[\rho(\varepsilon) - \rho_{12}(\varepsilon)][\rho(1) - \rho_{12}(1)]}}, \end{aligned}$$

где  $Z_0$  - волновое сопротивление вакуума;

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) &= \frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon_0}, & \rho_{12}(\varepsilon) &= \frac{C_{12}(\varepsilon)}{\varepsilon_0}; \\ C^{++}(\varepsilon) &= C(\varepsilon) + C_{12}(\varepsilon), & C^{+-}(\varepsilon) &= C(\varepsilon) - C_{12}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Емкости  $C(\varepsilon)$  и  $C_{12}(\varepsilon)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &= \frac{-\varepsilon_0}{V_0} \int_{X_1}^{X_2} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{Z \rightarrow +0} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{Z \rightarrow -0} \right) dx, \\ C_{12}(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon_0}{V_0} \int_{X_1}^{X_2} \left( \varepsilon_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{Z \rightarrow -S+0} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{Z \rightarrow -S-0} \right) dx, \end{aligned}$$

где  $x_1 = \frac{(a-W)}{2}$ ;  $x_2 = \frac{(a+W)}{2}$ ;  $V_0$  - потенциал полоски.

Поля  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  представим разложениями по неортогональному базису

$$\varphi_1(X, Z) = V(X, Z) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^{(1)} U_m(X, Z) + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(1)} V_m(X, Z),$$

$$\varphi_2(X, Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^{(2)} U_m(a-x, -s-z) + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(2)} V_m(a-x, -s-z),$$

где базисные функции  $U_m(X, Z)$ ,  $V_m(X, Z)$  являются решениями ключевых задач электростатики ([п.10.6.2](#)) и имеют вид

$$U_m(X, Z) = \cos(\gamma_m x) e^{\gamma_m Z} + \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{(m)} \cos(\gamma_p x) e^{\gamma_p Z},$$

$$V_m(X, Z) = \cos(\gamma_m x) e^{-\gamma_m Z} + \sum_{p=0}^{\infty} B_p^{(m)} \cos(\gamma_p x) e^{\mp \gamma_p Z},$$

а функция  $V(X, Z)$  представляется в виде

$$V(X, Z) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(\gamma_p x) e^{\mp \gamma_p Z},$$

где  $\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{a}$ ; знаки «+» и «-» соответствуют областям  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Выражения для  $C_p^{(m)}$ ,  $B_p^{(m)}$ ,  $A_p$  приведены в [п.10.6.2](#), а коэффициенты  $\alpha_m^{(1,2)}$ ,  $\beta_m^{(1,2)}$  вычисляются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Эти системы решаются на ЭВМ методом редукции (усечения).

В [табл.10.2](#) приведены результаты расчета  $Z^{++}, Z^{+-}$  и величин  $\varepsilon_{\text{эфф}}^{++}$  и  $\varepsilon_{\text{эфф}}^{+-}$  связанных полосковых линий с полной лицевой связью при заданных геометрических размерах и величин  $\varepsilon_r$  материалов. Эти данные были использованы для изготовления экспериментального макета ( $Z_{\text{согл}} = (Z^{++} \cdot Z^{+-})^{1/2}$ ).

Табл. 10.2

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	H, мм	S, мм	W, мм	$\varepsilon_{\text{эфф}}^{++}$	$\varepsilon_{\text{эфф}}^{+-}$	$Z^{++}$ , Ом	$Z^{+-}$ , Ом	$Z_{\text{согл}}$ , Ом
2.8	3.1	1.5	0.04	0.36	3.062	2.811	10.81	219.7	48.737

В [табл.10.3](#), [10.4](#) приведены примеры расчета полосковых линий с полной лицевой связью при согласовании на 60 и 165 Ом. Из [табл. 10.4](#) видно, что при определенных соотношениях относительно диэлектрических прони-

цаемостей подложек и прокладки можно получить повышение волнового сопротивления четной моды.

Погрешность расчета волнового сопротивления и эффективной диэлектрической проницаемости линии методом неортогональных рядов определяется порядком редукции  $N$ . Следует отметить, что соотношения геометрических размеров рассматриваемой линии являются неблагоприятными с точки зрения сходимости метода редукции (малая толщина прокладки по сравнению с шириной полосок), поэтому порядок решаемой системы значителен. Сходимость метода редукции иллюстрируется [табл.10.5](#). В качестве оценки абсолютных погрешностей величин, приведенных в [табл.10.2](#), можно принять их приращения при увеличении  $N$  с 72 до 80.

Табл. 10.3

Примеры расчета полосковых линий с полной лицевой связью при согласо-

вании на 50 Ом:  $\varepsilon_1=2.8$ ;  $\varepsilon_2=3$ ;  $\frac{N}{4} = 10$ ;  $I=300$

a, мм	d <sub>1</sub> , мм	Δ, мм	b <sub>1</sub> , мм	$\varepsilon_{эфф}^{++}$	$\varepsilon_{эфф}^{+-}$	Z <sup>++</sup> , Ом	Z <sup>+-</sup> , Ом	Z <sub>согл</sub> , Ом
4	0.37	0.04	1.5	2.9788	2.8054	10.7665	226.831	49.4184
4	0.41	0.05	2	2.9769	2.8083	11.6774	218.437	50.4836
4	0.41	0.05	1.5	2.9767	2.8086	11.6607	205.127	48.9073
2	0.2	0.02	2	2.9804	2.8044	10.1102	250.613	50.3364
2	0.2	0.02	1.5	2.9801	2.8044	10.1097	248.379	50.1102
6	0.42	0.06	2	2.9742	2.8118	13.0443	204.293	51.6224

Табл. 10.4

Примеры расчета полосковых линий с полной лицевой связью при согласо-

вании на 165 Ом; Δ=1мм, b<sub>1</sub>=20мм,  $\frac{N}{4} = 10$ ; I=300;  $\varepsilon_1=1$

a, мм	$\varepsilon_2$	d <sub>1</sub> , мм	$\varepsilon_{эфф}^{++}$	$\varepsilon_{эфф}^{+-}$	Z <sup>++</sup> , Ом	Z <sup>+-</sup> , Ом	Z <sub>согл</sub> , Ом
10	1	1.2	1	1	86.0743	315.313	164.744
10	1.2	0.95	1.139	1.041	89.217	312.415	166.93
10	1.35	0.915	1.2435	1.0736	86.147	305.871	162.326
10	1.5	0.903	1.351	1.107	86.4038	315.414	165.08
10	1.7	0.89	1.487	1.145	85.53	322.078	165.97
10	1.85	0.7	1.603	1.212	88.85	309.711	165.088
9	2	0.6	1.652	1.226	89.415	288.257	160.545
8	5	0.3	3.260	1.8743	97.775	279.881	162.006

Табл. 10.5

### Иллюстрация сходимости метода редукции

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	N	I	$\varepsilon_{\text{эфф}}^{++}$	$\varepsilon_{\text{эфф}}^{+-}$	$Z^{++}$ , Ом	$Z^{+-}$ , Ом
2.8	3.1	24	500	2.974	2.821	27.099	203.276
2.8	3.1	32	500	2.990	2.816	20.498	210.518
2.8	3.1	40	500	3.007	2.813	16.469	214.910
2.8	3.1	48	500	3.023	2.812	13.991	217.492
2.8	3.1	56	500	3.038	2.811	12.483	218.899
2.8	3.1	64	500	3.049	2.811	11.589	219.527
2.8	3.1	72	500	3.056	2.811	11.081	219.721
2.8	3.1	80	500	3.062	2.811	10.8109	219.715

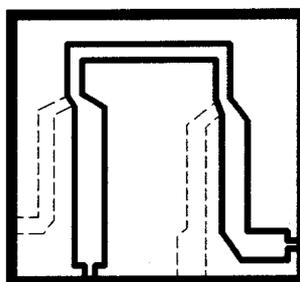


Рис. 10.16.

Табл.10.6

Зависимость точности решения от числа слагаемых при вычислении базисных функций

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	N	I	$\varepsilon_{\text{эфф}}^{++}$	$\varepsilon_{\text{эфф}}^{+-}$	$Z^{++}$ , Ом	$Z^{+-}$ , Ом
2.8	3.1	80	200	3.062	2.809	10.995	229.270
2.8	3.1	80	300	3.062	2.810	10.901	224.364
2.8	3.1	80	400	3.062	2.811	10.851	221.783
2.8	3.1	80	450	3.062	2.811	10.829	220.627

В качестве примера была поставлена задача разработки симметричного НО в диапазоне частот 140-1280 МГц (коэффициент перекрытия  $\chi=9,1$ ) с переходным ослаблением  $A=3\pm 1$  дБ. Для изготовления подложек использовался флан ( $\varepsilon_1=2.8$ ) толщиной  $H=1,5$  мм, для прокладки - полиамид ( $\varepsilon_2=3.1$ ) толщиной  $S=0,004$  мм. Общая длина области связи НО 18,6 см. для уменьшения геометрических размеров НО область связи была выполнена П-образной формы ([рис.10.18](#)).

Частотная характеристика переходного ослабления НО, измеренная на панорамном измерителе КСВ, приведена на [рис. 10.17](#).

Из [рис. 10.19](#) видно, что измеренное переходное ослабление НО в требуемом диапазоне частот находится в заданных пределах.

Таким образом, метод проектирования сверхширокополосковых трехдецибельных направленных ответвителей, основанный на строгом расчете каскада сильной связи методом неортогональных рядов, позволяет проектировать НО с учетом различия диэлектрических проницаемостей материалов подложек и прокладок в области сильной связи.

### 10.7. Копланарная линия передачи

Копланарная линия (КЛ) передачи относится к линиям квазиоткрытого типа, в которой распространяются волны квази-Т и Н типа. *Токонесущие проводники КЛ образованы узким проводником и двумя полубесконечными слоями металла, расположенными на одной стороне диэлектрической подложки.*

Структуры электромагнитных полей в КЛ для четного типа волн приведены на [рис. 10.20,а](#), для нечетного – на [рис.10.20,б](#). Распределение продольных токов в поперечном сечении КЛ представлено на [рис.10.20,в,г](#), а распределение токов на проводящих слоях – на [рис.10.20,д,е](#).

Для изотропной подложки погонная емкость рассчитывается с помощью формулы, полученной методом конформных отображений:

$$C = 2(\varepsilon + 1)\varepsilon_0 K(k) / K'(k), \quad (4.7.1)$$

$$\text{где } K'(k) = K(k'), \quad k = a_1 / b_1, \quad k' = (1 - k^2)^{1/2}.$$

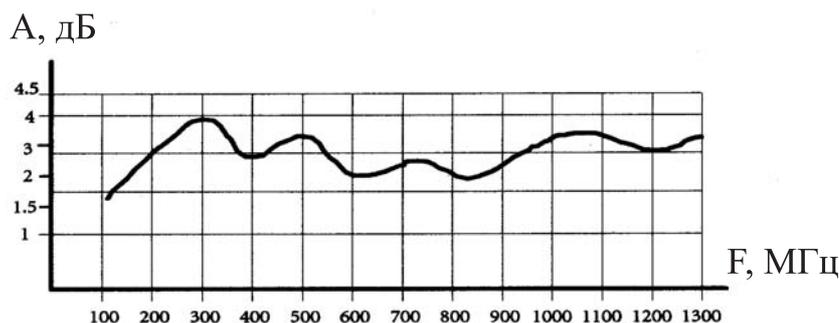


Рис. 10.17.

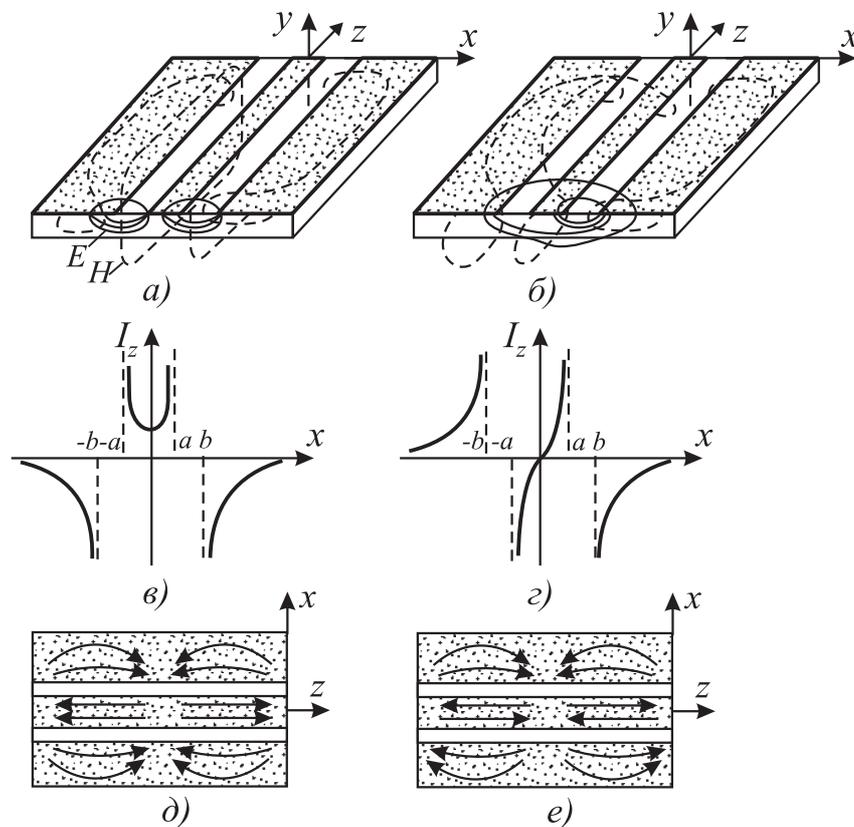


Рис. 10.18.

Результаты расчета емкости КЛ на единицу длины в отсутствии диэлектрической подложки представлены в [табл.10.7](#).

Табл.10.7

a/b	C, пФ
0.2	1.6529
0.4	2.1838
0.6	2.7566
0.8	3.5804

### 10.8. Четная и нечетная моды в связанных полосковых линиях

Пусть в симметричной либо микрополосковой линии две металлические полоски равной ширины располагаются, как показано на [рис. 10.20](#). Электрические поля, возникающие вокруг этих проводников, существуют не только в непосредственной близости от каждого из них, поэтому появляется взаимодействие между ними за счет краевых полей, величина которых зависит от разности потенциалов между проводниками, формы проводников, расстояния между проводниками и параметров диэлектрической подложки.

Взаимодействие, обусловленное краевыми полями, используется в таких устройствах, как направленные ответвители, а также во многих типах фильтров. Для получения требуемой характеристики в фильтре используются связанные отрезки линии передачи, резонирующие на определенной частоте и расположенные определенным образом.

Возможны два способа возбуждения проводников: оба центральных проводника находятся под одним и тем же потенциалом, равным, например,

Полосковые линии  
с боковой связью

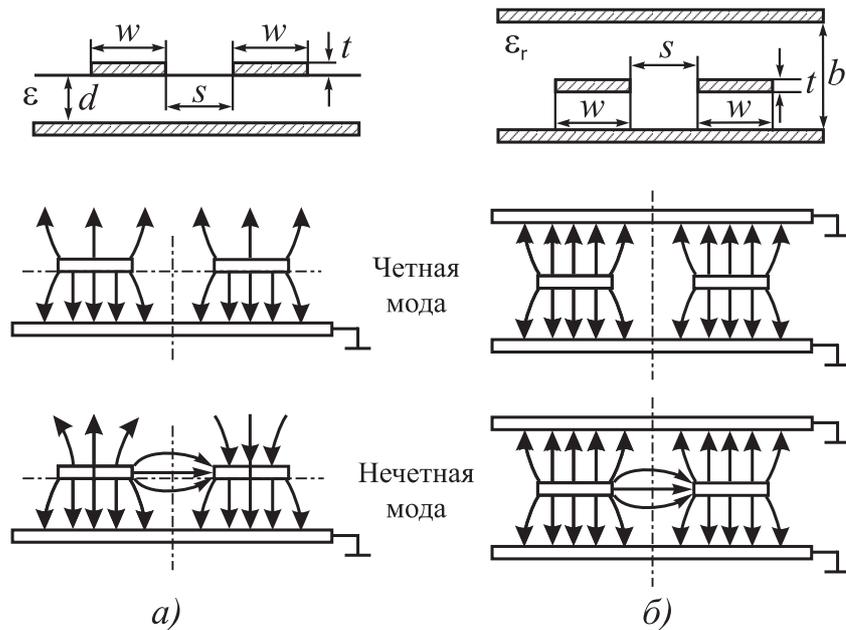


Рис. 10.19.

+1В (четная мода), либо потенциал одного из проводников +1, а второго –1В (нечетная мода). Тогда на оси симметрии (штрихпунктирная линия на [рис. 10.19](#)) будут располагаться «магнитная» стенка при возбуждении четной моды и электрическая стенка при возбуждении нечетной моды. Во всех связанных вдоль бокового торца (боковая связь) линии могут существовать четная и нечетная моды. Коэффициент связи между линиями, как правило, может быть выражен через волновое сопротивление четной и нечетной мод. Следующие соотношения устанавливают связь между этими величинами:

коэффициент связи  $C(\text{дБ}) = 20 \lg(Ku) = -20 \lg C_0$ ;

где  $Ku$  – коэффициент связи по напряжению;

волновое сопротивление для четной моды

$$Z_{BЧ} = Z_B \left( \frac{1 + C_0}{1 - C_0} \right)^{1/2}, \quad (10.47)$$

волновое сопротивление для нечетной моды

$$Z_{BH} = Z_B \left( \frac{1 - C_0}{1 + C_0} \right)^{1/2}; \quad (10.48)$$

$$Z_B = (Z_{BЧ} \cdot Z_{BH})^{1/2}. \quad (10.49)$$

Указанные соотношения строго выполняются для Т-волн, например, в коаксиальной или симметричной полосковой линии, где постоянные распространения четной и нечетной мод равны.

В микрополосковой линии каждая из этих мод, строго говоря, имеет свой коэффициент распространения и свою фазовую скорость, поэтому равенствами (10.47) – (10.49) можно пользоваться лишь как приближенными.

Простейшая реализация связанных симметричных полосковых линий (СПЛ) изображена на рис.10.21 б, где оба центральных проводника расположены на равном расстоянии от внешних проводников и настолько близко друг к другу, что возникает их взаимное влияние.

При  $t < 0,1$  и  $W/b > 0,35$  формулы для анализа имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon)^{1/2} Z_{BЧ} &= 30\pi(b-t)/(W + (bC/2\pi)A_{Ч}), \\ (\varepsilon)^{1/2} Z_{BH} &= 30\pi(b-t)/(W + (bC/2\pi)A_H), \end{aligned} \right\} \quad (10.50)$$

где

$$A_{Ч} = 1 + \frac{\ln(1+th\theta)}{0,6932}; \quad A_H = 1 + \frac{\ln(1+cth\theta)}{0,6932};$$

$$\theta = (\pi S/2b); \quad C = 2 \ln \left( \frac{2b-t}{b-t} \right) - (t/b) \ln \left[ \frac{t(2b-t)}{(b-t)^2} \right].$$

Формулы для синтеза имеют вид

$$W/b = (2/\pi) \operatorname{arcth}(k_{Ч}k_H),$$

$$S/b = (2/\pi) \operatorname{arcth} \left[ \frac{1-k_{Ч}}{1-k_H} (k_{Ч}/k_H)^{1/2} \right], \quad (10.51)$$

где

$$k_Q = \left[ 1 - \left( \frac{\exp(\pi x_Q) - 2}{\exp(\pi x_Q) + 2} \right)^4 \right]^{1/2} \quad \text{при } 1 \leq x_Q \leq \infty;$$

$$k_H = \left[ 1 - \left( \frac{\exp(\pi x_H) - 2}{\exp(\pi x_H) + 2} \right)^4 \right]^{1/2} \quad \text{при } 1 \leq x_H \leq \infty;$$

$$k_Q = \left[ \frac{\exp(\pi x_Q) - 2}{\exp(\pi x_Q) + 2} \right]^2 \quad \text{при } 0 \leq x_Q \leq 1;$$

$$k_H = \left[ \frac{\exp(\pi x_H) - 2}{\exp(\pi x_H) + 2} \right]^2 \quad \text{при } 0 \leq x_H \leq 1;$$

$$x_Q = \frac{Z_{BQ}(\varepsilon)^{1/2}}{30\pi}; \quad x_H = \frac{Z_{BH}(\varepsilon)^{1/2}}{30\pi}.$$

Приближенный синтез микрополосковых линий (рис.10.21 а) можно выполнять, имея зависимость величины  $Z_{BQ}$  и  $Z_{BH}$  от параметра  $W/h$  при различных значениях  $S/h$  и заданном значении  $\varepsilon$ . Затем рассчитываются те же зависимости, но при воздушном заполнении, что позволяет определить фазовую скорость и длину волны каждой из мод. (Так как у диэлектриков  $\mu = 1$ , погонная индуктивность линии в первом приближении не зависит от характера диэлектрического заполнения).

Действительно,

$$Z_{BQ} = v_{\phi Q} L, \quad Z_{BH} = v_{\phi H} L,$$

$$Z_{BQ}^{603d} = cL, \quad Z_{BH}^{603d} = cL,$$

т.е.

$$v_{\phi Q} = cZ_{BQ} / Z_{BQ}^{603d},$$

$$v_{\phi H} = cZ_{BH} / Z_{BH}^{603d}$$

и

$$\lambda_Q = v_{\phi Q} / f = cZ_{BQ} / fZ_{BQ}^{603d}, \quad (10.52)$$

$$\lambda_H = v_{\phi H} / f = cZ_{BH} / fZ_{BH}^{603d},$$

где  $f$  – рабочая частота.

Воспользуемся для примера графиками, построенными в (рис.10.22).

Пусть перед нами стоит задача определить величины  $W$  и  $S$  в связанных микрополосковых линиях, если заданы толщина подложки  $h=0,25$  мм, ее относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon=2,3$ , коэффициент связи  $S=-10$  дБ, рабочая частота  $f=1$  ГГц и волновое сопротивление питающей линии  $Z_B=50$  Ом.

Из соотношений (10.47) – (10.49) определяем величины

$$-10=20\lg C_0, \text{ откуда } C_0=0,32,$$

Проверим выполнение равенства

$$Z_B = (Z_{BЧ} \cdot Z_{BH})^{1/2} = (69,7 \cdot 36)^{1/2} = 50,01 \approx 50 \text{ (Ом)}.$$

Для нахождения отношений  $W/h$  и  $S/h$  обратимся к рис.10.22.

Наносим на вертикальную ось полученные значения  $Z_{BЧ}$  и  $Z_{BH}$ . Проводим прямые, параллельные горизонтальной оси, до пересечения с кривыми, соответствующими одному и тому же значению  $S/h$  (точки P на рис.10.22), и опускаем перпендикуляр, проходящий через эти точки, до пересечения с го-

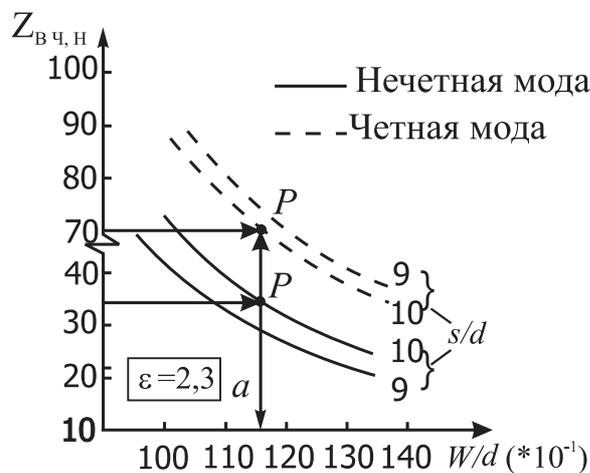


Рис. 10.20.

ризонгальной осью (точка Q).

$$P=10= S/h, \text{ т.е. } S = 10 \cdot 0,25 = 2,5 \text{ (мм)},$$

$$Q=11,7 = W/h, \text{ т.е. } W = 11,7 \cdot 0,25 \approx 2,9 \text{ (мм)}.$$

Далее мы можем определить эффективную диэлектрическую проницаемость и длину волны в линии:

$$\varepsilon_{эфф} \approx \frac{2,3+1}{2} + \frac{2,3-1}{2} (1+12(0,25/2,9))^{1/2} \approx 2,11,$$

$$\lambda \approx (c/f)(2,11)^{-1/2} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{1 \cdot 10^9} \cdot 0,69 = 21 \text{ (см)}$$

В приближенных расчетах можно полагать, что длина волны в связанной линии совпадает с длиной волны в одиночной полосковой линии с той же шириной полоски. При этом погрешность лежит в пределах 10%.

## ЧАСТЬ 3

### ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

#### ГЛАВА XI

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

#### 11.1. Типы объемных резонаторов

Объемным резонатором (ОР) называется объем  $V$ , заключенный между отражающими, обычно металлическими стенками  $S$ .

ОР по типу можно разделить на; а) открытые и закрытые б) отражательные и бегущей волны.

Закрытым называется ОР, стенки которого образуют замкнутую поверхность. Открытым называется ОР с незамкнутыми стенками, образующими систему отражающих зеркал.

В отражательных ОР накопление электромагнитной энергии происходит за счет установления стоячего поля как следствия переотражений от стенок резонатора. ОР бегущей волны представляет собой замкнутый на себя волновод, причем длина этой замкнутой системы на резонансной частоте  $\ell_p = N\Lambda_B$ . Здесь  $N$  - целое число;  $\Lambda_B$  - длина волны в волноводе на резонансной частоте для некоторого распространяющегося типа волн.

На [рис. 11.1](#) изображены резонаторы, образованные отрезками регу-

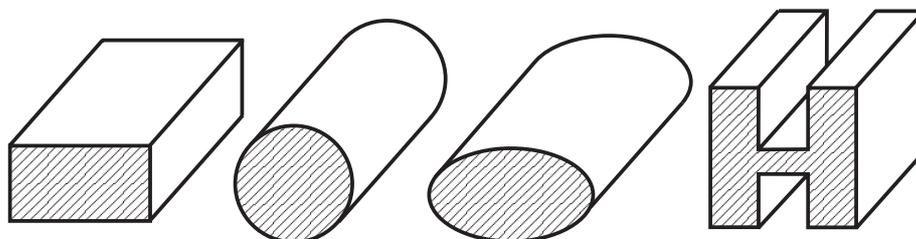


Рис. 11.1.

лярных волноводов различных форм поперечных сечений с короткозамкнутыми торцевыми крышками

На [рис. 11.2](#) показаны резонаторы, соответствующие телам вращения: сферической, биконической, эллиптической

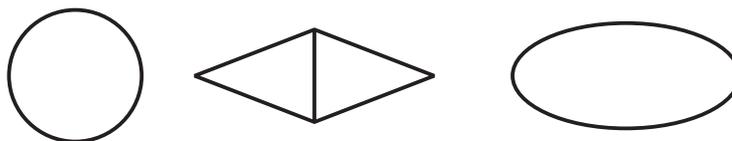


Рис. 11.2.

Заметим, что поле в закрытых резонаторах (например, [рис. 11.2](#)) на ряде типов колебаний не везде примыкает к стенкам (особенно это характерно для биконического и эллиптического резонаторов). Удалив «лишние» части

стенки получим соответствующие конфигурации открытых резонаторов, которые изображены на [рис. 11.3](#)

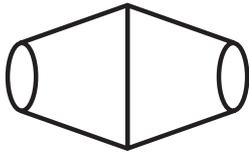


Рис. 11.3.

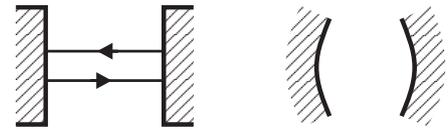
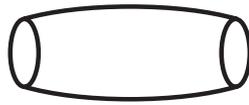


Рис. 11.4

На [рис. 11.4](#) показаны зеркальные открытые ОР: с плоскими (ОР Фабри-Перо) и сферическими зеркалами.

На [рис. 11.5](#) изображены ОР бегущей волны: четырехзеркальный резонатор гиротрона с Т-волной и резонансный блок магнетрона-амплитрона с замедленной Е-волной.

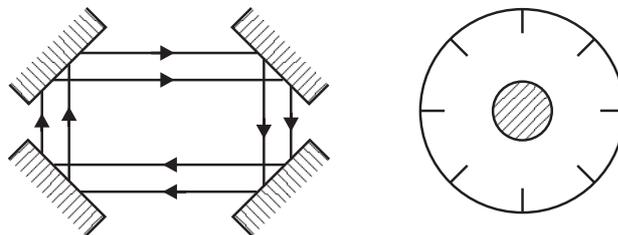


Рис. 11.5.

Далее мы остановимся на закрытых резонаторах, имея в виду их более простое математическое описание.

## 11.2 Поля в ОР как в отрезках регулярных волноводов с короткозамыкающими крышками

Пусть имеется отрезок регулярного волновода длиной  $d$ , закороченный с обеих сторон поперечными к оси волновода проводящими крышками ([рис. 11.6](#)).

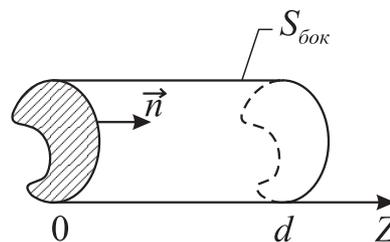


Рис. 11.6.

В отрезке волновода в принципе могут распространяться все докритические типы волн в  $+Z$  и  $-Z$  направлениях. Обозначим их соответственно  $E_v^+, H_v^+$  и  $E_v^-, H_v^-$ , причем, если поперечные крышки идеально проводящие, то на них должны выполняться условия

$$E_{vt} \Big|_{z=0,d} = 0, \quad (11.1)$$

где значок «t» означает поперечную составляющую векторов поля.

Представим

$$\dot{\vec{E}}_{vt}^+ = A_v^+ \vec{E}_{vt}^0(q_1, q_2) e^{-j\Gamma_v Z}, \quad \dot{\vec{H}}_{vt}^+ = A_v^+ \dot{\vec{H}}_{vt}^0(q_1, q_2) e^{-j\Gamma_v Z},$$

$$\dot{\vec{E}}_{vt}^- = A_v^- \vec{E}_{vt}^0(q_1, q_2) e^{j\Gamma_v Z}, \quad \dot{\vec{H}}_{vt}^- = A_v^- \dot{\vec{H}}_{vt}^0(q_1, q_2) e^{j\Gamma_v Z}.$$

Здесь  $q_1, q_2$  - обобщенные поперечные координаты (в общем случае - криволинейные),  $\Gamma_v$  - постоянная распространения  $\nu$ -го типа волн регулярно-го волновода,  $A_v^\pm$  - комплексные амплитуды волн.

Учитывая, что обе волны  $\nu$ -го типа распространяются навстречу друг другу, т.е.  $Z$ - составляющие векторов Умова-Пойнтинга  $S_{0Z} = \frac{1}{2} E_t, H_t^*$  для них противоположно направлены, имеем:

$$\vec{E}_{-vt}^0 = \mp \vec{E}_{vt}^0, \quad \vec{H}_{-vt}^0 = \pm \vec{H}_{vt}^0.$$

Выбирая верхние знаки, получим

$$\vec{E}_{vt} = \vec{E}_{vt}^0 \left( \dot{A}_v^+ e^{-j\Gamma_v Z} - \dot{A}_v^- e^{j\Gamma_v Z} \right),$$

$$\vec{H}_{vt} = \vec{H}_{vt}^0 \left( \dot{A}_v^+ e^{-j\Gamma_v Z} + \dot{A}_v^- e^{j\Gamma_v Z} \right).$$

Используя граничные условия (11.1) при  $Z=0$ , имеем  $A_v^+ = A_v^- = A_0$  и, соответственно

$$\vec{E}_{vt} = -2jA_0 \vec{E}_{vt}^0(q_1, q_2) \sin \Gamma_v Z,$$

$$\vec{H}_{vt} = 2A_0 \dot{\vec{H}}_{vt}^0(q_1, q_2) \cos \Gamma_v Z.$$

Учитывая далее условие (11.1) при  $Z=d$ , получаем резонансные (т.е. при которых возможен установившийся режим переотражений от крышек) длины волн:

$$\sin \Gamma_v d = 0, \quad \Gamma_v d = 0, \pi, \dots, \ell \pi \quad (11.2)$$

причем  $\Gamma_v d = 0$  может удовлетворяться только для волн типа Е, имеющих составляющую Е, иначе в этом случае  $E=0$ .

Из (11.2) следует:  $\Gamma_v = \frac{\ell\pi}{d}$ ,  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Поскольку  $\Gamma_v = \sqrt{k_v^2 - \chi_v^2}$ , а  $k_v = 2\pi f_v \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ , получаем следующую формулу для резонансной частоты

$$f_v = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\ell}{d}\right)^2 + \left(\frac{\chi_v}{\pi}\right)^2}. \quad (11.3)$$

Здесь  $\chi_v$  - собственное значение соответствующей краевой задачи, отвечающее волне с индексом  $v$ .

Теперь можно записать:

$$\dot{\vec{E}}_{vt} = -2j\dot{A}_0 \vec{E}_{vt}^0 \sin \frac{\pi \ell Z}{d}, \quad \dot{\vec{H}}_{vt} = 2\dot{A}_0 \vec{H}_{vt}^0 \cos \frac{\pi \ell Z}{d}.$$

Учитывая, что  $\dot{A}_0 = A_m e^{j\omega t}$ , действительные выражения  $\vec{E}_{vt}$  и  $\vec{H}_{vt}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_{vt} &= \text{Re } \dot{\vec{E}}_{vt} = 2A_m \vec{E}_{vt}^0(q_1, q_2) \sin \frac{\pi \ell Z}{d} \sin \omega t, \\ \vec{H}_{vt} &= \text{Re } \dot{\vec{H}}_{vt} = 2A_m \vec{H}_{vt}^0(q_1, q_2) \cos \frac{\pi \ell Z}{d} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Анализируя (11.4), можно сделать следующие выводы:

- $\vec{E}_{vt}$  и  $\vec{H}_{vt}$  колебания резонатора смещены пространственно на  $\frac{\Lambda v}{4}$  ( $\Lambda v$  - длина волны в волноводе);
- по времени  $\vec{E}_{vt}$  и  $\vec{H}_{vt}$  смещены на  $\frac{T_v}{4}$  ( $T_v$  - период колебания);
- усредненная за период продольная составляющая  $\bar{S}_{0vZ}^{T_v} = 0$ .

Формулы (11.4) при известном распределении полей бегущих волн позволяют синтезировать структуру соответствующего колебания с продольным индексом  $\ell$ . Однако для Е-колебаний с  $\ell = 0$  процедура построения структуры полей с помощью (11.4) очевидным образом затруднена.

### 11.3 Расчет полей в резонаторах с помощью потенциалов Герца

Для расчета полей собственных колебаний резонаторов, представляющих собой закороченные отрезки регулярных волноводов, удобно воспользо-

ваться, как и в случае регулярных волноводов, скалярными потенциалами Герца  $\dot{\Pi}_z^{e,m}$ . Для краткости далее значок  $z$  опустим. Имея в виду конфигурацию, представленную на [рис. 11.6](#) и полагая стенки резонатора идеально проводящими, поставим краевую задачу для  $\Pi^{e,m}$  следующим образом:

$$\nabla^2 \dot{\Pi}^{e,m} + k^2 \dot{\Pi}^{e,m} = 0, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \quad (11.5)$$

$$\Pi^e(S_{\text{бок}}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Pi^e}{\partial Z} \right|_{Z=0,d} = 0 \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial n}(S_{\text{бок}}) = 0, \quad \Pi^m|_{Z=0,d} = 0 \quad (11.7)$$

Рассмотрим далее наиболее типичные случаи.

### 11.3.1 Прямоугольный резонатор

В этом случае задача (11.5)...(11.7) трансформируется к ([рис. 11.7](#)):

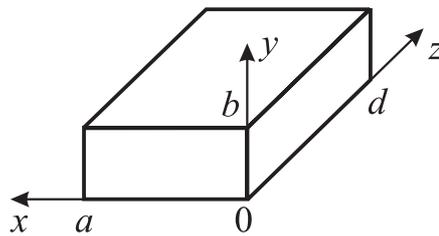


Рис. 11.7.

$$\nabla^2 \Pi^{e,m} + k^2 \Pi^{e,m} = 0 \quad (11.8)$$

$$\Pi^e = 0 \text{ при } x=0, a; y=0, b,$$

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0, d. \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, a;$$

$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0, b, \quad (11.10)$$

$$\Pi^m = 0 \text{ при } z=0, d.$$

Решая задачу как и ранее методом разделения переменных, получаем для E-колебаний

$$\dot{I}_v^e = \dot{A}_v^e \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{\ell\pi z}{d}, \quad (11.11)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$

$$k_v^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_z = \frac{\ell\pi}{d}.$$

Учитывая, что  $k_v = 2\pi f_v \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ , имеем для  $\nu$ -ой собственной частоты  $f_\nu$ :

$$f_\nu = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}, \quad \nu = m \oplus n \oplus \ell. \quad (11.12)$$

Для Н-колебаний находим

$$\dot{I}_v^m = \dot{A}_v^m \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{\ell\pi z}{d}, \quad (11.13)$$

$$f_\nu = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}, \quad (11.14)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \ell = 1, 2, \dots$$

Компоненты полей для Е-колебаний могут быть рассчитаны по формулам

$$\begin{aligned} \dot{E}_v^e &= \bar{Z}_0 K_v^2 \dot{I}_v^e + \text{grad} \frac{\partial \dot{I}_v^e}{\partial z}, \\ \dot{H}_v^e &= j\omega_v \varepsilon_a \text{rot}(\bar{Z}_0 \dot{I}_v^e). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Для Н-колебаний компоненты полей выражаются как

$$\begin{aligned} \dot{H}_v^e &= \bar{Z}_0 K_v^2 \dot{I}_v^m + \text{grad} \frac{\partial \dot{I}_v^m}{\partial z}, \\ \dot{E}_v^e &= -j\omega_v \varepsilon_a \text{rot}(\bar{Z}_0 \dot{I}_v^m). \end{aligned} \quad (11.16)$$

На [рис. 11.8](#) изображены колебания  $H_{101}$ ,  $E_{110}$ ,  $H_{111}$  в прямоугольном резонаторе

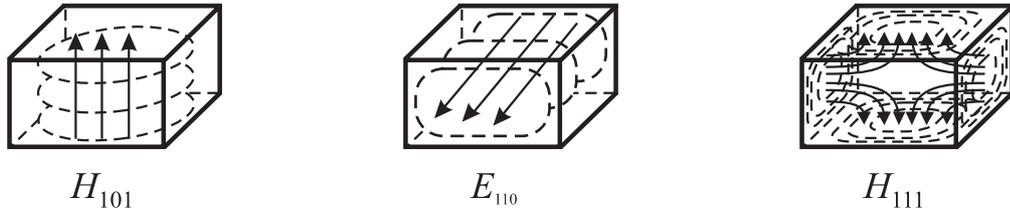


Рис. 11.8.

### 11.3.2. Цилиндрический резонатор

В этом случае задача (11.5)...(11.7) записывается в следующей форме (рис. 11.9):

$$\nabla^2 \dot{\Pi}^{e,m} + k^2 \dot{\Pi}^{e,m} = 0 \quad (11.17)$$

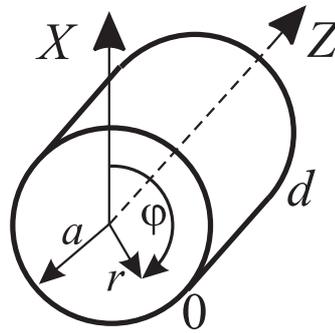


Рис. 11.9.

$$\dot{\Pi}^e(a) = 0, \quad \left. \frac{\partial \dot{\Pi}^e}{\partial Z} \right|_{Z=0, d} = 0, \quad \dot{\Pi}^e(0) \neq \infty \quad (11.18)$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\Pi}^m}{\partial r} \right|_a = 0, \quad \dot{\Pi}^m|_{Z=0, d} = 0, \quad \dot{\Pi}^m(0) \neq \infty. \quad (11.19)$$

$$\dot{\Pi}^{e,m}(\varphi + n \cdot 2\pi) = \dot{\Pi}^{e,m}(\varphi)$$

Решение задачи (11.17), (11.18) (E-колебания) дает следующий результат:

$$\dot{\Pi}_v^e = \dot{A}_v^e J_n \left( \frac{v_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \cos \frac{\pi lz}{d} \quad (11.20)$$

$$f_v^e = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left( \frac{v_{ni}}{\pi a} \right)^2 + \left( \frac{\ell}{d} \right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11.21)$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, \quad v = n \oplus i \oplus \ell.$$

Здесь  $J_n$  - функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка,  $v_{ni}$  -  $i$ -й корень этой функции ( $J_n(v_{ni}) = 0$ ).

Для H-колебаний, решая краевую задачу (11.17), (11.19), находим

$$\dot{\Pi}_v^m = \dot{A}_v^m J_n \left( \frac{\mu_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \sin \frac{\pi \ell z}{d}, \quad (11.22)$$

$$f_v^m = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left( \frac{\mu_{ni}}{\pi a} \right)^2 + \left( \frac{\ell}{d} \right)^2}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad i=1, 2, \dots, \quad (11.23)$$

$$\ell = 1, 2, \dots, \quad v = n \oplus i \oplus \ell.$$

Здесь  $\mu_{ni}$  –  $i$ -ый корень производной  $J_n(x)$ , т.е.  $J'_n(\mu_{ni}) = 0$ .

Используя (11.15) и (11.20), запишем компоненты полей для колебаний  $E_{ni\ell}$ , опуская амплитуду  $\dot{A}_v^e$ :

$$\dot{E}_Z = \left( \frac{v_{ni}}{a} \right)^2 J_n \left( \frac{v_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \cos \frac{\pi \ell z}{d}, \quad (11.24)$$

$$\dot{E}_r = - \left( \frac{\pi \ell}{d} \right) \left( \frac{v_{ni}}{a} \right) J'_n \left( \frac{v_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \sin \frac{\pi \ell z}{d},$$

$$\dot{E}_\varphi = \left( \frac{\pi \ell}{d} \right) \left( \frac{n}{r} \right) J_n \left( \frac{v_{ni}}{a} r \right) \sin n\varphi \sin \frac{\pi \ell z}{d},$$

$$\dot{H}_r = -j \frac{k_v}{W^0} \frac{n}{r} J_n \left( \frac{v_{ni}}{a} r \right) \sin n\varphi \cos \frac{\pi \ell z}{d},$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{k_v}{W^0} \frac{v_{ni}}{a} J'_n \left( \frac{v_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \cos \frac{\pi \ell z}{d}.$$

Аналогично, используя (11.16) и (11.22), получаем в случае  $H_{ni\ell}$  колебаний

$$\dot{H}_z = \left( \frac{\mu_{ni}}{a} \right)^2 J_n \left( \frac{\mu_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \sin \frac{\pi \ell z}{d}, \quad (11.25)$$

$$\dot{H}_r = \left( \frac{\pi \ell}{d} \right) \left( \frac{\mu_{ni}}{a} \right) J'_n \left( \frac{\mu_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \cos \frac{\pi \ell z}{d},$$

$$\dot{H}_\varphi = - \left( \frac{\pi \ell}{d} \right) \left( \frac{n}{r} \right) J_n \left( \frac{\mu_{ni}}{a} r \right) \sin n\varphi \cos \frac{\pi \ell z}{d},$$

$$\dot{E}_r = jk_v W^0 \left( \frac{n}{r} \right) J_n \left( \frac{\mu_{ni}}{a} r \right) \sin n\varphi \sin \frac{\pi \ell z}{d},$$

$$\dot{E}_\varphi = jk_v W^0 \left( \frac{\mu_{ni}}{a} \right) J'_n \left( \frac{\mu_{ni}}{a} r \right) \cos n\varphi \sin \frac{\pi \ell z}{d}.$$

Структуры полей некоторых типов колебаний в цилиндрических резонаторах приведены на [рис. 11.10](#).

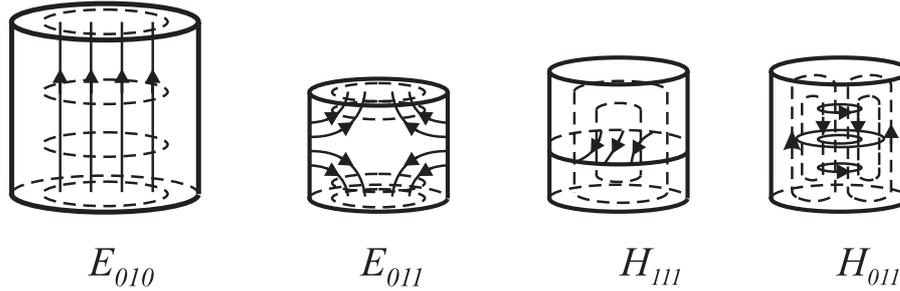


Рис. 11.10.

#### 11.4 Добротность собственных колебаний в резонаторах. Внешняя и нагруженная добротности

Полную или нагруженную добротность  $\nu$ -го колебания в резонаторе определим как

$$Q_\nu = \frac{\omega_\nu W_\nu}{P_{\nu\Pi}} = 2\pi \frac{W_\nu}{T_\nu P_{\nu\Pi}} \quad (11.26)$$

Здесь  $P_{\nu\Pi}$  - полная мощность потерь на  $\nu$ -м виде колебаний (потери в стенках, среде, заполняющей волновод, потери на излучение во внешние цепи или нагрузку),  $W_\nu$  - полная энергия, запасаемая в резонаторе на  $\nu$ -м виде колебаний,  $T_\nu$  - период собственных колебаний идеального резонатора на  $\nu$ -м виде колебаний.

Представим  $P_{\nu\Pi} = P_{\nu cp} + P_{\nu\sigma} + P_{\nu\Sigma}$ ,

где  $P_{\nu cp}$  - мощность потерь в среде,  $P_{\nu\sigma}$  - мощность потерь в металлических стенках,  $P_{\nu\Sigma}$  - мощность излучения через границу резонатора  $S$  (мощность, проходящая во внешние цепи).

Запишем теорему Умова-Пойнтинга для объема резонатора  $V$ , ограниченного замкнутыми стенками  $S$  для  $\nu$ -го колебания:

$$\oint_S \vec{S}_{0\nu} \overline{dS} + P_{\nu cp} + \frac{dW_\nu}{dt} = P_\nu^{cm}.$$

В рассматриваемом случае  $\iint_S \vec{S}_{0v} \overline{dS} = P_{v\sigma} + P_{v\Sigma}$ , а  $P_v^{cm} = 0$ .

Таким образом, получаем

$$\frac{dW_v}{dt} + P_{v\Pi} = 0.$$

Учитывая, что в соответствии с определением (11.26)  $P_{v\Pi} = \frac{\omega_v}{Q_v} W_v$ , приходим к следующему уравнению для  $W_v$  свободных колебаний:

$$\frac{dW_v}{dt} + \frac{\omega_v}{Q_v} W_v = 0 \quad (11.27)$$

Из (11.27) имеем  $W_v(t) = W_{v0} e^{-\frac{\omega_v}{Q_v} t}$ , где  $W_{v0}$  - начальное (в момент  $t=0$ ) значение  $W_v$ .

Таким образом, энергия свободных колебаний убывает во времени экспоненциально с постоянной затухания по времени  $\alpha = \frac{\omega_v}{Q_v}$ .

Примем во внимание то обстоятельство, что  $W_v$  - квадратичная относительно  $E_v, H_v$  функция:

$$W_v = \frac{1}{2} \int_{V_p} \{ \mu_a H_v^2 + \varepsilon_a E_v^2 \} dV_p$$

По этой причине следует полагать, что амплитуды  $E_v, H_v$  свободных колебаний изменяются во времени как  $e^{-\frac{\omega_v t}{2Q_v}}$ . Это позволяет ввести понятие о собственной комплексной частоте свободных колебаний:

$$\dot{\vec{E}}_v = \vec{E}_v^0(r) e^{j\dot{\omega}_v t}, \quad \dot{\vec{H}}_v = \vec{H}_v^0(r) e^{j\dot{\omega}_v t},$$

где  $\dot{\omega}_v = \omega_v \left( 1 + \frac{j}{2Q_v} \right)$  - комплексная собственная частота  $\nu$ -го вида колебаний.

Вернемся к определению полной добротности  $Q_v$  колебаний резонатора. Представим  $P_{v\Sigma} = P_{vH} + P_{vD}$ , где  $P_{vH}$  - мощность, излучаемая во внешние цепи (нагрузку),  $P_{vD}$  - мощность дифракционных потерь самого резонатора. Тогда в соответствии с (11.26) имеем

$$\frac{1}{Q_v} = \frac{1}{Q_{vcp}} + \frac{1}{Q_{v\sigma}} + \frac{1}{Q_{vD}} + \frac{1}{Q_{vH}}, \quad (11.28)$$

$$\text{где } Q_{vcp} = \frac{\omega_v W_v}{P_{vcp}}, \quad Q_{v\sigma} = \frac{\omega_v W_v}{P_{v\sigma}}, \quad Q_{vД} = \frac{\omega_v W_v}{P_{vД}}, \quad Q_{vH} = \frac{\omega_v W_v}{P_{vH}}.$$

Обычно  $Q_{v\sigma}$  называют омической добротностью резонатора,  $Q_{vД}$  - дифракционной добротностью,  $Q_{vH}$  - внешней добротностью. Объединим добротности, связанные с потерями в самом резонаторе в одну  $Q_{vc}$  - собственную добротность

$$\frac{1}{Q_{vc}} = \frac{1}{Q_{vcp}} + \frac{1}{Q_{v\sigma}} + \frac{1}{Q_{vД}} \quad (11.29)$$

Теперь, используя (11.28), (11.29), имеем

$$\frac{1}{Q_v} = \frac{1}{Q_{vc}} + \frac{1}{Q_{vH}}, \quad Q_v = \frac{Q_{vc} Q_{vH}}{Q_{vc} + Q_{vH}}.$$

Для закрытого резонатора  $Q_{vД} \rightarrow \infty$  и обычно  $P_{vcp} = 0$  ( $Q_{vcp} \rightarrow \infty$ ). Поэтому для таких резонаторов основной характеристикой является омическая добротность  $Q_{v\sigma}$ . Обратимся к её вычислению.

При вычислении  $W_v$  учитываем, что в любой момент времени для собственных колебаний имеет место равенство

$$W_v = W_{\mathcal{E}}^{\max} = W_M^{\max} = \frac{\mu_a}{2} \int_{V_p} H_{vm}^2 dV. \quad (11.30)$$

Перейдя, как и в (11.30) к средним за  $T_v$  величинам и комплексным векторам, запишем

$$P_{v\sigma} = \bar{P}_{v\sigma} = \text{Re} \left[ \oint_{S_p} \dot{S}_{0v} \bar{\vec{n}} dS \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \oint_{S_p} \left[ \dot{\vec{E}}_v, \dot{\vec{H}}_v^* \right] \bar{\vec{n}} dS \right]. \quad (11.31)$$

Воспользуемся теперь приближенными граничными условиями Леонтовича на поверхности стенок резонатора

$$\left[ \bar{\vec{n}} \bar{\vec{E}}_v \right] \Big|_S = -W_{\sigma}^0 \left[ \bar{\vec{n}} \left[ \bar{\vec{n}}, \bar{\vec{H}}_v \right] \right] \Big|_S, \quad (11.32)$$

$$W_{\sigma}^0 = \sqrt{\frac{\mu_{\sigma}}{\varepsilon'_a - j \frac{\sigma}{\omega_v}}} \approx (1 + j) \sqrt{\frac{\mu_{\sigma} f_v \pi}{\sigma}},$$

где:  $\mu_\sigma$  - магнитная проницаемость стенок,  $\sigma$  - их удельная проводимость.

Подставляя (11.32) в (11.31), имеем

$$\bar{P}_{\sigma v} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_\sigma f_v \pi}{\sigma}} \oint_S (\dot{H}_{vm} - \dot{H}_v) \dot{H}_v^* dS = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_\sigma f_v \pi}{\sigma}} \oint_S H_{vm\tau}^2 dS. \quad (11.33)$$

Здесь  $H_{vm\tau}$  - амплитуда касательной составляющей магнитной напряженности на стенке.

Используя (11.30) и (11.33), получаем

$$Q_{v\sigma} = \frac{\omega_v W_v}{P_{\sigma v}} = \frac{\omega_v \mu_a}{\sqrt{\frac{\mu_\sigma f_v \pi}{\sigma}}} \frac{\int_{V_p} H_{vm}^2 dV}{\oint_{S_p} H_{v\tau m}^2 dS} = \frac{2}{\delta^0} \frac{\mu_a}{\mu_\sigma} \frac{\int_{V_p} H_{vm}^2 dV_p}{\oint_{S_p} H_{v\tau m}^2 dS}, \quad (11.34)$$

где:  $\delta^0 = (\pi f_v \mu_\sigma \sigma)^{-\frac{1}{2}}$  - глубина проникновения (по ослаблению в е раз) поля в стенку,  $\delta^0 = \Delta f_v^{-1/2}$  [Гц]. для идеально гладкой стенки  $\Delta=66$  мм для меди, 62 мм для серебра, 127 мм для латуни.

Структура формулы для собственной добротности (11.34) указывает на то, что чем меньше область на стенках, занятая магнитным полем данного  $\nu$ -го колебания, тем выше добротность. Поэтому увеличить собственную добротность (и существенно) можно, «оттеснив» магнитное поле данного колебания от стенки либо поместив вблизи их диэлектрики с достаточно высоким  $\epsilon_a$ , либо за счет специальной конфигурации поверхности стенок (запирающие четвертьволновые канавки).

Приведем вычисленные по формуле (11.34) омические добротности некоторых колебаний в резонаторах простейших форм с гладкими стенками.

1.  $H_{101}$  колебание в прямоугольном резонаторе

$$Q_{v\sigma} = \frac{\mu_a a b d (a^2 + d^2)}{\delta^0 \mu_\sigma [a d (a^2 + d^2) + 2b (a^3 + d^3)]}.$$

2.  $E_{110}$  колебание в прямоугольном резонаторе

$$Q_{v\sigma} = \frac{\mu_a a b d (a^2 + d^2)}{\delta^0 \mu_\sigma [a d (a^2 + d^2) + 2b (a^3 + d^3)]}.$$

3.  $E_{010}$  колебание в цилиндрическом круглом резонаторе

$$Q_{v\sigma} = \frac{\mu_a a d}{\mu_\sigma \delta^0 (d + a)}.$$

4.  $H_{011}$  колебание в цилиндрическом круглом резонаторе

$$Q_{v\sigma} = \frac{\mu_a b d}{\delta^0 \mu_\sigma \left[ (2b - d) \left( \frac{\chi}{2d} \right)^2 + d \right]},$$

$$\chi = \frac{2}{\sqrt{\left( \frac{1}{d} \right)^2 + \left( \frac{\mu_{01}}{\pi b} \right)^2}}.$$

## ГЛАВА XII

### ВОЗБУЖДЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ СТОРОННИМИ ТОКАМИ

#### 12.1 Постановка задачи

Пусть задан конечный объем  $V$ , ограниченный замкнутой проводящей поверхностью  $S$ , характеризуемой комплексным поверхностным импедансом  $\dot{W}_\sigma$ . В объеме  $V$  заданы гармонические сторонние источники с плотностью стороннего электрического тока  $\dot{\delta}^e = \vec{\delta}_e^0(r)e^{j\omega t}$  и магнитного тока  $\dot{\delta}^m = \vec{\delta}_m^0(r)e^{j\omega t}$  (рис. 12.1)

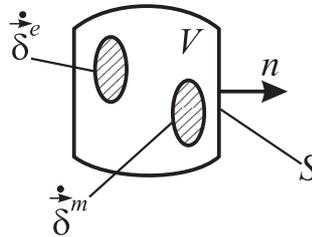


Рис. 12.1.

Будем считать, что потерь в среде, заполняющей резонатор (объем  $V$ ), нет, среда однородна и изотропна, а также недисперсна. Эти условия можно записать в виде

$$I_m \varepsilon_a = I_m \mu_a = 0, \quad \varepsilon_a, \mu_a \neq f(r), \quad \varepsilon_a, \mu_a \neq f(\omega). \quad (12.1)$$

Задача возбуждения резонатора может быть поставлена в виде следующей краевой задачи для неоднородных уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= j\omega \varepsilon_a \vec{E} + \dot{\delta}^e; \\ \text{rot } \vec{E} &= -j\omega \mu_a \vec{H} - \dot{\delta}^m. \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$[\vec{n}, \vec{E}]_S = -W_\sigma [\vec{n}, \vec{H}]_S \quad (12.3)$$

Решение краевой задачи (12.2), (12.3) естественно искать в виде разложения по собственным колебаниям того же резонатора без потерь (собственным функциям). Коэффициенты разложения можно определить на основе проекционного метода Б.Г. Галеркина.

#### 12.2 Свойства собственных функций резонатора

Собственные функции резонатора без потерь являются решениями однородной краевой задачи для уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_k &= j\omega_k \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_k; \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k &= -j\omega_k \mu_a \dot{\vec{H}}_k. \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$\left[ \vec{n}, \dot{\vec{E}}_k \right] \Big|_S = 0. \quad (12.5)$$

Докажем некоторые свойства решений краевой задачи (12.4), (12.5).

1. Собственные значения (собственные частоты)  $\omega_k$  - вещественные (ввиду граничного условия (12.5) задача - самосопряженная).

Применяя операцию  $\operatorname{rot}$  ко второму уравнению (12.4) и используя первое уравнение, имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k = K_k^2 \dot{\vec{E}}_k, \quad K_k = \omega_k^2 \varepsilon_a \mu_a. \quad (12.6)$$

Умножим обе части (12.6) скалярно на  $\dot{\vec{E}}_k^*$ :

$$\dot{\vec{E}}_k^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k = k_k^2 \dot{\vec{E}}_k \dot{\vec{E}}_k^*. \quad (12.7)$$

Для преобразованной левой части (12.7) используем тождество

$$\vec{E}_k^* \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k = \operatorname{div} \left[ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k, \vec{E}_k^* \right] + \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k \operatorname{rot} \vec{E}_k^*.$$

Затем проинтегрируем обе части преобразованного уравнения (12.7) по  $V_p$  и воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса для первого члена слева. В результате получим

$$\oint_S \left[ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k, \vec{E}_k^* \right] n dS + \int_{V_p} \left| \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k \right|^2 dV_p = K_k^2 \int_{V_p} \left| \dot{\vec{E}}_k \right|^2 dV_p.$$

В соответствии с граничным условием (12.5) для  $\dot{\vec{E}}_k^*$  первый член оказывается нулевым, в результате чего имеем

$$K_k^2 = \omega_k^2 \varepsilon_a \mu_a = \frac{\int_{V_p} \left| \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_k \right|^2 dV}{\int_{V_p} \left| \dot{\vec{E}}_k \right|^2 dV} \quad (12.8)$$

Поскольку в (12.8) правая часть вещественная и положительная, при действительных и положительных  $\varepsilon_a, \mu_a$  (что оговорено выше) получаем искомый результат:  $\omega_k$  - вещественны.

2. Собственные функции ортогональны в  $V_p$  с границей S.

Рассмотрим наряду с системой (12.4) для  $E_k, H_k$  комплексно сопряженную систему для собственных функций  $E_q^*, H_q^*$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_q^* &= -j\omega_q \varepsilon_a \dot{E}_q^*; \\ \operatorname{rot} \dot{E}_q^* &= j\omega_q \mu_a \dot{H}_q^*. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Умножим обе части второго уравнения (12.9) скалярно на  $H_k$ , а первое уравнение (12.4) - на  $-E_q^*$  и сложим получившееся

$$\dot{H}_k \operatorname{rot} \dot{E}_q^* - \dot{E}_q^* \operatorname{rot} \dot{H}_k = \operatorname{div} \left[ \dot{H}_k, \dot{E}_q^* \right] = j\omega_q \mu_a \dot{H}_q^* \dot{H}_k - j\omega_q \varepsilon_a \dot{E}_k \dot{E}_q^*. \quad (12.10)$$

Проинтегрируем (12.10) по  $V_p$  с границей S. Применяя в левой части теорему Остроградского-Гаусса и граничное условие для  $E_q^*$  на S (12.5), имеем

$$\omega_q \int_{V_p} \mu_a \dot{H}_k \dot{H}_q^* dV = \omega_k \int_{V_p} \varepsilon_a \vec{E}_k \vec{E}_q^* dV. \quad (12.11)$$

Аналогично, используя второе уравнение (12.4) и первое из (12.9), не трудно получить

$$\omega_k \int_{V_p} \mu_a \vec{H}_k \vec{H}_q^* dV = \omega_q \int_{V_p} \varepsilon_a \vec{E}_k \vec{E}_q^* dV. \quad (12.12)$$

Из системы (12.11), (12.12) находим

$$\left(\omega_k^2 - \omega_q^2\right) h_{kq} = 0, \quad \left(\omega_k^2 - \omega_q^2\right) e_{kq} = 0, \quad (12.13)$$

$$h_{kq} = \int_{V_p} \mu_a \vec{H}_k \vec{H}_q^* dV, \quad e_{kq} = \int_{V_p} \varepsilon_a \vec{E}_k \vec{E}_q^* dV.$$

При невырождении собственных колебаний идеального резонатора, т.е. при  $\omega_q \neq \omega_k$ , из (12.13) следует свойство ортогональности собственных функций

$$h_{kq} = e_{kq} = \delta_{kq} N_k, \quad (12.14)$$

$$N_k = \int_{V_p} \mu_a H_{km}^2 dV_p = \int_{V_p} \varepsilon_a E_{km}^2 dV_p > 0,$$

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 0, & k \neq q, \\ 1, & k = q. \end{cases}$$

Далее  $N_k$  будем именовать нормой собственного колебания с номером  $K$ .

3. Собственные функции соленоидальны.

Собственные функции  $\{\vec{E}'_k, \vec{H}'_k\}$ , для которых собственное значение  $\omega_k \neq 0$ , являются, как нетрудно показать, соленоидальными, т.е.  $\text{div} \vec{E}'_k = \text{div} \vec{H}'_k = 0$ . Действительно, применяя операцию  $\text{div}$  к обеим частям уравнений (12.4) и учитывая, что  $\text{div} \text{rot} A \equiv 0$ , получаем

$$\omega_k \varepsilon_a \text{div} \vec{E}'_k = 0, \quad \omega_k \mu_a \text{div} \vec{H}'_k = 0.$$

Таким образом, те собственные функции, которые соответствуют собственным колебаниям идеального резонатора и для которых  $\omega_k \neq 0$ , являются соленоидальными.

Однако сторонние источники могут иметь структуру разомкнутых электрических и магнитных токов (штыри, электронные сгустки, щели и т.д.). В этом случае имеются сторонние электрические и магнитные заряды и для искомого поля должны выполняться 3 и 4 уравнения Максвелла:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho^e}{\varepsilon_a}, \quad \text{div} \vec{H} = \frac{\rho^m}{\mu_a}. \quad (12.15)$$

Представим искомые поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в виде сумм  $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$ ,  $\vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}''$ , где составляющие с одним штрихом-соленоидальные, с двумя-потенциальные. Для них соответственно выполняются условия

$$\text{div} \vec{E}' = 0, \quad \text{div} \vec{H}' = 0;$$

$$\text{rot} \vec{E}'' = 0, \quad \text{rot} \vec{H}'' = 0.$$

Исходя из первого и второго уравнений Максвелла, заключаем, что  $\vec{E}''$  и  $\vec{H}''$  могут быть ненулевыми только при  $\omega_k = 0$ , т.е. они описываются уравнениями электростатики и магнитостатики. Поэтому решения для них следует искать в виде

$$\vec{E}'' = -\text{grad} \phi^e, \quad \vec{H}'' = -\text{grad} \phi^m.$$

Подставляя эти выражения в (12.15), получаем уравнения для потенциалов  $\phi^e$  и  $\phi^m$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi^e &= -\frac{\rho^e}{\varepsilon_a}, \quad \nabla^2 \phi^m = -\frac{\rho^m}{\mu_a}, \\ \phi^e / S &= 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{n}} / S = 0. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Задача (12.16) имеет известные решения и на ней мы будем останавливаться. Обратимся к расчету только соленоидальных полей  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$ , которые в дальнейшем для упрощения будем записывать без штрихов.

### 12.3 Уравнение возбуждения резонатора

Система  $\{\vec{E}_k, \vec{H}_k\}$  - полная на множестве соленоидальных  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  в  $V_p$ . Используя ее как базис в  $L_2(V)$ , представим искомые соленоидальные  $E$ ,  $H$  в виде

$$\dot{\vec{E}} = \sum_S \dot{A}_S \dot{\vec{E}}_S, \quad \dot{\vec{H}} = \sum_S \dot{B}_S \dot{\vec{H}}_S. \quad (12.17)$$

Для определения коэффициентов  $\dot{A}_S, \dot{B}_S$  в (12.17) воспользуемся проекционным методом Галеркина. Заменим исходную систему (12.2) эквивалентной ей системой проекционных равенств

$$\begin{aligned} \int_{V_p} \left( \text{rot} \dot{\vec{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}} - \vec{\delta}^e \right) \dot{\vec{E}}_p^* dV &= 0, \\ \int_{V_p} \left( \text{rot} \dot{\vec{E}} + j\omega \mu_a \dot{\vec{H}} + \vec{\delta}^m \right) \dot{\vec{H}}_p^* dV &= 0, \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12.18)$$

Непосредственно подставляя (12.17) в (12.18), однако, нельзя: ряды (12.17) сходятся вблизи S неравномерно ввиду различия граничных условий (12.3) и (12.5) и поэтому дифференциальные операторы rot к этим рядам неприменимы. Фактически с помощью рядов (12.17) ищется обобщенное решение краевой задачи (12.2), (12.3): граничные условия (12.3) удовлетворяются в среднем (А.С. Ильинский, Г.Я. Слепян. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. Изд. Моск. университета, 1983). Для того, чтобы обойти эту трудность, сделаем следующие преобразования в правых частях (12.18):

$$\dot{\vec{E}}_p^* \text{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}} \text{rot} \dot{\vec{E}}_p^* + \text{div} \left[ \dot{\vec{H}}, \dot{\vec{E}}_p^* \right],$$

$$\begin{aligned}
\dot{H}_p^* \operatorname{rot} \dot{E} &= \dot{E} \operatorname{rot} \dot{H}_p^* - \operatorname{div} \left[ \dot{H}_p^*, \dot{E} \right], \\
\operatorname{rot} \dot{E}_p^* &= j\omega_p \mu_a \dot{H}_p^*, \quad \operatorname{rot} \dot{H}_p^* = -j\omega_p \mu_a \dot{E}_p^*, \\
\int_V \operatorname{div} \left[ \dot{H}, \dot{E}_p^* \right] dV &= \oint_{S_p} \left[ \dot{H}, \dot{E}_p^* \right] \vec{n} dS = - \oint_{S_p} \left[ \vec{n}, \dot{E}_p^* \right] \dot{H} dS = 0, \\
\int_V \operatorname{div} \left[ \dot{H}_p^*, \dot{E} \right] dV &= \oint_{S_p} \left[ \dot{H}_p^*, \dot{E} \right] \vec{n} dS = \dot{W}_\sigma^0 \oint_{S_p} \left[ \vec{n} \left[ \vec{n}, \vec{H} \right] \right] \dot{H}_p^* dS.
\end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальные операции над рядами (12.17) исключаются, и мы приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения  $\dot{A}_p, \dot{B}_p$  (используется свойство ортогональности (12.14)):

$$j\omega_p N_p \dot{B}_p - j\omega N_p \dot{A}_p = V_p^e, \quad (12.19)$$

$$-j\omega_p N_p \dot{A}_p + j\omega N_p \dot{B}_p + \sum_S S_{sp} \dot{B}_S = -V_p^m,$$

$$V_p^e = \int_{V_p} \vec{\delta}^e \dot{E}_p^* dV, \quad V_p^m = \int_{V_p} \vec{\delta}^m \dot{H}_p^* dV,$$

$$S_{sp} = \dot{W}_\sigma^0 \oint_S \dot{H}_{s\tau} \dot{H}_{p\tau}^* dS.$$

Исключая из (12.19)  $\dot{A}_p$ , получаем систему связанных уравнений относительно  $\dot{B}_p$ :

$$j \cdot \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega} \dot{B}_p N_p - \sum_S S_{SP} \dot{B}_S = V_p^m + \frac{\omega_p}{\omega} V_p^e, \quad (12.20)$$

$$\dot{A}_p = \frac{\omega_p}{\omega} \dot{B}_p + j \frac{V_p^e}{\omega N_p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Введем величину собственной омической добротности р-колебания резонатора  $Q_p$ :

$$Q_p = \frac{\omega_p}{\operatorname{Re} W_\sigma^0} \frac{\int_{V_p} \mu_a H_{pm}^2 dV}{\oint_S H_{p\tau m}^2 dS} = \frac{\omega_p N_p}{\operatorname{Re} S_{pp}}. \quad (12.21)$$

Аналогично определим «взаимную» добротность колебаний  $p$  и  $s$  как

$$Q_{sp} = \frac{\omega_p N_p}{\operatorname{Re} S_{sp}} = \frac{\omega_p}{\operatorname{Re} W_\sigma^0} \frac{\int_{V_p} \mu_a H_{pm}^2 dV}{\oint_S H_{s\tau} H_{p\tau}^* dS}.$$

Учитывая, что волновое сопротивление металлической стенки при достаточно большой проводимости  $\sigma$  может быть представлено как

$$\dot{W}_\sigma^0 = \sqrt{\frac{\mu_\sigma}{\left(\varepsilon_{a\sigma} - j \frac{\sigma}{\omega}\right)}} \approx (1+j) \sqrt{\frac{\mu_\sigma \omega}{2\sigma}} = (1+j) Z_0,$$

запишем  $\dot{S}_{sp} = (1+j) S_{sp}^0$ ,  $S_{sp}^0 = Z_0 \oint_S \dot{H}_{s\tau} \dot{H}_{p\tau}^* dS$ .

Тогда можно ввести комплексные величины

$$\dot{Q}_p^{-1} = Q_p^{-1} (1+j), \quad Q_p^{-1} = \frac{S_{pp}^0}{\omega_p N_p},$$

$$\dot{Q}_{sp}^{-1} = Q_{sp}^{-1} (1+j), \quad Q_{sp}^{-1} = \frac{S_{sp}^0}{\omega_p N_p}.$$

Теперь система уравнений связанных вынужденных колебаний (12.20) принимает вид

$$j(\omega_p^2 - \omega^2) \dot{B}_p - \sum_S \omega \omega_p Q_{sp}^{-1} (1+j) \dot{B}_s = (\omega V_p^m + \omega_p V_p^e) N_p^{-1}, \quad (12.22)$$

$$\dot{A}_p = \frac{\omega_p}{\omega} \dot{B}_p + j \frac{V_p^e}{\omega N_p}, \quad p=1,2,\dots$$

В случае, когда  $\omega \approx \omega_p$  (условия резонанса) и при очень малых  $Q_{sp}^{-1}$  (хорошая проводимость стенок) можно считать все  $\dot{B}_s$  пренебрежимо малыми

по сравнению с  $\dot{B}_p$ . Тогда система (12.22) редуцируется к одному уравнению для колебания с  $s=p$ .  $E_e$  решение имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{B}_p &= -j \frac{\omega V_p^m + \omega_p V_p^e}{\left[ \omega_p^2 - \omega^2 + \omega \omega_p (j-1) Q_p^{-1} \right] N_p}, \\ \dot{A}_p &= -j \frac{\omega_p V_p^m + \left[ \omega - \omega_p (j-1) Q_p^{-1} \right] V_p^e}{\left[ \omega_p^2 - \omega^2 + \omega \omega_p (j-1) Q_p^{-1} \right] N_p}.\end{aligned}\quad (12.23)$$

Из (12.23) следует, что точный резонанс имеет место при

$$\begin{aligned}\omega^2 + \frac{\omega \omega_p}{Q_p} - \omega_p^2 &= 0, \text{ т.е. резонансная частота } \omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{\omega_p^2}{4Q_p^2} - \frac{\omega_p}{2Q_p}} \approx \\ &\approx \omega_p \left( 1 - \frac{1}{2Q_p} \right).\end{aligned}$$

Полученный результат (12.23) и его следствия существенно отличаются от приведенных в известных (В.В. Никольский, Т.И. Никольская. Электродинамика и распространение радиоволн. -М.: Наука, 1989; Б.З. Каценеленбаум. Высокочастотная электродинамика. -М.: Наука, 1966; Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: «Сов. радио», 1979; В.И. Вольман, -М. Связь, 1971, частично Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988) и др. учебниках.

Дело в том, что в имеющихся учебниках задача возбуждения резонатора ставится некорректно как задача возбуждения идеального резонатора (т.е. в отсутствие потерь). При этом нарушаются условия теоремы единственности. Полученный результат «обобщается» путем замены вещественной собственной частоты исходной самосопряженной краевой задачи на комплексную собственную частоту (см. главу XI) реального колебания с потерями. Естественно, при такой замене комплексный характер импеданса стенок игнорируется и смещение частоты собственного колебания по отношению к идеальному (при нулевом импедансе) случаю за счет реактивной части импеданса оказывается не учтенным, как и другие сопутствующие эффекты.

Полученные нами уравнения возбуждения (12.20) и формулы (12.23) соответствуют исходной задаче (12.2), (12.3) и относятся к случаю возбуждения автономного (ненагруженного) резонатора. Такие случаи встречаются в технике СВЧ: холостые резонаторы в группирователях клистронов, гироклистронов, гироконов, гиротонов, параметрических усилителей и т.д.; стабилизирующие резонаторы электронных и твердотельных генераторов, резонаторы специальных фильтров СВЧ и т.д. Однако в общем случае резонаторы связаны с внешней нагрузкой, т.е. нагружены. Нагрузку в принципе можно учесть в интегралах  $S_{sp}$  в (12.19) как излучение через часть поверхности сте-

нок резонатора  $S$ . На этой части, соответствующей окну связи с нагрузкой, можно также ввести поверхностный импеданс  $\dot{W}_n^0$ . В этом случае структура полученных уравнений возбуждения не изменяется, однако внешняя добротность  $Q_{sp}^{6H}$  войдет в общем случае уже в другой комбинации, чем собственная  $Q_{sp}$ . В случае, когда согласование с нагрузкой выполнено так, что  $\frac{\dot{W}_n^0}{\dot{W}_\sigma} = c$ , где  $c$  - действительная функция  $S$ , в формулах (12.23) можно заменить  $Q_p$  (омическую добротность) на  $Q_p^H$  (нагруженную добротность) и тем учесть связь резонатора с внешними цепями. В общем случае нужно отдельно учесть влияние излучения в нагрузку и через каустику, что можно сделать, разделив в интеграле  $S_{sp}$  поверхности с  $\dot{W}_\sigma$ ,  $\dot{W}_n^0$ ,  $\dot{W}_{каустики}^0$ .

Проанализируем содержание формул возбуждения (12.23). Частотная зависимость амплитуд  $\dot{B}_p$  и  $\dot{A}_p$  имеет явный и достаточно простой характер.

Резонанс имеет место, как указывалось ранее, при  $\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 - \frac{\omega_p^2}{4Q_p^2} - \frac{\omega_p}{2Q_p}}$ .

Таким образом, для расчета резонансной частоты достаточно знать собственную частоту эквивалентного идеального резонатора  $\omega_p$  и добротность колебания  $Q_p$ . Зависимости же  $|\dot{B}_p(\omega)|$  и  $|\dot{A}_p(\omega)|$  вблизи  $\omega_0$  имеют вид резонансных кривых обычного колебательного контура.

Кроме частотного резонанса, существует и пространственный резонанс, выражаемый интегралами  $V_p^e$  и  $V_p^m$ :  $V_p^e = \int_{V_p} \dot{\delta}^e \dot{E}_p^* dV$ ,  $V_p^m = \int_{V_p} \dot{\delta}^m \dot{H}_p^* dV$ .

Структура  $V_p^e$  и  $V_p^m$  указывает на то, что пространственному резонансу соответствуют условия:  $\dot{\delta}^e \parallel \vec{E}_p^0$ ,  $\dot{\delta}^m \parallel \vec{H}_p^0$ . Используя пространственный резонанс, можно селективно возбуждать требуемый вид колебания, не возбуждая другие (паразитные). Иногда для достижения этой цели необходимо использовать несколько возбуждающих элементов, определенным образом фазировав в них  $\vec{\delta}^e$  и  $\vec{\delta}^m$ , так, чтобы полные  $V_k^e$  и  $V_p^m$  для паразитных колебаний обращались в нуль.

## 12.4. Способы возбуждения резонаторов

Рассмотрим некоторые типичные схемы возбуждения резонаторов.

1. Возбуждение коротким штырем (рис. 12.2)

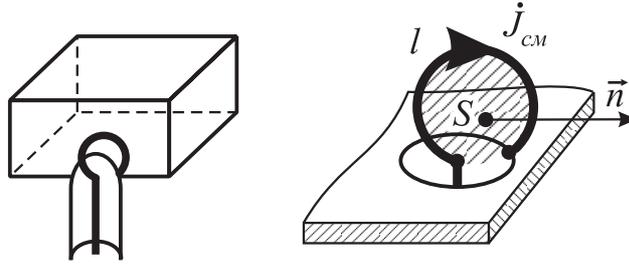


Рис. 12.3.

2. Возбуждение квазистационарной петлей (рис. 12.3)

Пусть  $L \ll \lambda$  и амплитуду возбуждающего линейного тока  $j^{em}$  вдоль штыря можно считать постоянной. Тогда

$$V_p^m = 0, V_p^e = \int_{V_p} \dot{\delta}^e \vec{E}_p^0 dV_p = J^{cm} \int_0^L \vec{E}_p^0 d\vec{\ell} = J^{cm} \dot{U}_{эфф\ p}.$$

Пусть  $S \ll \lambda^2$ . Тогда  $J_{cm}$  постоянен вдоль всей длины  $\ell$  петли. В этом случае

$$\begin{aligned} V_p^m = 0, V_p^e &= \int_{V_p} \dot{\delta}^e \vec{E}_p^0 dV_p = J^{cm} \int_{\ell} \vec{E}_p^0 d\vec{\ell} = J^{cm} \int_{S_{петли}} \text{rot} \vec{E}_p^0 d\vec{S} = \\ &= -j J^{cm} \omega_p \int_{S_{петли}} \mu_a \vec{H}_p^0 d\vec{S} = -j J^{cm} \omega_p \Phi_p^M, \end{aligned}$$

где  $\Phi_p^M$  - магнитный поток  $p$ -го колебания через площадь петли  $S_{петли}$ . При выводе конечного результата использовалась теорема Стокса и уравнение для собственных функций:  $\text{rot} \vec{E}_p^0 = -j \omega_p \mu_a \vec{H}_p^0$ .

Полученный результат показывает, что уровень возбуждения данного

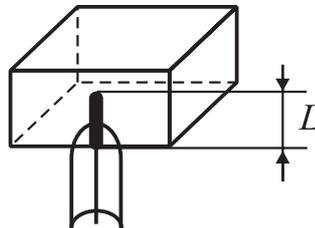


Рис. 12.2.

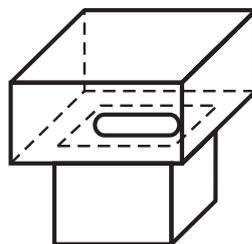


Рис. 12.4.

p-го вида колебаний можно регулировать поворотом петли, изменяя величину  $\Phi_p^m$ . Максимум  $\Phi_p^m$  достигается при  $\vec{n} \parallel \vec{H}_p^0$ .

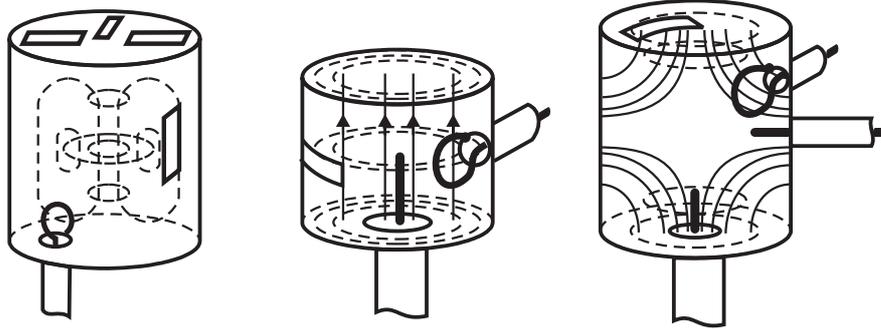


Рис. 12.5.

### 3. Возбуждение узкой щелью ([рис. 12.4](#))

В этом случае

$$V_p^e = 0, V_p^m = \int_{V_p} \dot{\delta}^m \vec{H}_p^0 dV_p = - \int_{S_{щели}} [\vec{n}, \dot{\vec{E}}^{cm}] \vec{H}_p^0 dS_{щели}.$$

Здесь  $\dot{\vec{E}}^{cm}$  - сторонняя напряженность электрического поля в плоскости щели, создаваемая источником через подводящий волновод.

Примеры расположения возбуждающих элементов для некоторых типов колебаний в цилиндрическом круглом резонаторе приведены на [рис. 12.5](#).

## ЧАСТЬ 4

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

#### ГЛАВА XIII

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

#### 13.1. Расчет полей с помощью электрического вектора Герца

Будем исходить из уравнения Гельмгольца для электрического вектора Герца  $\dot{\dot{\Pi}}^e$

$$\nabla^2 \dot{\dot{\Pi}}^e + k^2 \dot{\dot{\Pi}}^e = -\dot{\dot{p}}^{cm} / \varepsilon_a . \quad (13.1)$$

Здесь  $\dot{\dot{\Pi}}^e$  - комплексный электрический вектор Герца,  $\dot{\dot{p}}^{cm}$  - комплексный вектор сторонней поляризованности,  $k = \omega \sqrt{\mu_a, \varepsilon_a}$  - волновое число в свободном пространстве,  $\varepsilon_a, \mu_a$  - соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для простоты дальнейшего анализа будем считать, что диэлектрических, омических и магнитных потерь в среде нет, т.е.  $\varepsilon_a, \mu_a$  - действительные величины (в противном случае достаточно ввести комплексные параметры среды  $\varepsilon_a, \mu_a$ ).

Полагая пространство неограниченным, однородным и изотропным, проинтегрируем (13.1). При этом получим для произвольной точки наблюдения  $A$ :

$$\dot{\dot{\Pi}}^e(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \iiint_{V_{ист}} \frac{\dot{\dot{p}}^{cm} e^{-jkr}}{r} dV_{ист} . \quad (13.2)$$

Здесь  $V_{ист}$  - объем источников (где  $\dot{\dot{p}}^{cm} \neq 0$ ).

Пусть источником электромагнитного поля является элементарный электрический излучатель (ЭЭИ). Под ЭЭИ будем понимать отрезок линейного тока  $\dot{I}^{cm}$  длиной  $l$ , причем  $l \ll \lambda = 2\pi/k$ . Положим, что  $\vec{l} = \vec{z}_0 l$ . Заряды на концах отрезка  $\dot{q}^{cm}$  связаны с  $\dot{I}^{cm}$  в соответствии с законом сохранения заряда соотношением

$$\dot{I}^{cm} = \frac{d\dot{q}^{cm}}{dt} = j\omega\dot{q}^{cm} \quad \text{или} \quad \dot{q}^{cm} = \dot{I}^{cm} / j\omega . \quad (13.3)$$

Таким образом, ЭЭИ представляет собой элементарный электрический диполь с дипольным моментом

$$\dot{\vec{p}}^{cm} = \vec{z}_0 \ell \dot{q}^{cm} = \vec{z}_0 \frac{\ell \dot{I}^{cm}}{j\omega}. \quad (13.4)$$

Такой диполь создает в пространстве стороннюю линейную поляризованность

$$\dot{\vec{p}}_l^{cm} = \dot{\vec{p}}^{cm} / \ell = \vec{z}_0 \frac{\dot{I}^{cm}}{j\omega}. \quad (13.5)$$

При такой структуре источника интеграл в формуле возбуждения (13.2) преобразуется из объемного в линейный:

$$\vec{\Pi}^e(A) = \frac{I}{4\pi\epsilon_a} \int_0^l \frac{\dot{\vec{p}}_l^{cm} e^{-jkr}}{r} d\ell. \quad (13.6)$$

Далее будем рассматривать источник как точечный, т.е. будем считать, что  $r \gg \ell$ . Тогда (13.6) преобразуется к виду

$$\dot{\vec{\Pi}}^e(A) = \frac{\vec{z}_0 \ell \dot{I}^{cm}}{j\omega 4\pi\epsilon_a} \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (13.7)$$

Используя (13.7), определим магнитное поле излучателя:

$$\dot{\vec{H}} = j\omega\epsilon_a \text{rot}(\vec{\Pi}^e). \quad (13.8)$$

Для расчета полей ЭЭИ воспользуемся сферической системой координат. Оператор  $\text{rot}(\vec{A})$  в криволинейной системе координат удобно представить в виде определителя, разлагаемого по первой строке:

$$\text{rot}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \\ h_2 h_3 & h_1 h_3 & h_1 h_2 \\ \partial/\partial g_1 & \partial/\partial g_2 & \partial/\partial g_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \quad (13.9)$$

Здесь  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - координатные единичные векторы ортогональной криволинейной системы координат  $g_1, g_2, g_3$ ;  $h_1, h_2, h_3$  - соответствующие метрические коэффициенты Ламэ;  $A_1, A_2, A_3$  - проекции вектора  $A$  на  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  соответ-

венно. В сферической системе координат  $g_1 = r, g_2 = \theta, g_3 = \varphi$  ( $r$  - расстояние от источника до точки наблюдения  $A$ ,  $\theta$  - меридианный угол,  $\varphi$  - азимутальный угол). Соответственно  $\vec{e}_1 = \vec{r}_0, \vec{e}_2 = \vec{\theta}_0, \vec{e}_3 = \vec{\varphi}_0, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \cdot \sin \theta$ .

Введем для удобства величину

$$\dot{\vec{\Pi}} = \vec{z}_0 \frac{j^{cm} l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} = \vec{z}_0 \dot{\Pi}. \quad (13.10)$$

Теперь (13.8) принимает вид

$$\dot{\vec{H}} = \text{rot } \dot{\vec{\Pi}}, \quad (13.11)$$

причем в сферической системе координат

$$\dot{\vec{\Pi}} = \vec{z}_0 \dot{\Pi} = \vec{r}_0 \dot{\Pi} \cos \theta - \vec{\theta}_0 \dot{\Pi} \sin \theta. \quad (13.12)$$

Используя (13.9), (13.11), (13.12), имеем

$$\dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{\theta}_0 & \vec{\varphi}_0 \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \partial / \partial r & \partial / \partial \theta & 0 \\ \dot{\Pi} \cos \theta & -r \dot{\Pi} \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{\varphi}_0 \dot{H}_\varphi. \quad (13.13)$$

Производя заданные операции в (13.13), получаем

$$\dot{H}_\varphi = \frac{1}{r} \left[ -\frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\Pi} \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\Pi} \cos \theta) \right] = \frac{j^{cm} l}{4\pi} k^2 \left( \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) e^{-jkr} \sin \theta \quad (13.14)$$

Перейдем теперь к расчету электрического поля ЭЭИ. Для этого воспользуемся первым уравнением Максвелла

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}} \quad \text{или}$$

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_a} \text{rot } \dot{\vec{H}}. \quad (13.15)$$

Для удобства записи введем переменную  $\dot{H}'$ :

$$\dot{H}' = \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} r \sin\theta \cdot \dot{H}'_\varphi = \frac{j^{cm}lk^2}{4\pi\omega\varepsilon_a} \left( \frac{1}{k} - \frac{j}{k^2 r} \right) e^{-jkr} \sin^2\theta. \quad (13.16)$$

$$\dot{\vec{E}} = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{\theta}_0 & \vec{\varphi}_0 \\ r^2 \sin\theta & r \sin\theta & r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & 0 \\ 0 & 0 & H' \end{vmatrix} = \vec{r}_0 \dot{E}'_r + \vec{\theta}_0 \dot{E}'_\theta. \quad (13.17)$$

Производя определенные в (13.17) действия, находим

$$\dot{E}'_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \dot{H}'}{\partial \theta} = \frac{j^{cm}lk^3}{2\pi\varepsilon_a\omega} \left( \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) e^{-jkr} \cos\theta, \quad (13.18)$$

$$\dot{E}'_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \dot{H}'}{\partial r} = \frac{j^{cm}lk^3}{4\pi\varepsilon_a\omega} \left( \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) e^{-jkr} \sin\theta. \quad (13.19)$$

Таким образом, ЭЭИ имеет три компоненты электромагнитного поля:  $\dot{H}'_\varphi$  (13.14),  $\dot{E}'_r$  (13.18),  $\dot{E}'_\theta$  (13.19).

### 13.2. Анализ поля ЭЭИ в квазистатической (ближней) зоне

Рассмотрим структуру поля ЭЭИ в квазистатической зоне, когда выполняется условие  $kr \rightarrow 0$ , т.е. запаздывание  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  относительно  $\Gamma^{cn}$  отсутствует:  $e^{-jkr} \rightarrow 1$ . Естественно, остается исходное условие:  $r \gg \ell$ .

Оставляя главные (наибольшие по величине  $\frac{1}{kr}$ ) члены в формулах (13.14), (13.18), (13.19), имеем

$$\dot{\vec{H}} = \vec{\varphi}_0 \dot{H}'_\varphi, \quad \dot{H}'_\varphi = \frac{j^{cm}l \sin\theta}{4\pi r^2}. \quad (13.20)$$

Перепишем (13.20) в следующей форме:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{j^{cm}[\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Формула (13.20) выражает закон Био-Савара для элемента  $\vec{\ell}$  проводника с током  $j^{cm}$ .

Аналогично для электрического поля  $\dot{\vec{E}}$  находим в пределе  $kr \rightarrow 0$ :

$$\dot{E}_r = -\frac{j\dot{I}^{cm}l}{2\pi\epsilon_a\omega} \frac{\cos\theta}{r^3}, \quad \dot{E}_\theta = -j\frac{\dot{I}^{cm}l}{4\pi\epsilon_a\omega} \frac{\sin\theta}{r^3}. \quad (13.21)$$

Преобразуем (13.21), учитывая, что  $-\frac{j\dot{I}^{cm}}{\omega} = \frac{\dot{I}^{cm}}{j\omega} = \dot{q}^{cm}$  и  $-\frac{j\dot{I}^{cm}}{\omega}l = \dot{q}^{cm}l = \dot{P}^{cm}$ . При этом получим

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{P}^{cm}}{2\pi\epsilon_a} \frac{\cos\theta}{r^3}, \quad \dot{E}_\theta = -j\frac{\dot{P}^{cm}}{4\pi\epsilon_a} \frac{\sin\theta}{r^3}. \quad (13.22)$$

Формулы (13.22) определяют электрическое поле электрического диполя  $\dot{P}^{cm}$ .

Сравнивая (13.20) и (13.21), заключаем, что  $\vec{H}_\varphi$  и  $\dot{E}_2, \dot{E}_\theta$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  (различие в множителе  $-j = e^{-\pi/2}$ ), т.е. это чисто реактивные поля, определяющие реактивную нагрузку ЭЭИ. Делая такой вывод, необходимо не забывать, что поля (13.20) и (13.21) являются главными составляющими поля ЭЭИ в ближней зоне, но не единственными. При их записи мы отбросили малые составляющие порядка  $\frac{1}{(kr)}$ , которые, однако, тоже присутствуют в ближней зоне и представляют, как будет видно из дальнейшего анализа, поля излучения ЭЭИ.

### 13.3. Анализ поля ЭЭИ в волновой (дальней) зоне

Рассмотрим теперь структуру поля ЭЭИ на достаточно больших расстояниях от излучателя, когда  $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r \gg 1$ . Теперь, поскольку  $\frac{1}{(kr)}$  - малая величина, главными (наибольшими) составляющими, как следует из решений (13.14), (13.18), (13.19), будут  $\dot{H}_\varphi$  и  $\dot{E}_\theta$ , которые выражаются следующим образом:

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}^{cm}lk^2}{4\pi} \frac{j}{kr} e^{-jkr} \sin\theta, \quad (13.23)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{\dot{I}^{cm}lk^3}{4\pi\omega\epsilon_a} \frac{j}{kr} e^{-jkr} \sin\theta. \quad (13.24)$$

Обратим внимание на то, что поля  $\dot{H}_\varphi$  (13.23) и  $\dot{E}_\theta$  (13.24) синфазны. Кроме того, обе компоненты нормальны к  $r$ .

Обозначим  $j \frac{\dot{I}^{cm} l k}{4\pi} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$ . Тогда

$$\dot{H}_\varphi = A_m \frac{\sin \theta}{r} e^{j(\omega t - kr)}, \quad (13.25)$$

$$\dot{E}_\theta = \dot{A}_m \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \frac{\sin \theta}{r} e^{j(\omega t - kr)}. \quad (13.26)$$

Проанализируем свойства полей  $\dot{H}_\varphi$ ,  $\dot{E}_\theta$  в дальней зоне.

1. Поля, как указывалось выше, синфазны и их фаза  $\Phi = \omega t - kr$ . Если положить  $t = \text{const}$  (мгновенное распределение поля), то  $\Phi = \text{const}$  соответствует  $r = \text{const}$ , т.е. поля в дальней зоне образуют сферическую волну. Определим фазовую скорость этой волны. Представим  $\Phi = \omega t_0 + \omega \tau - kr$ . Здесь  $t_0$  – момент начала наблюдения,  $\tau = t - t_0$ . Положим, что мы перемещаемся вдоль  $r$  со скоростью  $v$ . Тогда  $\tau = r/v$  и фаза, которую мы наблюдаем  $\Phi = \omega t_0 + \frac{\omega}{v} r - kr$ . Если бы мы перемещались со скоростью  $v$ , равной фазовой скорости волны  $v_\phi$ , то фаза поля, которую мы наблюдаем, оставалась бы постоянной, т.е.  $\Phi = \omega t_0 = \text{const}$ . Тогда  $\Phi = \omega t_0 + \frac{\omega}{v_\phi} r - kr = \omega t_0$  и мы прихо-

дим к результату  $k = \frac{\omega}{v_\phi}$  или  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ .

2. В пространстве без потерь, которое мы рассматриваем,  $E$  и  $H$  убывают с увеличением расстояния от точечного ЭЭИ как  $1/r$ .

3. Излучение ЭЭИ неизотропно:  $E, H$  пропорциональны  $\sin \theta$ . Для характеристики неизотропности излучателей вводится угловая характеристика – диаграмма направленности:  $F(\theta) = \frac{E_\theta(\theta)}{E_{\theta \max}} = \sin \theta$ .

4. Введем понятие волнового сопротивления пространства  $W_0$ :

$$W_0 = \frac{\dot{E}_t}{\dot{H}_t} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (13.27)$$

Здесь  $\dot{E}_t, \dot{H}_t$  – поперечные к направлению распространения компоненты волны, в данном случае  $\dot{E}_t = E_\theta, \dot{H}_t = \dot{H}_\varphi$ .

Подсчитаем теперь мощность излучения ЭЭИ. Для этого вначале определим вектор Пойнтинга для поля излучения ЭЭИ:

$$\dot{\vec{S}}_0 = \frac{1}{2}[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^*] = \frac{1}{2}[\vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0] \dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* = \frac{I_m^2 (l/\lambda)^2 W^0}{8r^2} \vec{r}_0 \sin^2 \theta. \quad (13.28)$$

Для подсчета полной мощности излучения ЭЭИ воспользуемся следующей схемой. Окружим точечный ЭЭИ сферой радиуса  $r$  с центром в точке расположения ЭЭИ. Элемент поверхности сферы может быть определен как  $d\vec{s} = \vec{r}_0 h_\varphi h_\theta d\varphi d\theta = \vec{r}_0 r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$  ( $\vec{r}_0$  - вектор внешней нормали). Тогда полная мощность излучения ЭЭИ рассчитывается как

$$P_\Sigma = \operatorname{Re} \oint_s \dot{\vec{S}}_0 d\vec{s} = \frac{I_m^2 (l/\lambda)^2 W^0}{8} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\varphi d\theta = \frac{\pi}{3} I_m^2 (l/\lambda)^2 W^0. \quad (13.29)$$

Сделаем здесь следующее необходимое замечание. Если использовать полные выражения для полей (13.14), (13.19), мы получим те же формулы  $\dot{\vec{S}}_0$  и  $P_\Sigma$ , т.е. (13.28) и (13.29). Таким образом, полученные значения  $\dot{\vec{S}}_0$  и  $P_\Sigma$  не есть следствия приближения  $kr \gg 1$ . Они остаются теми же при любых  $kr$ , в частности, в ближней зоне. Поскольку же  $P_\Sigma$  не зависит от  $kr$ , мы получаем важный вывод: мощность излучения постоянна в пространстве вокруг ЭЭИ независимо от  $r$ , т.е. в любой зоне. Следовательно, в установившемся гармоническом процессе излучения, который мы рассматриваем, нет каких-либо специальных зон, где формируется излучение («зон индукции», как говорится в некоторых учебниках и как считал Герц) и где его еще нет; излучение непрерывно в пространстве. Пользуясь этим, введем понятие о сопротивлении излучения  $P_\Sigma$  отрезка проводника  $l$  с током  $\dot{I}_{cm}$  аналогично тому, как вводится обычное сопротивление, характеризующее джоулевы потери

$$P_\Sigma = \frac{\pi}{3} I_m^2 (l/\lambda)^2 W^0 = \frac{1}{2} I_m^2 R_\Sigma.$$

Отсюда следует формула  $R_\Sigma$ :

$$R_\Sigma = \frac{2}{3} \pi (l/\lambda)^2 W^0. \quad (13.30)$$

Если среда по своим свойствам близка к пустоте (например, атмосфера), то  $W^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi[\text{Ом}]$  тогда

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 (l/\lambda)^2 [\text{Ом}]. \quad (13.31)$$

При использовании формул (13.30), (13.31) не следует забывать, что они справедливы лишь при  $l/\lambda \ll 1$ , т.е. только для ЭЭИ. Поля и  $P_{\Sigma}$  сложных распределенных излучателей (антенн) могут быть найдены по заданному распределению  $\dot{I}^{cm}(e)$  путем интегрирования полей ЭЭИ или использования исходной формулы (13.6) для  $\dot{\Pi}^e(A)$ .

Следует также отметить, что для распределенных излучателей меняется и понятие ближней и волновой зон, поскольку фронт излучаемой такими излучателями волны формируется на расстояниях  $r > D$ , где  $D$  – максимальный размер антенны.

## ГЛАВА XIV

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО МАГНИТНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ (ЭМИ)

#### 14.1. Расчет поля ЭМИ

Как указывалось в первой части, во многих задачах возбуждения электромагнитных полей целесообразно введение фиктивных магнитных зарядов, токов и диполей. Так, рамка со сторонним током  $I^{cm}$  при условии, что ее площадь  $S \ll \lambda^2$  является элементарным магнитным излучателем (ЭМИ) с магнитным моментом  $\dot{M}$ , связанным с  $I^{cm}$  следующим образом:

$$\dot{M} = \vec{n} S \mu_a I^{cm} = \dot{q}^m \vec{l} . \quad (14.1)$$

Щель в металлической стенке, возбуждаемая  $\dot{E}^{cm}$ , при  $l \ll \lambda$  также является ЭМИ.

Поле ЭМИ можно рассчитать с помощью магнитного вектора Герца  $\dot{\Pi}^m$ . Однако проще воспользоваться свойством перестановочной двойственности уравнений Максвелла (см. первую часть). В соответствии с этим свойством при записи формул для составляющих поля ЭМИ следует воспользоваться соответствующими формулами (13.14), (13.18), (13.19) для полей ЭЭИ, сделав в них следующие переобозначения переменных:

$$\dot{H}_\varphi \rightarrow \dot{E}_\varphi; \dot{E}_r \rightarrow \dot{H}_r; \dot{E}_\theta \rightarrow \dot{H}_\theta; \dot{P}_z^{cm} l / j\omega \rightarrow -\dot{M}_z^{cm} = -SI^{cm} \mu_a . \quad (14.2)$$

Проводя замены (14.2) в формулах (13.14), (13.18), (13.19), получаем формулы для составляющих поля ЭМИ:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{j\omega SI^{cm} \mu_a k^2}{4\pi} \left( \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) e^{-jkr} \sin \theta , \quad (14.3)$$

$$\dot{H}_r = \frac{jSI^{cm} k^3}{2\pi} \left( \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) e^{-jkr} \cos \theta , \quad (14.4)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{jSI^{cm} k^3}{4\pi} \left( \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) e^{-jkr} \sin \theta . \quad (14.5)$$

## 14.2. Анализ поля ЭМИ в квазистатической (ближней) зоне

Рассмотрим случай  $kr \ll 1$ ,  $e^{-jkr} \approx 1$ . В таком пределе получаем из (14.3)

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{j\omega SI^{cm} \mu_a \sin \theta}{4\pi r^2}. \quad (14.6)$$

Формула (14.6) выражает квазистатическую часть  $\dot{E}_\varphi$  рамки с током  $j^m$ .

Выделяя таким же образом главные (по величине) члены в (14.4) и (14.5), имеем:

$$\dot{H}_r = \frac{SI^{cm} \cos \theta}{2\pi r^3}, \quad \dot{H}_\theta = \frac{SI^{cm} \sin \theta}{4\pi r^3}. \quad (14.7)$$

Поля (14.7) представляют собой квазистатическую часть полного магнитного поля ЭМИ и соответствуют стационарному полю магнитного диполя.

Существенно отметить, что поля  $\dot{E}_\varphi$  (14.6) и  $\dot{H}_r, \dot{H}_\theta$  (14.7) сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  ( $\dot{E}_\varphi$  имеет множитель  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ), т.е. это поля – чисто реактивные и к полю излучения отношения не имеют.

## 14.3. Анализ поля ЭМИ в волновой (дальней) зоне

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда  $kr \gg 1$  и поле приобретает волновой характер. Главные по величине составляющие поля ЭМИ теперь имеют следующий вид:

$$\dot{E}_\varphi = \frac{\omega SI^{cm} \mu_a k e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta, \quad (14.8)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{SI^{cm} k^2 e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta. \quad (14.9)$$

Введем комплексную амплитуду магнитного поля  $\dot{A} = \frac{SI^{cm} k^2}{4\pi}$ . Тогда

$$\dot{E}_\varphi = \dot{A}_m W^0 \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta, \quad (14.10)$$

$$\dot{H}_\theta = -\dot{A}_m \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta. \quad (14.11)$$

Анализ формул (14.10), (14.11) приводит к выводам того же характера, что и при анализе полей в волновой зоне ЭЭИ:

1) поля Е и Н синфазны и образуют структуру сферической волны, распространяющейся в направлении  $\vec{r}_0$  от источника с фазовой скоростью  $v_\phi = \omega / k = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ ;

2) в пространстве без потерь Е и Н убывают пропорционально  $1/r$ ;

3) излучение ЭМИ неизотропно, диаграмма направленности  $F(\theta) = \sin \theta$ ;

4) отношение  $|\dot{E}|$  и  $|\dot{H}|$  равно волновому сопротивлению  $W^0 = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ .

Составим вектор Пойнтинга для поля излучения ЭМИ (14.10), (14.11):

$$\dot{S}_0 = \frac{1}{2} [\dot{E}, \dot{H}^*] = -\frac{1}{2} [\vec{\varphi}_0, \vec{\theta}_0] \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^* = \vec{r}_0 \frac{I_m^2 \pi^2 (S / \lambda^2)^2 W^0}{2r^2} \sin^2 \theta. \quad (14.12)$$

Как и в случае ЭЭИ для подсчета полной мощности излучения ЭМИ, найдем поток  $\text{Re} \dot{S}_0$  через сферу радиуса  $r$  с центром в точке расположения ЭМИ. Тогда получим

$$\begin{aligned} P_\Sigma &= \text{Re} \oint_s \dot{S}_0 d\vec{s} = \frac{I_m^2 \pi^2 (S / \lambda^2)^2 W^0}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\varphi d\theta = \\ &= \frac{4}{3} \pi^3 (S / \lambda^2)^2 I_m^2 W^0 \end{aligned} \quad (14.13)$$

Вводя, как и ранее, сопротивление излучения  $R_\Sigma$  рамки с током  $I^{ct}$ , получаем

$$\begin{aligned} P_\Sigma &= \frac{4}{3} \pi^3 (S / \lambda^2)^2 I_m^2 W^0 = \frac{1}{2} I_m^2 R_\Sigma, \\ R_\Sigma &= \frac{8}{3} \pi^3 (S / \lambda^2)^2 W^0. \end{aligned} \quad (14.14)$$

В случае возбуждения волны в атмосфере или пустоте  $W^0 = 120\pi$  [Ом] и

$$P_\Sigma = 320\pi^4 (S / \lambda^2)^2 [\text{Ом}]. \quad (14.15)$$

## ГЛАВА XV

### ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

При расчете электромагнитных полей часто удобно прибегать к декомпозиции задачи: сложный исследуемый электродинамический объект подразделяется на независимо анализируемые части, или автономные блоки. Эти блоки разделяются некоторыми заданными поверхностями, на которых задаются эквивалентные граничные условия, которые позволяют после решения краевой задачи для автономных блоков синтезировать решение общей (исходной) задачи. Один из способов согласования решений в отдельных подобластях - введение системы эквивалентных источников на граничных поверхностях. Например, стоит задача расчета поля излучения рупорной антенны (или рупорного облучателя антенны). Очевидно, задача возбуждения ЭМП от заданного распределения сторонних источников в рупоре является самостоятельной, довольно детально разработанной задачей. Поэтому можно считать, что поле  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  на плоскости S раскрыва рупора известно (можно ввести в качестве границы не плоскость, а, например, участок сферической или эллипсоидальной поверхности, если это повышает точность представления граничных полей). Тогда для расчета поля излучения рупора удобно ввести на S эквивалентные источники ЭМП, определяемые через значения  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  на S по следующей схеме.

Если заменить поверхность раскрыва рупора идеально проводящей поверхностью, то для задания на этой поверхности  $\vec{H}^0$  следует в соответствии с известными граничными условиями (глава, первая часть курса) ввести эквивалентную поверхностную плотность тока  $\vec{\delta}_s^e$ :

$$\vec{\delta}_s^e = [\vec{n}, \vec{H}^0]_s, \quad (15.1)$$

$\vec{n}$  - внешняя нормаль к S.

Для замены  $\vec{E}^0$  следует ввести на S эквивалентную поверхностную плотность магнитного тока  $\vec{\delta}_s^m$ , используя свойство перестановочной двойственности уравнений Максвелла:

$$\vec{\delta}_s^m = -[\vec{n}, \vec{E}^0]_s. \quad (15.2)$$

С другой стороны, для гармонических источников имеем:

$$\dot{\vec{\delta}}_s^e = \frac{\partial \vec{p}^{cm}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{p}}^{cm}, \quad (15.3)$$

$$\dot{\delta}_s^m = \frac{\partial \vec{J}^{cm}}{\partial t} = j\omega \dot{\vec{J}}^{cm}. \quad (15.4)$$

Здесь  $\dot{\vec{p}}^{cm}$  и  $\dot{\vec{J}}^{cm}$  соответственно сторонние поляризованность и намагниченность на  $S$ . Таким образом, на  $S$  заданы  $\dot{\vec{p}}^{cm}$  и  $\dot{\vec{J}}^{cm}$  эквивалентных источников следующим образом:

$$\dot{\vec{p}}^{cm} \Big|_s = \frac{[\vec{n}, \vec{H}^0]}{j\omega} \Big|_s, \quad (15.5)$$

$$\dot{\vec{J}}^{cm} \Big|_s = -\frac{[\vec{n}, \vec{E}^0]}{j\omega} \Big|_s. \quad (15.6)$$

Теперь можно использовать решения для  $\vec{\Pi}^\ell(A)$  и  $\vec{\Pi}^m(A)$  типа (13.2) из главы XIII данной части курса:

$$\vec{\Pi}^\ell(A) = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon_a} \iint_s \frac{[\vec{n}, \dot{\vec{H}}^0] e^{-jkr} ds}{r}, \quad (15.7)$$

$$\vec{\Pi}^m(A) = \frac{-1}{4\pi j\omega\mu_a} \iint_s \frac{[\vec{n}, \dot{\vec{E}}^0] e^{-jkr} ds}{r}. \quad (15.8)$$

Здесь  $r$  – расстояние от элемента поверхности  $ds$  до точки наблюдения  $A$ . Используя известные формулы связи  $\vec{E}, \vec{H}$  с  $\vec{\Pi}^\ell$  и  $\vec{\Pi}^m$  (см. [Главу V первой части](#)), получаем следующие общие выражения для полей излучения исследуемой антенны:

$$\dot{\vec{E}} = k^2 \vec{\Pi}^\ell + \text{grad div} \vec{\Pi}^\ell - j\omega\mu_a \text{rot} \vec{\Pi}^m, \quad (15.9)$$

$$\dot{\vec{H}} = k^2 \vec{\Pi}^m + \text{grad div} \vec{\Pi}^m + j\omega\epsilon_a \text{rot} \vec{\Pi}^\ell. \quad (15.10)$$

Дифференцирование в (15.9), (15.10) производится по координатам точки наблюдения  $A$ .

## ГЛАВА XVI

### ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### 16.1. Определение плоских электромагнитных волн

Плоскими называются электромагнитные волны, в которых векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  нормальны к направлению распространения  $z$ , зависят только от  $z$  и не зависят от поперечных к  $z$  координат  $q_1, q_2$  ( $x, y$ , например).

Между тем, как следует из материалов глав [XIII](#), [XIV](#), поля элементарных источников в волновой зоне представляют собой сферические волны, расходящиеся от источников в свободном пространстве.

Плоскую волну можно рассматривать как некоторое приближение структуры сферической волны в конечном объеме, достаточно удаленном от источника. Геометрические характеристики такого объема  $V$  представлены на [рис. 16.1](#).

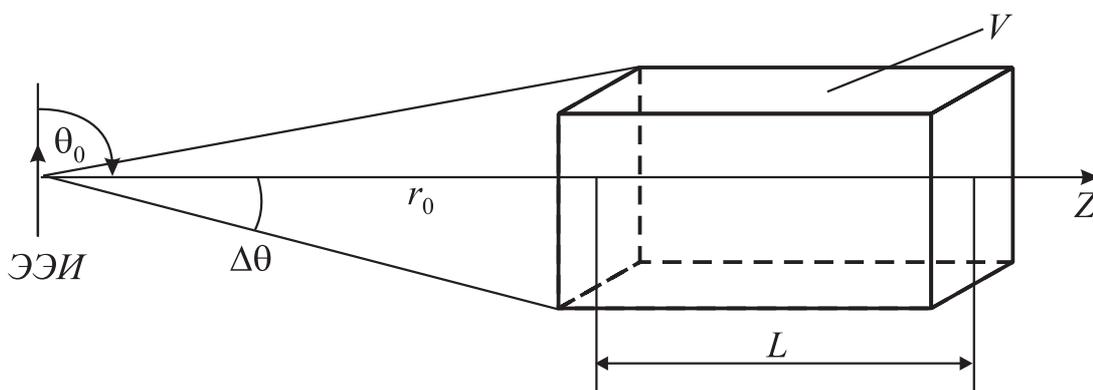


Рис. 16.1.

Для определенности рассмотрим электромагнитное поле элементарного электрического излучателя (ЭЭИ), расположенного при  $r=0$  в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ , как это указано на [рис. 16.1](#). Рассматриваемый конечный объем  $V$  расположен на расстоянии  $r_0$  от источника, внутри  $V$   $r=r_0+z$ , угловое расхождение по максимальным поперечным размерам  $V$  равно  $\Delta\theta$ . Поля источника в области  $V$  в сферической системе координат, как было установлено в [главе XIII](#), для волновой зоны могут быть записаны как

$$\dot{E}_\theta = \dot{A}W^0 e^{-jkr} \sin\theta / r, \quad (16.1)$$

$$\dot{H}_\varphi = \dot{A}e^{-jkr} \sin\theta / r$$

Положим теперь, что поперечные размеры  $V$  настолько ограничены, что  $\frac{\Delta\theta}{\theta_0} \rightarrow 0$ , а удаление  $V$  от источника настолько велико (а длина его  $L$  на-

столько ограничена), что  $L \ll r_0$ . Но в то же время будем предполагать, что  $L \gg \lambda$ , т.е.  $kz$  – величина большая.

При указанных условиях

$$\frac{\sin \theta}{r} \approx \frac{\sin \theta_0}{r_0}, \quad kr = kr_0 + kz \quad (16.2)$$

Используя приближение (16.2) в формулах (16.1), положим

$$\dot{A} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} \sin \theta_0 = \dot{A}_0 e^{j\omega t} \quad (16.3)$$

При обозначении (16.3) с учетом (16.2) из (16.1) получаем следующее приближение для  $V$ :

$$\dot{E}_\theta = \dot{A} W^0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad (16.4)$$

$$\dot{H}_\varphi = \dot{A} e^{j(\omega t - kz)}$$

В дальнейшем для описания плоских волн в  $V$  удобно ввести прямоугольную систему координат и переобозначить в (16.4):  $\dot{E}_\theta = \dot{E}_X$ ,  $\dot{H}_\varphi = \dot{H}_Y$ . Тогда мы приходим к обычной записи компонент плоской волны в координатах  $x, y, z$ :

$$\dot{E}_X = A_0 W^0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad (16.5)$$

$$\dot{H}_Y = A_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

Поля  $\dot{E}_X, \dot{H}_Y$ , определяемые формулами (16.5) полностью соответствуют определению плоской волны с амплитудой  $A_0$ .

Нетрудно убедиться прямой подстановкой решений (16.5) в уравнения Максвелла, что они этим уравнениям удовлетворяют, т.е. приближение плоской волны вполне реально.

## 16.2. Плоские волны в однородной изотропной среде без потерь.

### Поляризация плоских волн

В рассматриваемом случае электрические и магнитные параметры среды  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  – действительные, постоянные (не зависящие от координат) и скалярные (не тензоры) величины. Поэтому волновое число  $k$  имеет только фазовую постоянную  $\beta$ , постоянная затухания  $\alpha$  равна нулю:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \beta = \frac{\omega}{v_{cp}} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (16.6)$$

$$v_{cp} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}, \quad \lambda = v_{cp} T = \frac{T}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$$

Запишем теперь (16.5) в векторной форме

$$\dot{\vec{E}} = \vec{x}_0 A_0 W^0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (16.7)$$

$$\dot{H} = \vec{y}_0 A_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

Формулы (16.7) определяют плоскую волну, вектор  $\vec{E}$  в которой при любых  $t, z$  колеблется в плоскости  $xz$ . Такая волна называется линейно поляризованной, а плоскость, в которой расположен вектор  $\vec{E}$  (в рассматриваемом случае – плоскость  $xz$ ) называется *плоскостью поляризации* плоской электромагнитной волны. При распространении волны у земной поверхности плоскости поляризации обычно называют *горизонтальной* (вектор  $\vec{E}$  параллелен горизонту) и *вертикальной*, если плоскость поляризации нормальна горизонту. В дальнейшем будем придерживаться такой терминологии.

В общем случае плоская волна представляет собой суперпозицию волн вертикальной и горизонтальной поляризаций:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{x}_0 \dot{A}_B e^{-jkz} + \vec{y}_0 \dot{A}_G e^{-j(kz + \alpha)} \quad (16.8)$$

Здесь  $\dot{A}_B = A_B^0 e^{j\omega t}$  – комплексная амплитуда вертикально поляризованной волны,  $\dot{A}_G = A_G^0 e^{j\omega t}$  – комплексная амплитуда горизонтально поляризованной волны,  $\alpha$  – сдвиг фазы горизонтально поляризованной волны относительно вертикально поляризованной.

Рассмотрим некоторые типичные случаи.

а) Амплитуды волн различны:  $A_B^0 \neq A_G^0$ , сдвиг фаз отсутствует:  $\alpha = 0$ .

В этом случае суммарная волна линейно поляризованная, ее плоскость поляризации отклонена от вертикальной плоскости  $xz$  на постоянный угол  $\nu$ ,

который определяется как  $tg \nu = \frac{A_G^0}{A_B^0} = const$ .

Амплитуда суммарного поля  $A^0 = \sqrt{(A_B^0)^2 + (A_G^0)^2}$ .

б) Амплитуды волн одинаковы:  $A_B^0 = A_\Gamma^0 = A_0, \alpha = \pi/2$ . В этом случае из (16.8) следует:

$$\dot{\vec{E}} = A_0(\vec{x}_0 - j\vec{y}_0)e^{j(\omega t - kz)}.$$

Перейдем к действительным величинам

$$\vec{E} = \text{Re } \dot{\vec{E}} = A_0[\vec{x}_0 \cos(\omega t - kz) + \vec{y}_0 \sin(\omega t - kz)] = \vec{x}_0 E_B(t, z) + \vec{y}_0 E_\Gamma(t, z),$$

$$E_B(t, z) = A_0 \cos(\omega t - kz), \quad E_\Gamma = A_0 \sin(\omega t - kz).$$

Теперь угол отклонения вектора  $\vec{E}$  суммарной волны определяется как

$$\nu = \text{arctg} \frac{E_\Gamma(t, z)}{E_B(t, z)} = \omega t - kz.$$

Таким образом, если зафиксировать  $t=t_0=\text{const}$  (мгновенная картина), вектор  $\vec{E}$  располагается на винтовой поверхности, определяемой вращением угла  $\nu$  по закону:  $\nu = -kz + \omega t_0$ . Если же зафиксировать плоскость  $z=z_0=\text{const}$ , то в этой плоскости вектор  $\vec{E}$  вращается с частотой  $\omega$  по закону:  $\nu = \omega t - kz_0$ . Причем, амплитуда  $\vec{E}$  остается постоянной и равной  $A_0$ .

В тройке векторов  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  вращение происходит против часовой стрелки (по закону правой тройки) и поэтому волна описанного типа называется *правополяризованной* волной с круговой поляризацией (поскольку  $A_0=\text{const}$ ).

в) Амплитуды волн одинаковы:  $A_B^0 = A_\Gamma^0 = A_0, \alpha = -\pi/2$ . В этом случае  $E_B(t, z) = A_0 \cos(\omega t - kz), E_\Gamma(t, z) = -A_0 \sin(\omega t - kz)$ . Соответственно  $\nu(t, z) = -(\omega t - kz)$ . Это тоже волна с круговой поляризацией, но *левополяризованная* в отличие от предыдущей, поскольку вращение вектора  $\vec{E}$  в ней происходит в противоположном направлении.

Нетрудно убедиться, что любую линейно-поляризованную волну с амплитудой  $A_0$  можно представить как суперпозицию двух лево- и правополяризованных волн с одинаковой амплитудой  $A_0/2$ . Такое представление весьма полезно при анализе распространения линейно поляризованных волн в анизотропных средах (например, в намагниченной плазме или феррите). Дело в том, что взаимодействие лево- и правополяризованных волн с анизотропной средой существенно различается и разложение линейно поляризованной волны на две указанные составляющие весьма полезно при анализе взаимодействия.

В общем случае  $A_B^0 \neq A_\Gamma^0$  и  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ . При этом вращение вектора  $\vec{E}$  также происходят с угловой частотой  $\omega$ , но амплитуда вектора  $\vec{E}$  зависит от угла  $\nu$ , т.е. конец вектора  $\vec{E}$  «описывает» не круг, а эллипс. Поэтому в общем случае волна имеет ни линейную, ни круговую, а эллиптическую поляризацию.

### 16.3. Плоские волны в среде с потерями

Если свободное пространство однородно и изотропно, но имеются диэлектрические, джоулевы и магнитные потери, то параметры среды  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  - комплексные. Представим их в показательной форме:

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a e^{-j\Delta_E}, \quad \dot{\mu}_a = \mu_a e^{-j\Delta_H} \quad (16.9)$$

Здесь  $\varepsilon_a, \mu_a$  - модули соответствующих величин;  $\Delta_E, \Delta_H$  - угол соответственно электрических и магнитных потерь.

Теперь как волновое число, так и волновое сопротивление пространства – комплексные величины. Запишем их в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} e^{-j\theta_1} = \beta - j\alpha, \\ \beta &= k \cos \theta_1, \quad \alpha = k \sin \theta_1, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \end{aligned} \quad (16.10)$$

$$\dot{W}^0 = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} e^{j\theta_2} = W^0 e^{j\theta_2},$$

$$W^0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}, \quad \theta_1 = \frac{\Delta_E + \Delta_H}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\Delta_E - \Delta_H}{2}.$$

Теперь компоненты  $\vec{E}, \vec{H}$  плоской волны могут быть представлены как

$$\dot{\vec{E}} = \vec{x}_0 W^0 A_0 e^{j(\omega t - \beta z + \theta_2)} e^{-\alpha z}, \quad (16.11)$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{y}_0 A_0 e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z}$$

Таким образом, в среде с потерями, как следует из (16.11), имеют место два эффекта.

1. Напряженности поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  убывают в направлении распространения экспоненциально с постоянной затухания  $\alpha$ .

2. Вектор  $\dot{\vec{E}}$  имеет фазовый сдвиг относительно  $\dot{\vec{H}}$  величиной  $\theta_2$ . Это, между прочим, означает, что на периодических интервалах по  $z$  длиной  $\Delta z = \frac{\theta_2 \lambda}{2\pi}$  ( $\lambda = 2\pi / k \cos \theta_1$ ) в связи со сменой ориентации  $\vec{E}$  относительно  $\vec{H}$  вектор Умова-Пойнтинга  $\vec{S}_0 = [\vec{E}, \vec{H}]$  меняет знак на обратный. Иначе говоря, на указанных интервалах поток энергии в волне в заданный момент  $t=t_0=const$  противоположен направлению распространения волны, что представляется весьма интересным с точки зрения физики распространения радиоволн.

К ним следует добавить еще и третий эффект: поскольку в средах с потерями  $\Delta_E$  и  $\Delta_H$  зависят от частоты, в таких средах имеет место дисперсия, т.е. зависимость  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $W^0$  от частоты.

## ЧАСТЬ 5

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

#### ГЛАВА XVII

##### ДИАПАЗОНЫ ВОЛН. КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОВОЛН ПО МЕХАНИЗМУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Как указывалось в первой части курса, мы рассматриваем классическую теорию электромагнитных явлений, в которой дискретность вещества (среды) и излучения не учитывается, а поле предполагается континуальным. Такие представления ограничивают спектр волн, где классическая теория еще применима; если рассматривать мощности  $> 1$  мкВт, то границей частот, выше которой заметно проявляется дискретность излучения, будет  $f_{гр} \sim 3 \cdot 10^{12}$ . Весь спектр частот  $f < f_{гр}$  может быть разбит на диапазоны. В нашей стране принято следующее деление радиоволн по диапазонам:

Сверхдлинные волны (СДВ):  $\lambda \geq 10000$  м,  $f \leq 3 \cdot 10^4$  Гц,

Длинные волны (ДВ):  $\lambda = 10000 \div 1000$  м,  $f = 3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$  Гц,

Средние волны (СВ):  $\lambda = 1000 \div 100$  м,  $f = 3 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6$  Гц,

Короткие волны (КВ):  $\lambda = 100 \div 10$  м,  $f = 3 \cdot 10^6 \div 3 \cdot 10^7$  Гц,

Ультракороткие волны

(УКВ):  $\lambda = 10 \div 1$  м,  $f = 3 \cdot 10^7 \div 3 \cdot 10^8$  Гц ,

Дециметровые волны

(ДМВ):  $\lambda = 1 \div 0,1$  м,  $f = 3 \cdot 10^8 \div 3 \cdot 10^9$  Гц ,

Сантиметровые волны

(СМВ):  $\lambda = 0,1 \div 0,01$  м,  $f = 3 \cdot 10^9 \div 3 \cdot 10^{10}$  Гц ,

Миллиметровые волны

(ММВ):  $\lambda = 0,01 \div 0,001$  м,  $f = 3 \cdot 10^{10} \div 3 \cdot 10^{11}$  Гц,

СБММ:  $\lambda = 0,001 - 0,0001$  м,  $f = 3 \cdot 10^{11} \div 3 \cdot 10^{12}$  Гц.

Характер распространения волн различных диапазонов различен как при распространении вокруг земной поверхности, так и при распространении под землей, в воде, тропосфере и ионосфере, а также и в космическом пространстве.

Как было показано в третьей части ([глава XVI](#)), в однородной, изотропной и неограниченной среде (в «свободном пространстве») электромагнитные волны распространяются прямолинейно со скоростью  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ . В атмосфере можно приближенно считать, что  $\epsilon_a \approx \epsilon_0$ ,  $\mu_a \approx \mu_0$ ,  $v = 3 \cdot 10^8$  м/сек. Волны, распространяющиеся в свободном пространстве, будем называть *свободно распространяющимися*.

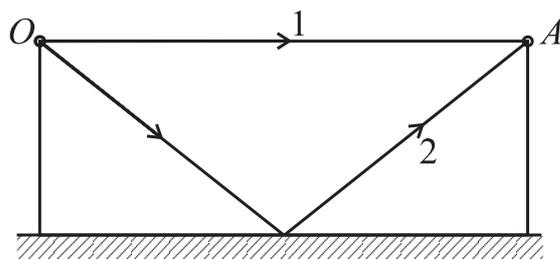


Рис. 17.1.

Представим теперь, что распространение радиоволн происходит вблизи плоской границы раздела двух сред, например, в атмосфере вблизи земной поверхности, отражающий участок которой можно считать гладким и плоским. Тогда пути распространения волн от источника (O) к приемнику (A) могут быть двоякого рода ([рис. 17.1](#)):

прямой луч (1) и отраженный луч (2) складываются в точке приема (A). Очевидно, что интерференция волн, приходящих к приемнику по пути 1 и 2, приводит к ряду явлений, которые необходимо учитывать; это прежде всего изменение диаграммы направленности излучателя за счет отражающей поверхности и искажение сигнала за счет разного времени распространения волн по пути 1.2.

Очевидно, что если неровности земной поверхности значительно превосходят рабочую длину волны, предыдущая картина значительно усложня-

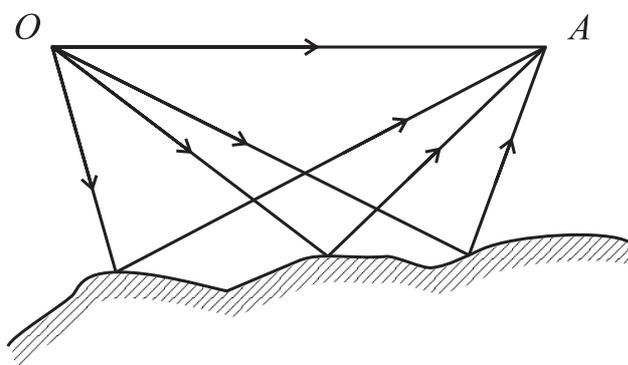


Рис. 17.2.

ется за счет увеличения числа отраженных лучей ([рис. 17.2](#)).

Земная поверхность на достаточно высоких частотах по своим свойствам соответствует полупроводящей среде; поле волны, распространяющейся непосредственно над земной поверхностью, частично проникает в землю, за счет чего соответственно искажается структура поля над земной поверхностью. Образуется специфическая по структуре **поверхностная** волна, следующая вдоль искривлений земной поверхности, т.е. не прямолинейно. К такому же эффекту приводит явление **дифракции** электромагнитных волн вокруг сферической земной поверхности на достаточно длинных волнах, когда высота шарового сегмента  $h$  ([рис. 17.3](#)) сравнима с длиной волны  $\lambda$ .

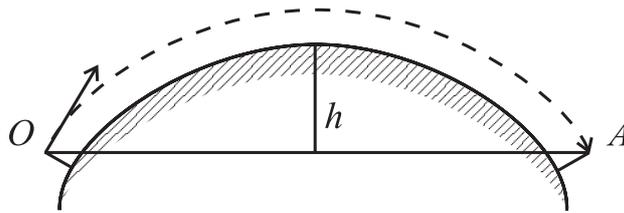


Рис. 17.3.

Следующие вдоль земной поверхности волны (независимо от механизма образования) принято называть общим термином – **земные волны**.

Над земной поверхностью расположена атмосфера, нижний (плотный) слой которой называется тропосферой. Тропосфера не является однородным диэлектриком – с увеличением высоты (расстояния от поверхности земли) плотность тропосферы падает, соответственно и  $\epsilon$  несколько уменьшается; кроме того, в тропосфере всегда существуют нестационарные локальные неоднородности различного происхождения (облака, турбулентные слои и т.д.). За счет регулярной неоднородности тропосферы происходит искривление радиолуча (рис. 17.4), за счет случайных локальных неоднородностей (рис. 17.5) происходит рассеяние радиоволн. Как волноводное (направляющее радиолуч вдоль земной поверхности) действие тропосферы, так и рассеяние на неоднородностях приводит к дальнему распространению волн (до 1000 км). Волны, распространяющиеся таким образом, называются **тропосферными**.

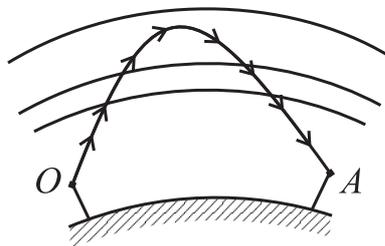


Рис. 17.4.

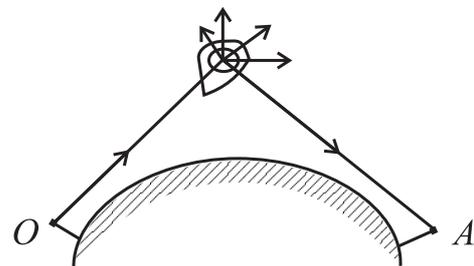


Рис. 17.5.

Над тропосферой на высотах  $60 \div 600$  км располагается ионосфера, представляющая собой слои частично или полностью ионизированного газа

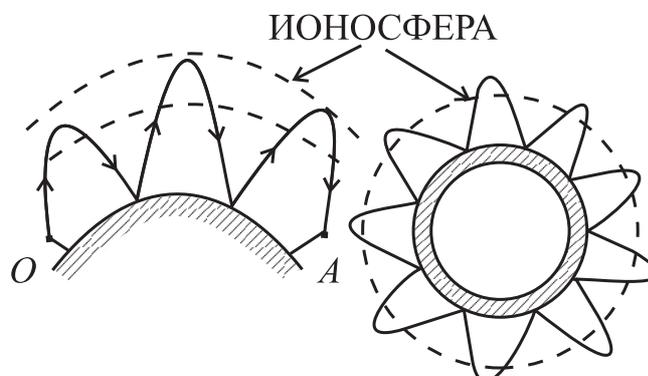


Рис. 17.6

различной плотности и с различной электронной концентрацией. Волны с длиной волны  $\lambda > 10$  м отражаются от ионосферы и поэтому за счет последо-

вательных отражений радиоволн от ионосферы и земной поверхности возможно дальнейшее распространение в естественном волноводе ионосфера-земная поверхность ([рис. 17.6](#))

Волны, имеющие описанный выше характер распространения, называются *пространственными* или *ионосферными*.

Радиоволны различных диапазонов распространяются в виде волн различного типа. Преимущество какого-либо вида распространения зависит от расстояния, времени суток, характера радиотрассы, метеорологических условий и т.д. Учет всех этих условий весьма сложен, и точный расчет радиотрассы почти всегда исключен; необходимы специальные тесты для выявления наилучшего диапазона и наилучшей радиотрассы при обеспечении связи между заданными географическими пунктами в заданное время года и суток.

## ГЛАВА XVIII

### ДИФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН

#### 18.1 Принцип Гюйгенса. Формула Кирхгофа

На распространение радиоволн от источника к приемнику существенное влияние, очевидно, оказывают свойства не всего окружающего пространства, а только некоторой его ограниченной области, расположенной между приемником и источником. [Рис. 18.1](#) иллюстрирует этот очевидный факт – препятствие С (например, непрозрачный экран) существенно влияет на распространение волн к приемнику В, но, очевидно, мало влияет на интенсивность поля в точке приема А.

Для выяснения формы и размеров существенной области воспользуемся принципом Гюйгенса. Принцип Гюйгенса в простейшем понимании утверждает: каждая точка, лежащая на поверхности фронта распространяющейся волны, возбужденной первичным источником, является источником вторичных сферических волн. Новое положение фронта распространяющейся волны в пространстве есть огибающая суперпозиции вторичных сферических волн.

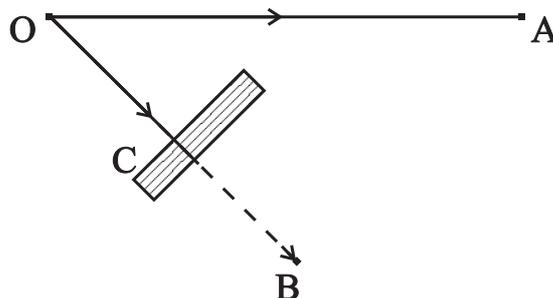


Рис. 18.1

Нетрудно заметить, что принцип Гюйгенса представляет собой частный случай использования фиктивных источников электромагнитного поля, которые вводятся для упрощения решения задач электродинамики (см. [главу XV части 4](#)). Поэтому далее можно было бы непосредственно использовать полученные в [главе XV части 4](#) формулы для математической формулировки этого принципа. Представляется, однако, более оправданным использовать исторически сложившуюся математическую формулировку принципа Гюйгенса в виде формулы Кирхгофа.

Рассмотрим исходную структуру задачи, представленную на [рис. 18.2](#).

Пусть источник электромагнитных волн расположен в точке О, точка наблюдения –  $A(x, y, z)$ ,  $B(x', y', z')$  – вспомогательная точка,  $r$  – расстояние между А и В:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

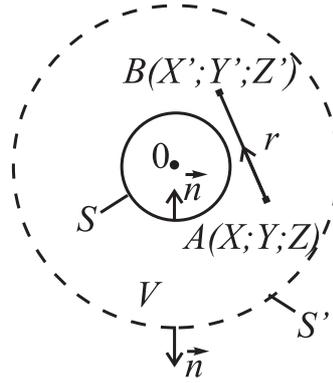


Рис. 18.2

Замкнутая поверхность  $S$  изолирует объем  $V$  от источника, расположенного в точке  $O$ . Вторая замкнутая поверхность  $S'$  ограничивает объем  $V$ , делая его конечным. Будем считать, что источником является элементарный электрический излучатель и его поле описывается электрическим потенциалом Герца  $\vec{\Pi}^e$ . В объеме  $V$  источника нет,  $\vec{\Pi}^e$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^e + k^2 \vec{\Pi}^e = 0, \quad (18.1)$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a, \quad \varepsilon_a, \mu_a - \text{действительные.}$$

Введем также вспомогательную функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую уравнению:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -4\pi\delta[(x-x')(y-y')(z-z')] = -4\pi\delta(A-B) \quad (\delta - \text{дельта-функция}) \quad (18.2)$$

и имеющую вид  $\varphi = \frac{e^{-jkr}}{r}$ .

Умножим уравнение (18.1) на  $\varphi$ , уравнение (18.2) – на  $-\vec{\Pi}^e$  и сложим. В результате имеем:

$$\varphi \cdot \nabla^2 \vec{\Pi}^e - \vec{\Pi}^e \cdot \nabla^2 \varphi = 4\pi\delta(A-B)\vec{\Pi}^e \quad (18.3)$$

Проинтегрируем (18.3) по  $V$  и воспользуемся свойством  $\delta$ -функции. При этом получим:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \vec{\Pi}^e - \vec{\Pi}^e \nabla^2 \varphi) dV = 4\pi \vec{\Pi}^e(A) \quad (18.4)$$

Используя для преобразования левой части вторую теорему Грина, находим:

$$\oint_{S+S'} \left( \varphi \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial \vec{n}} - \vec{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) dS = 4\pi \vec{\Pi}^e(A) \quad (18.5)$$

Устремляя  $S'$  в (18.5) в бесконечность и помещая точку  $B$  на поверхность  $S$ , имеем:

$$\vec{\Pi}^e(A) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \vec{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (18.6)$$

Соотношение (18.6), выражающее поле  $\vec{\Pi}^e$  в точке наблюдения  $A$  через  $\vec{\Pi}^e$  в точках  $B$  поверхности  $S$  и вспомогательную, пока не доопределенную функцию  $\varphi$ , называется формулой Кирхгофа. Функция  $\varphi$  обычно называется функцией Грина. Теперь геометрия задачи принимает вид, указанный на рис. 18.3. Здесь дополнительно указано  $\rho$  - расстояние от источника до точки  $B$  на поверхности  $S$ .

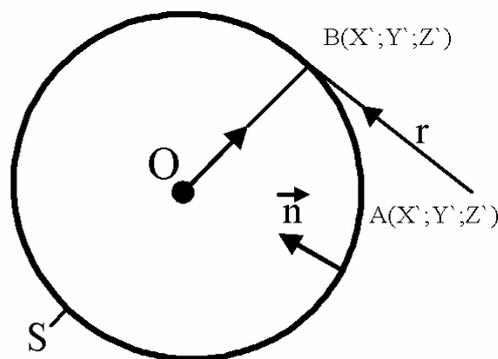


Рис. 18.3

Выберем поверхность  $S$  специальным образом, как это показано на рис. 18.4. Тогда  $S=S_c+S_0$ , где  $S_c$  - полусфера с радиусом  $r_c$ ,  $S_0$  - замыкающая ее

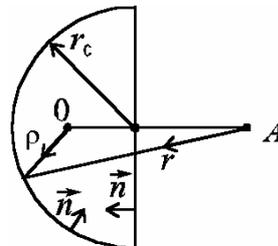


Рис. 18.4

плоскость, нормальная к лучу  $OA$ .

Будем далее считать, что электромагнитное поле создается элементарным (точечным) электрическим излучателем, и поэтому (см. главу XIII):

$$\vec{\Pi}^e(S) = \frac{\overset{cm}{I} \vec{\ell}}{j4\pi\epsilon_a\omega} \cdot \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} = \vec{C} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho}, \quad (18.7)$$

$$\text{где } \vec{C} = \frac{\overset{cm}{I} \vec{\ell}}{j4\pi\epsilon_a\omega}.$$

Запишем теперь формулу Кирхгофа для рассматриваемого случая:

$$\bar{\Pi}^e(A) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ \bar{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} - \varphi \frac{\partial \bar{\Pi}^e}{\partial \bar{n}} \right\} dS - \frac{1}{4\pi S_c} \int \left\{ \bar{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} - \varphi \frac{\partial \bar{\Pi}^e}{\partial \bar{n}} \right\} dS \quad (18.8)$$

Рассмотрим предел второго интеграла при  $r_c \rightarrow \infty$ , имея в виду, что  $\bar{\Pi}^e(S)$  определяется (18.7). При таком переходе ввиду конечности расстояния ОА имеют место следующие пределы:

$$\frac{r}{\rho} \rightarrow 1; \quad \frac{r}{r_c}, \quad \frac{\rho}{r_c} \rightarrow 1, \quad (18.9)$$

$$\cos(\bar{n}, \bar{\ell}_r) \rightarrow -1, \quad (18.10)$$

$$\cos(\bar{n}, \bar{\ell}_\rho) \rightarrow -1, \quad (18.11)$$

В (18.10) и (18.11)  $\bar{\ell}_r, \bar{\ell}_\rho$  - единичные вектора вдоль направлений соответственно  $r$  и  $\rho$  (от точек А и О).

Распишем последовательно элементы подынтегральных выражений, используя вид функции  $\varphi$ , (18.7), (18.9) ÷ (18.11).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} = \frac{d\varphi}{dr} \cos(\bar{n}, \bar{\ell}_r) = \left\{ -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) \right\} \cos(\bar{n}, \bar{\ell}_r), \quad (18.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}^e}{\partial \bar{n}} = \frac{d\bar{\Pi}^e}{d\rho} \cos(\bar{n}, \bar{\ell}_\rho) = \bar{C} \left\{ -jk \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{jk\rho} \right) \right\} \cos(\bar{n}, \bar{\ell}_\rho). \quad (18.13)$$

Таким образом, подынтегральное выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} - \varphi \frac{\partial \bar{\Pi}^e}{\partial \bar{n}} &= -jk\bar{C} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) \cos(\bar{n}, \bar{\ell}_r) + \\ &+ jk\bar{C} \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{jk\rho} \right) \cos(\bar{n}, \bar{\ell}_\rho) \end{aligned} \quad (18.14)$$

Очевидно, что при  $r_c \rightarrow \infty$  ( $r, \rho \rightarrow \infty$ ) и выполняются (18.9) ÷ (18.11). При этом (18.14) представляет собой разность одинаковых по величине членов. Учитывая, что  $S_c \sim r^2$  и  $\rho \cdot r \rightarrow r_c^2$  заключаем, что второй интеграл в (18.8) при  $r_c \rightarrow \infty$  обращается в нуль, и, следовательно,  $\bar{\Pi}^e(A)$  находится интегрированием по бесконечной плоскости  $S_0$ , разделяющей О и А. Таким образом,

$$\bar{\Pi}^e(A) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ \bar{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} - \varphi \frac{\partial \bar{\Pi}^e}{\partial \bar{n}} \right\} dS. \quad (18.15)$$

Проведем теперь дальнейшие упрощения (18.15). Очевидно, что интеграл (18.15) упростится, если положить  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(S_0) = 0$  или  $\varphi(S_0) = 0$ . Примем второе условие, т.е. положим

$$\varphi(S_0) = 0. \quad (18.16)$$

Имея в виду, что общий вид  $\varphi$  указан выше, представим  $\varphi$  с учетом (18.16) следующим образом:

$$\varphi = \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} - \frac{e^{-jk r_2}}{r_2}, \quad (18.17)$$

где  $r_1$  – расстояние от точки  $A$  до любой текущей точки  $B$ ,  $r_2$  – расстояние от точки  $A'$ , являющейся зеркальным изображением  $A$  относительно  $S_0$ , до той же точки  $B$  (рис. 18.5). Очевидно, что для всех  $B \in S$   $r_1 = r_2$  и  $\varphi = 0$ , т.е. условие

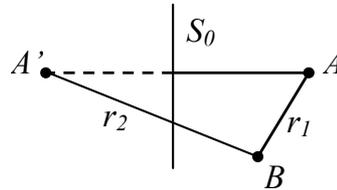


Рис. 18.5

(18.16) удовлетворяется.

Теперь 
$$\bar{\Pi}^e(A) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \bar{\Pi}^e \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} dS. \quad (18.18)$$

Рассчитаем  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(S_0)$ . Поскольку на  $S_0$   $r_1 = r_2 = r$ , выполняется также следующее равенство:

$$-\cos(\vec{n}, \vec{\ell}_{r_1}) = \cos(\vec{n}, \vec{\ell}_{r_2}), \quad (18.19)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_0} = \frac{d}{dr_1} \left( \frac{e^{-jk r_1}}{r_1} \right) \cos(\vec{n}, \vec{\ell}_{r_1}) - \frac{d}{dr_2} \left( \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \right) \cos(\vec{n}, \vec{\ell}_{r_2}) =$$

$$= (r_1 = r_2 = r, \text{ учитываем (18.19)}) = 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-jk r}}{r} \right) \cos(\vec{n}, \vec{\ell}_r) = \quad (18.20)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{e^{-jk r}}{r} \right) \Big|_{S_0}.$$

Теперь с учетом результата (18.20) имеем:

$$\vec{\Pi}^e(A) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \vec{\Pi}^e \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) dS. \quad (18.21)$$

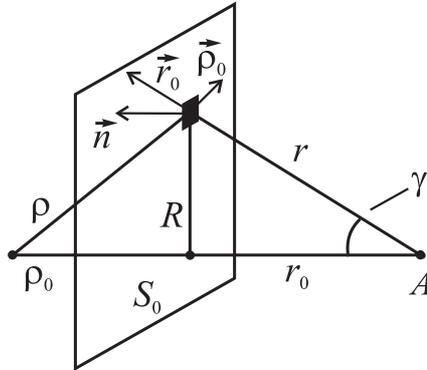


Рис. 18.6

Для дальнейших расчетов введем следующие обозначения (рис. 18.6):

Рассчитаем  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right)$  при условии, что  $kr \gg 1$ . В этом случае получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) &= \\ &= -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) \cos \gamma \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (18.22)$$

Таким образом, когда для полей справедливо приближение дальней зоны  $\left( \frac{r}{\lambda} \gg 1, \frac{\rho}{\lambda} \gg 1 \right)$  получаем, подставляя в (18.21), (18.22) и (18.7):

$$\vec{\Pi}^e(A) = \frac{j\vec{C}k}{2\pi} \int_{S_0} \frac{e^{-jk(r+\rho)}}{r\rho} \cos \gamma dS_0, \quad (18.23)$$

## 18.2. Зоны Френеля. Область, существенная для распространения радиоволн

Проанализируем полученное выражение. В соответствии с формулой (18.23) каждый участок плоскости  $S_0 - dS_0$ , являясь элементарным вторичным излучателем, создает поле  $d\vec{\Pi}^e(A)$  в точке наблюдения A, которое в соответствии с (18.23) записывается как

$$d\vec{\Pi}^e(A) = \frac{j\vec{C}}{\lambda} \cdot \frac{e^{-jk(r+\rho)}}{r\rho} \cos \gamma dS_0. \quad (18.24)$$

Из (18.24) следует, что амплитуда возбуждаемого в точке А поля пропорциональна  $\frac{\cos \gamma d S_0}{\rho r}$ , фаза  $\psi = k(r + \rho) = 2\pi \left( \frac{\rho + r}{\lambda} \right)$ . Таким образом, с изменением  $\rho$  и  $r$  меняется как амплитуда, так и (что существенно) фаза поля. Такое положение приводит к мысли о разбиении плоскости  $S_0$  на отдельные зоны, такие, что фаза поля вторичных источников, расположенных в каждой зоне, в точке А меняется в пределах  $\pi$ , т.е. для каждой зоны  $\Delta\psi = \pi$ . Как следует из определения  $\psi$ , такие зоны на  $S_0$  будут иметь вид колец. Эти кольцеобразные зоны называются зонами Френеля. Найдем границы этих зон, исходя из того, что  $\Delta\psi = \pi$ :  $\Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(\rho + r) = \pi$ , откуда следует, что  $\Delta(\rho + r) = \frac{\lambda}{2}$ , т.е. при переходе от одной границы зоны до другой  $\rho + r$  имеет приращение, равное  $\lambda/2$ . Пусть  $n$  определяет номер зоны. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \text{зона } 1 \rightarrow \rho_1 + r_1 - (\rho_0 + r_0) = \lambda/2, \\ \text{зона } n \rightarrow \rho_n + r_n - (\rho_0 + r_0) = n\lambda/2 \end{array} \right\} \quad (18.25)$$

Структура зон изображена на [рис. 18.7](#)

Соседние зоны помечены чередующимися знаками, поскольку поля,

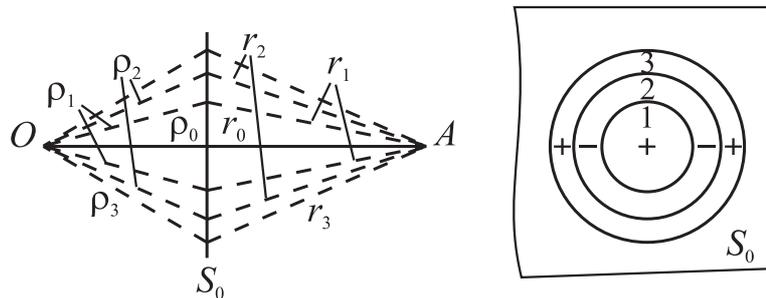


Рис. 18.7

возбуждаемые от соседних зон в точке А противофазны. Полное поле в точке наблюдения А, таким образом, будет представлено знакопеременным рядом, каждый член которого представляет поле отдельной зоны

$$\vec{\Pi}^e(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Pi}_i^e.$$

Поскольку фаза возбуждаемого поля при перемещении по радиусу кольца в каждой зоне непрерывно изменяется, на комплексной плоскости сложение элементарных комплексов  $d\vec{\Pi}_i$  даст следующую геометрическую картину ([рис. 18.8](#)):

Как видно из [рис. 18.8](#) предел суммы  $\sum_{i=1}^{\infty} \vec{\Pi}_i^e$  равен  $\vec{\Pi}_1^e/2$ , т.е. если бы были

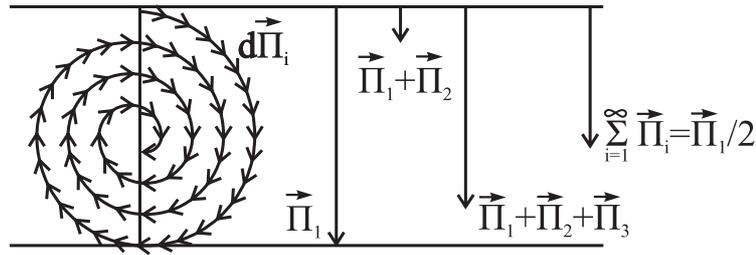


Рис. 18.8

закрыты все зоны, кроме первой, интенсивность поля в точке А была бы вдвое большей. Из характера графика [рис. 18.8](#) видно, что основной вклад дают зоны с наименьшими номерами, вклад от зон с высшими номерами пренебрежимо мал. Это означает, что существенной для распространения является область пространства вдоль луча ОА, занимающая в поперечнике конечное число зон Френеля (обычно  $n < 10$ ).

Остановимся теперь на определении размеров и формы существенной области. Пусть можно ограничиться зоной с номером  $n$ , тогда, при произвольном расположении  $S_0$ , должно сохраняться условие, следующее из [\(18.25\)](#)

$$\rho_n + r_n = (\rho_0 + r_0) + n \frac{\lambda}{2}. \quad (18.26)$$

Это одновременно и уравнение граничной поверхности существенной области. Уравнение [\(18.26\)](#), как известно, описывает эллипсоид вращения с фокальными точками О и А. Таким образом, по форме существенная область представляет собой эллипсоид вращения.

Определим максимальные поперечные размеры существенной области. Введем следующие обозначения ([рис. 18.9](#)). Будем считать, что  $R_n \ll \rho_0, r_0$ , поскольку  $R \sim \{\sqrt{\lambda \rho_0}, \sqrt{\lambda r_0}\}$ , а  $\lambda \ll \rho_0, r_0$ .

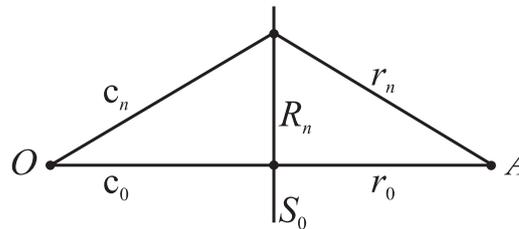


Рис. 18.9

Определим  $R_n$ .  $\rho_n = \sqrt{\rho_0^2 + R_n^2} \approx \rho_0 + \frac{R_n^2}{2\rho_0}$ , поскольку  $R_n \ll \rho_0$ . Соответственно,

$$r_n \approx r_0 + \frac{R_n^2}{2r_0}, \text{ поскольку } R_n \ll r_0.$$

Используем теперь уравнение [\(18.26\)](#)

$$\frac{R_n^2}{2} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) = n \frac{\lambda}{2}. \quad (18.27)$$

Из (18.27) вытекает, что  $R_n^2 \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) = n\lambda$  или

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda\rho_0r_0}{\rho_0 + r_0}}. \quad (18.28)$$

Очевидно, что размеры существенной области зависят от соотношения  $OA$  и  $\lambda$ . Определим  $R_n^{\max}$ . Из (18.28) следует, что  $R_n$  достигает максимума при  $r_0 = \rho_0$ , когда  $S_0$  находится в центре отрезка  $OA$ . При этом

$$R_n^{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{n\lambda R_0}, \quad R_0 = \rho_0 + r_0. \quad (18.29)$$

Форму существенной области, очевидно, характеризует отношение  $R_n^{\max} / R_0$

$$\frac{R_n^{\max}}{R_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n\lambda}{R_0}}. \quad (18.30)$$

Таким образом, чем меньше  $\lambda/R_0$ , тем более вытянутой по форме становится существенная область. При  $\frac{n\lambda}{R_0} \rightarrow 0$  существенная область вырождается в нить  $OA$ ; в таком пределе строго выполняются все предположения и выводы геометрической оптики.

Поскольку поперечные размеры существенной области при  $\lambda/R_0 \ll 1$  малы по сравнению с  $R_0$ , интегрирование по  $S_0$  в формуле (18.23) можно проводить не по всей бесконечной плоскости, а только в области  $S_0$ , ограниченной  $R_n$ . Это приводит к значительным упрощениям формулы (18.23). Действительно, при условии  $R_n \ll R_0$  можно считать: 1)

$\cos \gamma \rightarrow 1$ ; 2)  $1/\rho r \rightarrow 1/\rho_0 r_0$ ; 3)  $(\rho + r) \approx \rho_0 + r_0 + \frac{R^2}{2} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)$ ; соответственно

$$jk(r + \rho) = jk(\rho_0 + r_0) + jk(z^2 + y^2) \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right) / 2, \quad \text{где } z^2 + y^2 = R^2.$$

С учетом перечисленных упрощений (18.23) принимает вид

$$\vec{\Pi}^e(A) = \frac{j\vec{C}}{\lambda\rho_0r_0} \cdot e^{-jk(\rho_0+r_0)} \cdot \iint_{S_0} e^{-j\frac{k}{2}(z^2+y^2)\left(\frac{1+r_0}{\rho_0}\right)} dydz. \quad (18.31)$$

Не следует забывать, что (18.31) применимо только при условии, когда  $R_n \ll R_0$ , т.е. в «коротковолновом» приближении  $\left(\sqrt{\frac{\lambda n}{R_0}} \ll 1\right)$ .

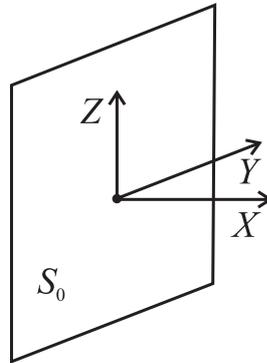


Рис. 18.10

### 18.3. Дифракция электромагнитных волн от края непрозрачного экрана

Рассмотрим следующую схему расположения полубесконечного непрозрачного экрана (рис. 18.11).

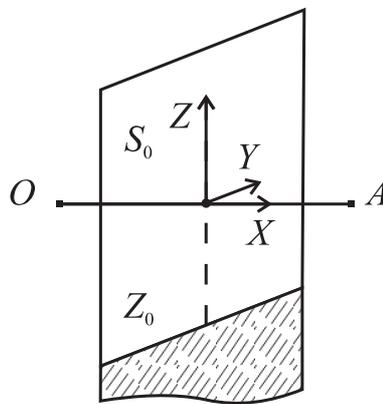


Рис. 18.11

Расстояние  $z_0$  характеризует расстояние от среза экрана до луча OA. Решение задачи проведем на основе (18.31), воспользовавшись методом Кирхгофа.

В основе метода Кирхгофа лежат следующие упрощающие предположения.

1. Поле в области  $S_0$ , не занятой экраном, остается таким же, как если бы экрана не было.
2. Токи на теневой стороне экрана отсутствуют.

Эти условия соответствуют пренебрежению искажениями падающей волны на крае экрана. Подобные условия, вообще говоря, выполняются лишь в случае, когда экран согласован слева (не создает отражений), а токи на его

крае отсутствуют. В практически интересных случаях (например, проводящий экран) эти условия не выполняются и их использование ограничивает область применения метода Кирхгофа только случаями, когда поперечные размеры существенной области, не закрытой экраном, значительно превышают длину волны. Тогда местное возмущение поля на краю экрана несущественно: неискаженное поле занимает значительно большую площадь.

Введем в подынтегральном выражении (18.31) следующую замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} z \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)} &= u, \\ y \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)} &= v \end{aligned} \right\}$$

Соответственно имеем

$$dz = \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)}}; \quad dy = \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)}}.$$

Запишем в новых переменных (18.31)

$$\bar{\Pi}^e(A) = \frac{j\bar{C}}{2} \frac{e^{-jk(\rho_0+r_0)}}{\rho_0+r_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{2}v^2} dv \int_{u_0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{2}u^2} du \quad (18.32)$$

$$\text{Здесь } u_0 = Z_0 \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} \right)}.$$

$$\text{Интеграл } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{2}v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{j}}.$$

Проведем проверку (18.32). Положим  $u_0 \rightarrow -\infty$ , тем самым перейдя к случаю свободного пространства. Тогда  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{2}{j}}$  и из (18.32) мы получаем

$\bar{\Pi}^e(A) = \bar{C} \frac{e^{-jk(\rho_0+r_0)}}{\rho_0+r_0} = \bar{C} \frac{e^{-jkR_0}}{R_0}$ , что точно соответствует выражению  $\bar{\Pi}^e(A)$  в свободном пространстве.

В рассматриваемом случае запишем  $\bar{\Pi}^e(A)$  в виде

$$\bar{\Pi}^e(A) = \bar{C} \frac{e^{-jk(\rho_0+r_0)}}{\rho_0 + r_0} \cdot \dot{F}(u_0), \quad (18.33)$$

где  $\dot{F}(u_0)$  - дифракционный множитель.

$$\begin{aligned} \dot{F}(u_0) &= \sqrt{\frac{j}{2}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{j}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi u^2}{2} du - \int_0^{u_0} \cos \frac{\pi u^2}{2} du - j \left[ \int_0^{\infty} \sin \frac{\pi u^2}{2} du - \int_0^{u_0} \sin \frac{\pi u^2}{2} du \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{j}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - C(u_0) - j \left[ \frac{1}{2} - S(u_0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $C(u_0) = \int_0^{u_0} \cos \frac{\pi u^2}{2} du$ ;  $S(u_0) = \int_0^{u_0} \sin \frac{\pi u^2}{2} du$  - интегралы Френеля.

График модуля  $|\dot{F}(u_0)| = F(u_0)$  приведен на [рис. 18.12](#).

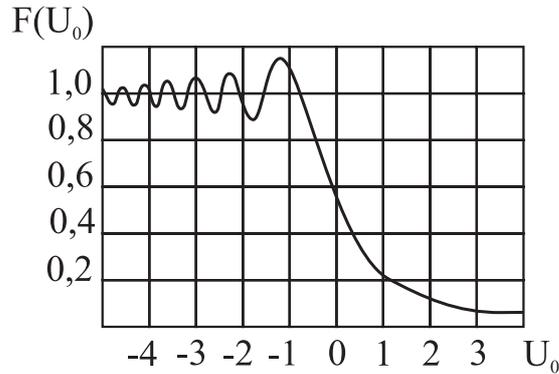


Рис. 18.12

Из анализа приведенного графика следует: 1) в области тени ( $u_0 > 0$ ) поле не исчезает, за счет явления дифракции поле остается конечным при достаточно больших  $u_0$ ; 2) в открытой области  $F(u_0)$  имеет осциллирующий характер, причем при  $u_0 \approx -1,2$   $F(u_0)$  достигает максимального значения ( $F_{\max} = 1,175$ ), т.е.  $\bar{\Pi}^e(A)$  имеет большее значение, чем если бы экрана не было.

Тот и другой вывод хорошо объясняются с точки зрения зон Френеля: в тени часть зон Френеля оказывается не закрытой экраном и за счет вторичных источников в этой не закрытой части существенной области возбуждается поле в точке А; при  $u_0 \sim -1,2$  экран перекрывает зоны таким образом, что «отрицательные» зоны закрыты больше, чем положительные, поэтому результирующее поле в точке А оказывается усиленным. Если бы речь шла о дифракции на круглом отверстии в непрозрачном экране, то при выборе его диаметра равным диаметру первой зоны Френеля, можно было бы перекрыть все высшие зоны, и тогда, как мы знаем,  $\bar{\Pi}^e(A) = \bar{\Pi}_1^e = 2\bar{\Pi}^e$  ( $\bar{\Pi}^e$  - поле в открытом пространстве), т.е.  $F=2$ .

В заключение заметим, что метод Кирхгофа дает заниженные значения для  $\bar{\Pi}^e(A)$  в области тени. Это связано с пренебрежением искажениями поля на крае препятствия и, особенно, с пренебрежением влияния токов, затекаю-

щих на теневую сторону препятствия (особенно, в случае проводящих препятствий). Ошибка может достигать многих порядков.

К настоящему времени предложены более совершенные приближенные методы учета дифракционных полей, из которых следует упомянуть метод дифракционных лучей, в котором учитываются «ползущие» вокруг поверхности препятствия волны, связанные с затеканием токов на теневую сторону (П.Я. Уфимцев «Метод краевых волн в физической теории дифракции». М., Сов. Радио, 1962 г.), а также более сильный метод параболического уравнения, в котором учитывается поперечная диффузия дифракционных лучей (В.А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. АН СССР, 1946 г.).

## ГЛАВА XIX

### ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

#### 19.1. Отражение и прохождение волн при нормальном падении на плоскую границу раздела

Пусть плоская электромагнитная волна, проходящая в среде 1 падает нормально на плоскую границу, разделяющую среду 1 и среду 2 ([рис. 19.1](#)). Среда 1 характеризуется параметрами  $\varepsilon_1, \mu_1$ , среда 2 -  $\varepsilon_2, \mu_2$  (значок «а» у  $\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  здесь и далее опустим для сокращения записи). Непосредственно на границе раздела существуют три вида волн: падающая  $(\vec{E}^0, \vec{H}^0)$ , отраженная  $(\vec{E}^-, \vec{H}^-)$ , проходящая  $(\vec{E}^+, \vec{H}^+)$ . Мы будем предполагать, что как среда 1, так и среда 2 однородны и изотропны, поэтому волны в обеих средах распространяются прямолинейно и нормально к границе, как это изображено на [рис. 19.1](#).

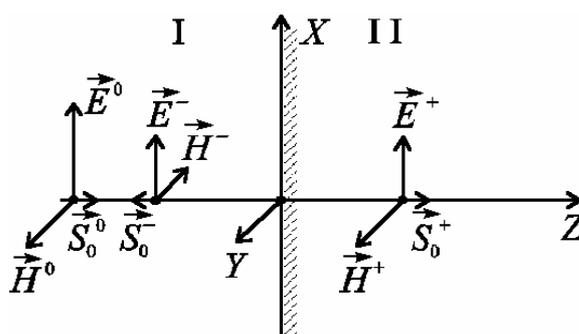


Рис. 19.1

Направления распространения волн определяются векторами  $\vec{S}_0 = \frac{1}{2}[\vec{E}, \vec{H}]$ , поэтому ориентация  $E^-, H^-$  в отраженной волне изменена по отношению к падающей, так что направления  $S_0^0$  и  $S_0^-$  противоположны.

Запишем компоненты трех волн, придерживаясь условной ориентации  $\vec{E}, \vec{H}$ , заданной на [рис. 19.1](#) (действительная относительная ориентация, т.е. знак компонент  $(\vec{E}^-, \vec{H}^-)$  будет определен соотношением  $\varepsilon_1, \mu_1; \varepsilon_2, \mu_2$ ).

1. Падающая волна:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^0 &= \dot{A}^0 \vec{y}_0 e^{-jk_1 z}, & k_1 &= \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \\ \vec{E}^0 &= \dot{A}^0 W_1^0 \vec{x}_0 e^{-jk_1 z}, & W_1^0 &= \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1} \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

2. Отраженная волна:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^- &= -\dot{A}^- \vec{y}_0 e^{jk_1 z}, \\ \vec{E}^- &= \dot{A}^- W_1^0 \vec{x}_0 e^{jk_1 z} \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

3. Проходящая волна:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^+ &= \dot{A}^+ \vec{y}_0 e^{-jk_2 z}, \quad k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}, \\ \vec{E}^+ &= \dot{A}^+ W_2^0 \vec{x}_0 e^{-jk_2 z}, \quad W_2^0 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2} \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

Запишем уравнение связи между компонентными амплитудами трех волн на границе раздела двух сред ( $z = 0$ ). Предположим, что на границе раздела поверхностных токов нет; тогда тангенциальные составляющие как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{H}$  полного (суммарного) поля при переходе границы должны быть непрерывными (см. главу II первой части). В рассматриваемом случае все компоненты  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  являются тангенциальными, и поэтому

$$\left[ \vec{H}^0 + \vec{H}^- \right]_{z=0} = \vec{H}_{z=0}^+, \quad \left[ \vec{E}^0 + \vec{E}^- \right]_{z=0} = \vec{E}_{z=0}^+. \quad (19.4)$$

Подставляя в (19.4) (19.1) ÷ (19.3), имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}^0 - \dot{A}^- &= \dot{A}^+, \\ \left( \dot{A}^0 + \dot{A}^- \right) W_1^0 &= \dot{A}^+ W_2^0 \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

Введем для удобства дальнейших расчетов коэффициент отражения и коэффициент прохождения

$$\rho = \frac{\dot{E}_\tau(0)}{\dot{E}_\tau(0)} = \frac{\dot{A}^-}{\dot{A}^0} - \text{коэффициент отражения,} \quad (19.6)$$

$$\tau = \frac{\dot{E}_\tau(0)}{\dot{E}_\tau(0)} = \frac{\dot{A}^+ W_2^0}{\dot{A}^0 W_1^0} - \text{коэффициент прохождения.}$$

Таким образом, амплитуды отраженной и проходящей волн могут быть выражены как

$$\dot{A}^- = \dot{A}^0 \rho, \quad \dot{A}^+ = \dot{A}^0 \tau \frac{W_1^0}{W_2^0}. \quad (19.7)$$

Подставляя (19.7) в (19.5), получим уравнения для  $\rho$  и  $\tau$ :

$$\left. \begin{aligned} 1 - \rho &= \tau \frac{W_1^0}{W_2^0}, \\ 1 + \rho &= \tau \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

Решая (19.8), находим:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{2W_2^0}{W_2^0 + W_1^0}, \\ \rho &= \frac{W_2^0 - W_1^0}{W_2^0 + W_1^0} \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

Рассмотрим предельные случаи для (19.9), т.е. случаи, когда  $|\rho| = 0$  и  $|\rho| = 1$ .

1. Случай согласования двух сред, т.е.  $|\rho| = 0$ . Из (19.9) следует, что это возможно при условии

$$W_2^0 = W_1^0 \text{ или } \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1}. \quad (19.10)$$

При этом  $\tau = 1$ .

2. Случай полных отражений от границы раздела при нормальном падении, т.е.  $|\rho| = 1$ .

Из анализа формулы для  $\rho$  следует, что  $|\rho| \rightarrow 1$  при:

а)  $\frac{W_2^0}{W_1^0} \rightarrow 0$  ( $\rho = -1$ ) или б)  $\frac{W_1^0}{W_2^0} \rightarrow 0$  ( $\rho = 1$ ).

Условие а) выполняется, когда среда 2 по своим свойствам приближается к идеальному проводнику. Действительно,  $W_2^0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

При этом  $\tau = 0$ , т.е. поле во второй среде отсутствует.

Условие б) соответствует случаю, когда волна распространяется в среде с большой оптической плотностью (например, в диэлектрике с очень большим  $\varepsilon$ ), а среда 2 имеет относительно большое волновое сопротивление. В этом случае получаем, что  $\rho = 1$ , а  $\tau = 2$ . Последнее, однако, не говорит о

том, что поле в среде 2 есть. Действительно, используя формулу (19.7), имеем:  $\dot{A}^+ = \dot{A}^0 \tau \frac{W_1^0}{W_2^0} = \dot{A}^0 2 \cdot \frac{W_1^0}{W_2^0} \rightarrow 0$  при  $\frac{W_1^0}{W_2^0} \rightarrow 0$ .

Тот факт, что  $\tau = 2$  лишь означает, что электрическое поле на границе раздела по амплитуде вдвое превышает амплитуду электрического поля падающей волны ( $\vec{E}(0) = 2\vec{E}^0(0)$ ), магнитное же поле на границе равно нулю ( $\vec{H}(0) = 0$ ).

При  $|\dot{\rho}| = 1$  в области 1 образуется картина чисто стоячего поля: амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей волны.

В общем же случае имеем:

$$\vec{H}_1 = \dot{A}^0 \vec{y}_0 \left( e^{-jk_1 z} - \dot{\rho} e^{jk_1 z} \right) = \dot{A}^0 \vec{y}_0 \left( 1 - \dot{\rho} e^{2jk_1 z} \right) e^{-jk_1 z} = \vec{y}_0 \dot{A}^H(z) e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{E}_1 = \dot{A}^0 \vec{x}_0 W_1^0 \left( 1 + \dot{\rho} e^{2jk_1 z} \right) e^{-jk_1 z} = \vec{x}_0 \dot{A}^E(z) e^{-jk_1 z}.$$

Из приведенных формул видно, что при любом  $\dot{\rho}$  распределение амплитуды электрического поля  $\dot{A}^E(z)$  и распределение амплитуды магнитного поля  $\dot{A}^H(z)$  вдоль  $z$  сдвинуты по фазе на  $\lambda_1/4$ .

В минимуме поле обращается в нуль только при  $|\dot{\rho}| = 1$ ; нули  $E_1(z)$  и  $H_1(z)$  смещены на  $\lambda_1/4$ .

## 19.2. Наклонное падение горизонтально-поляризованной волны на плоскую границу раздела двух сред

Введем следующие предположения.

1. Падающая на границу раздела волна – линейно поляризованная и ее электрический вектор параллелен границе раздела («горизонтальная» поляризация).

2. 1 и 2 среды изотропные и однородные.

Последнее предположение позволяет считать, что плоскость поляризации отраженной и проходящей волн совпадают с плоскостью поляризации падающей, а направления распространения падающей, отраженной и проходящей (преломленной) волн лежат в одной плоскости. На этом основании чертеж, изображающий направления распространения трех волн и ориентацию векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в них, будет иметь вид, показанный на рис. 19.2. Система  $x, y, z$  – расчетная, в ней наиболее просто задается граница раздела сред. В системе  $x_1, y_1, z_1$  наиболее просто описывается распространение падающей волны ( $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ ). Такой же смысл имеет система  $x_2, y_2, z_2$  в отношении отра-

женной волны, а система  $x_3, y_3, z_3$  – в отношении преломленной волны. Указанные системы  $Z_1, Z_2, Z_3$  развернуты по отношению к расчетной в плоскости чертежа (в «плоскости падения») соответственно на угол  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Правила пересчета направляющих векторов развернутых систем координат в расчетной системе состоят в следующем (рис. 19.3):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{0i} &= \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{0i} &= \bar{y}_0 \cdot \cos \varphi_i - \bar{z}_0 \cdot \sin \varphi_i, \\ \bar{z}_{0i} &= \bar{y}_0 \cdot \sin \varphi_i + \bar{z}_0 \cdot \cos \varphi_i, \\ z_i &= y \sin \varphi_i + z \cos \varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (19.11)$$

Запишем поле падающей волны сначала в системе координат  $Z_1$

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^0 &= \dot{A} \bar{y}_{01} e^{-jk_1 z_1}, \\ \vec{E}^0 &= \dot{A} W_1^0 \bar{x}_{01} e^{-jk_1 z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

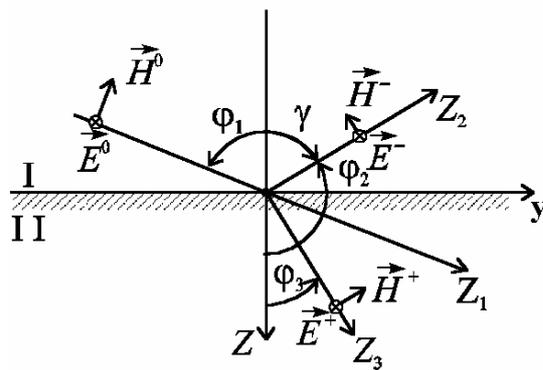


Рис. 19.2

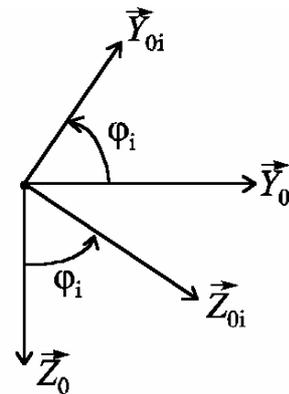


Рис. 19.3

Пользуясь правилами (19.11), перепишем (19.12) в расчетной системе  $Z$

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^0 &= \dot{A} (\bar{y}_0 \cos \varphi_1 - \bar{z}_0 \sin \varphi_1) e^{-jk_1 (y \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}, \\ \vec{E}^0 &= \dot{A} \bar{x}_0 W_1^0 e^{-jk_1 (y \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)} \end{aligned} \right\} \quad (19.13)$$

Аналогичным образом запишем и поля отраженной и проходящей волн в расчетной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^- &= \dot{A}^- (\vec{y}_0 \cos \varphi_2 - \vec{z}_0 \sin \varphi_2) e^{-jk_1(y \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2)}, \\ \vec{E}^- &= \dot{A}^- W_1^0 \vec{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2)}, \\ \vec{H}^+ &= \dot{A}^+ (\vec{y}_0 \cos \varphi_3 - \vec{z}_0 \sin \varphi_3) e^{-jk_2(y \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3)}, \\ \vec{E}^+ &= \dot{A}^+ W_2^0 \vec{x}_0 e^{-jk_2(y \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3)} \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

Граница раздела двух сред определяется условием  $z=0$ . Независимо от формулы граничных условий, эти условия, связывающие три волны на границе раздела, должны выполняться одновременно на всей границе, т.е. одновременно при всех значениях  $y$ . Это означает, что функциональные зависимости всех трех волн от  $y$  должны быть одинаковыми. Из этого условия вытекают следующие уравнения, формулирующие законы Снеллиуса:

$$1) k_1 \sin \varphi_1 = k_1 \sin \varphi_2, \quad (19.15)$$

$$2) k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \varphi_3. \quad (19.16)$$

Уравнение (19.15) имеет бесконечное множество решений из-за периодичности функции  $\sin$ . Выберем решение, соответствующее физическому смыслу задачи. Решение  $\varphi_1 = \varphi_2$  очевидно, не подходит, поскольку отраженная волна распространяется в среде 1, а не в среде 2. Приемлемым, по видимому, будет решение

$$\varphi_1 = \pi - \varphi_2 = \gamma \quad (19.17)$$

Обозначим далее  $\varphi_1 = \varphi$  - угол падения. Тогда (19.17) формулирует первый закон Снеллиуса: угол падения ( $\varphi$ ) равен углу отражения ( $\gamma$ ).

Обозначая  $\varphi_3 = \vartheta$  - угол преломления, из (19.16) получим формулировку второго закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad (19.18)$$

В (19.18) по аналогии с принятыми в оптике терминами обозначено  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}$ , где  $n_1$  - показатель преломления среды 1,  $n_2$  - показатель преломления среды 2.

В соответствии с первым законом Снеллиуса имеем:

$$\cos \varphi_2 = -\cos \gamma = -\cos \varphi \quad (19.19)$$

Это условие учтем в дальнейшем при использовании (19.14).

Воспользуемся теперь граничными условиями на поверхности раздела, предполагая, что поверхностных токов на ней нет. Тогда при переходе границы тангенциальные составляющие  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  должны быть непрерывны. Эти граничные условия можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} H_{yI}/_{z=0} &= H_{yII}/_{z=0}, \\ E_{xI}/_{z=0} &= E_{xII}/_{z=0}. \end{aligned} \right\} \quad (19.20)$$

Перепишем условия (19.20), используя (19.14) и (19.19)

$$\left. \begin{aligned} \left( \dot{A}^0 - \dot{A}^- \right) \cos \varphi &= \dot{A}^+ \cos \vartheta, \\ \left( \dot{A}^0 + \dot{A}^- \right) W_1^0 &= \dot{A}^+ W_2^0. \end{aligned} \right\} \quad (19.21)$$

Введем, как и ранее, коэффициенты отражения и прохождения.

$$\dot{\rho}_r = \frac{E_x^-(0)}{E_x^0(0)} = \frac{\dot{A}^-}{\dot{A}^0}, \quad \dot{\tau}_r = \frac{E_x^+(0)}{E_x^0(0)} = \frac{\dot{A}^+}{\dot{A}^0} \frac{W_2^0}{W_1^0} \quad (19.22)$$

Теперь имеем

$$\dot{A}^- = \dot{A}^0 \dot{\rho}_r; \quad \dot{A}^+ = \dot{A}^0 \dot{\tau}_r \frac{W_1^0}{W_2^0} \quad (19.23)$$

Подставляя (19.23) в уравнения (19.21), получаем следующую систему для определения  $\dot{\rho}_r, \dot{\tau}_r$ :

$$1 - \dot{\rho}_r = \dot{\tau}_r \frac{W_1^0 \cos \vartheta}{W_2^0 \cos \varphi}, \quad 1 + \dot{\rho}_r = \dot{\tau}_r. \quad (19.24)$$

Решая (19.24) получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_r &= \frac{2W_2^0 \cos \varphi}{W_2^0 \cos \varphi + W_1^0 \cos \vartheta}, \\ \dot{\rho}_r &= \frac{W_2^0 \cos \varphi - W_1^0 \cos \vartheta}{W_2^0 \cos \varphi + W_1^0 \cos \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (19.25)$$

Проанализируем полученные формулы для  $\dot{\rho}_r, \dot{\tau}_r$  в одном из наиболее важных в теории распространения волн в случае двух идеальных диэлектриков. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \\ \frac{W_1^0}{W_2^0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}, \\ \cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (19.26)$$

Учитывая (19.26), получаем

$$\rho_r = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi}}. \quad (19.27)$$

Рассмотрим два случая:  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ .

1)  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , т.е. волна падает из менее плотной среды (например, воздушной) на более плотную. Представим  $\dot{\rho}_r = \rho_r e^{-j\Phi_r}$  и проанализируем зависимо-

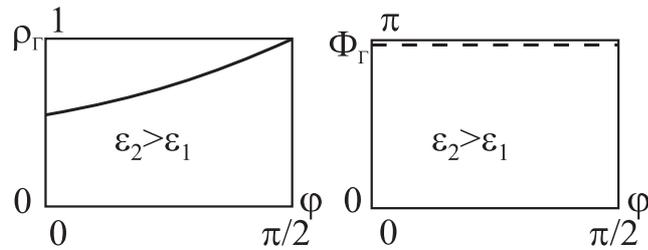


Рис. 19.4

сти  $\rho_r, \Phi_r$  от  $\varphi$ :

а)  $\varphi = 0 \rightarrow \rho_r = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} < 0$ , т.е.  $\rho_r < 1, \Phi_r = 180^\circ$ .

б)  $\varphi \rightarrow 90^\circ, \rho_r \rightarrow -1, \Phi_r = 180^\circ, \rho_r = 1$

Таким образом, зависимости  $\rho_r, \Phi_r$  от  $\varphi$  имеют вид, представленный на [рис. 19.4](#).

2)  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , т.е. волна распространяется внутри более плотной среды.

а)  $\varphi = 0 \rightarrow \rho_r = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} > 0$ , т.е.  $\rho_r < 1, \Phi_r = 0$ .

б)  $\varphi = 90^\circ, \rho_r = -1, \Phi_r = 180^\circ, \rho_r = 1$ .

Очевидно, что существует  $\varphi = \varphi_{\text{кр}}$ , при котором  $|\dot{\rho}|$  впервые становится равным 1 ( $\dot{\rho} = 1$ ). Условием этого, очевидно, является уравнение  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_{\text{кр}} = 0$ , т.е.

$$\sin \varphi_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (19.28)$$

При  $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$  выражение для  $\dot{\rho}_r$  ввиду того, что вторые члены в числите-

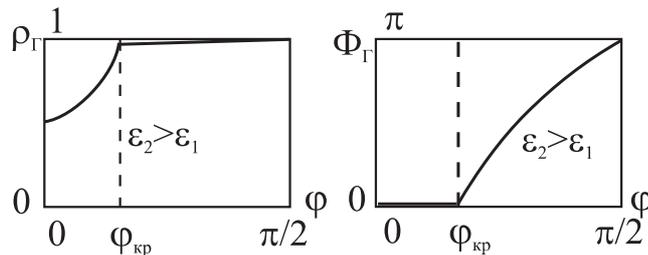


Рис. 19.5

ле и знаменателе оказываются мнимыми, принимает вид:

$$\dot{\rho}_r = \frac{a - jb}{a + jb} = \frac{ce^{-j\alpha}}{ce^{j\alpha}} = 1 \cdot e^{-j2\alpha},$$

$$a = \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi, \quad b = \sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \varphi - \varepsilon_2}.$$

Таким образом, при  $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$   $|\dot{\rho}_r| = 1$ ,  $\Phi_r = 2\alpha$ .

Графики  $\rho_r$ ,  $\Phi_r$  имеют вид, изображенный на [рис. 19.5](#).

### 19.3. Наклонное падение вертикально-поляризованной волны на плоскую границу раздела двух сред

Пусть электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения (т.е. в вертикальной к границе раздела плоскости). Как и в предыдущем случае, будем считать, что среда 1 и среда 2 изотропны и однородны, поэтому плоскость поляризации отраженной и преломленной волн не изменяются по отношению к падающей, а направления распространения всех трех волн лежат в плоскости падения. Построим чертеж, аналогичный [рис. 19.2](#) для рассматриваемого случая ([рис. 19.6](#)).

Как и ранее, углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  определяют поворот вспомогательных систем координат  $Z_1, Z_2, Z_3$  по отношению к расчетной  $Z$ . Правила пересчета направляющих векторов и координат остаются теми же, что и в предыдущем случае, поэтому мы сразу запишем компоненты полей в расчетной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^0 &= \dot{A} \vec{x}_0^0 e^{-jk_1(y \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}, \\ \vec{E}^0 &= -\dot{A} W_1^0 (\vec{y}_0 \cos \varphi_1 - \vec{z}_0 \sin \varphi_1) e^{-jk_1(y \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1)}, \\ \vec{H}^- &= \dot{A} \vec{x}_0^- e^{-jk_1(y \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2)}, \\ \vec{E}^- &= -\dot{A} W_1^0 (\vec{y}_0 \cos \varphi_2 - \vec{z}_0 \sin \varphi_2) e^{-jk_1(y \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2)}, \\ \vec{H}^+ &= \dot{A} \vec{x}_0^+ e^{-jk_2(y \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3)}, \\ \vec{E}^+ &= \dot{A} W_2^0 (\vec{y}_0 \cos \varphi_3 - \vec{z}_0 \sin \varphi_3) e^{-jk_2(y \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3)} \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$

Как и в ранее рассматриваемом случае, необходимым условием для согласования полей на границе раздела ( $z=0$ ) при любом значении  $y$  является:

$$\begin{aligned} k_1 \sin \varphi_1 &= k_2 \sin \varphi_2, \\ k_1 \sin \varphi_1 &= k_2 \sin \varphi_3 \end{aligned} \quad (19.30)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеют место законы Снеллиуса. Обозначим как и ранее  $\varphi_1 = \varphi$  (угол падения),  $\varphi = \pi - \varphi_2 = \gamma$  (угол отра-

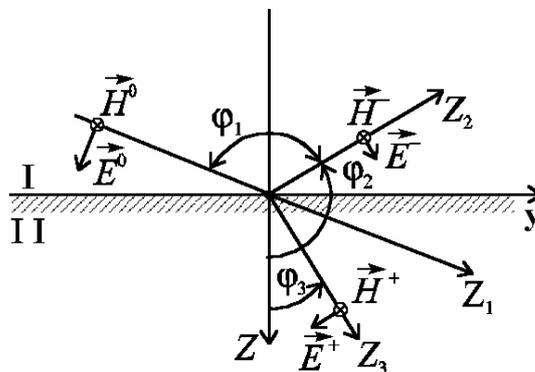


Рис. 19.6

жения) и  $\varphi_3 = \vartheta$  (угол преломления). Учитывая ([19.17](#)) и ([19.18](#)) и используя условие непрерывности  $H_\tau, E_\tau$  при переходе границы ( $z=0$ ), из ([19.29](#)) получим

$$\begin{aligned} \dot{A}^0 + \dot{A}^- &= \dot{A}^+ \quad (H_{xI} = H_{xII}), \\ (\dot{A}^0 - \dot{A}^-)W_1^0 \cos \varphi &= \dot{A}^+ W_2^0 \cos \vartheta \quad (E_{yI} = E_{yII}). \end{aligned} \quad (19.31)$$

Введем коэффициенты отражения и прохождения. Для их определения теперь удобно воспользоваться  $\dot{H}_\tau$ , поскольку вектор  $\vec{H}$  параллелен границе раздела и  $\vec{H} = \vec{x}_0 \dot{H}_x$ . Положим

$$\dot{\rho}_B = \frac{\dot{H}_\tau(0)^-}{\dot{H}_\tau(0)^0} = \frac{\dot{H}_x(0)^-}{\dot{H}_x(0)^0} = \frac{\dot{A}^-}{\dot{A}^0}, \quad (19.32)$$

$$\dot{\tau}_B = \frac{\dot{H}_\tau(0)^+}{\dot{H}_\tau(0)^0} = \frac{\dot{H}_x(0)^+}{\dot{H}_x(0)^0} = \frac{\dot{A}^+}{\dot{A}^0}. \quad (19.33)$$

При таком определении  $\dot{\rho}_B, \dot{\tau}_B$  из (19.31) имеем

$$\left. \begin{aligned} 1 + \dot{\rho}_B &= \dot{\tau}_B, \\ 1 - \dot{\rho}_B &= \dot{\tau}_B \frac{W_2^0 \cos \vartheta}{W_1^0 \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (19.34)$$

Решая (19.34), находим

$$\dot{\tau}_B = \frac{2W_1^0 \cos \varphi}{W_2^0 \cos \vartheta + W_1^0 \cos \varphi}, \quad (19.35)$$

$$\dot{\rho}_B = \frac{W_1^0 \cos \varphi - W_2^0 \cos \vartheta}{W_2^0 \cos \vartheta + W_1^0 \cos \varphi} \quad (19.36)$$

Проанализируем функцию  $\dot{\rho}_B(\varphi)$  в простейшем случае, когда обе среды являются идеальными диэлектриками, т.е.  $\varepsilon_{1,2}'' = 0, \mu_{1,2}'' = 0, \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . В этом случае

$$\rho_B = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \vartheta} = \left( \cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \varphi} \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_2 \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi}}{\varepsilon_2 \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi}} \quad (19.37)$$

Пусть  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , т.е. отражения происходят от оптически более плотной среды. Представим, как и ранее,

$$\varphi \rightarrow 0, \cos \varphi \rightarrow 1, \sin \varphi \rightarrow 0, \rho = \frac{\varepsilon_2 - \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} > 0, \Phi_B = 0,$$

$$\varphi \rightarrow 90^\circ, \cos \varphi \rightarrow 0, \sin \varphi \rightarrow 1, \rho = -1, \rho = 1, \Phi_B = 180^\circ.$$

Отсюда следует, что должен существовать такой угол  $\varphi_0$ , при котором  $\rho = 0$ ; угол  $\varphi_0$  называется углом Брюстера. Из (19.37) находим

$$\varepsilon_2 \cos \varphi_0 - \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_0} = 0. \quad (19.38)$$

Очевидным решением (19.38) является

$$\cos \varphi_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}, \quad \sin \varphi_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad \text{или} \quad \text{tg} \varphi_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (19.39)$$

Напомним, что в случае горизонтальной поляризации углов  $\varphi_0$ , при которых  $\rho = 0$  не существует, т.е. описанное явление характерно только для вертикально поляризованных волн. Физическая сущность этого явления состоит в следующем. Из второго закона Снеллиуса (19.18) находим

$$\sin \vartheta_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sin \varphi_0 = \cos \varphi_0.$$

Таким образом, допустимое направление распространения отраженной волны  $z_2$  и направление распространения преломленной волны  $z_3$  ортогональны (рис. 19.7), т.е.  $\vec{y}_{03} \parallel \vec{z}_{02}$ .

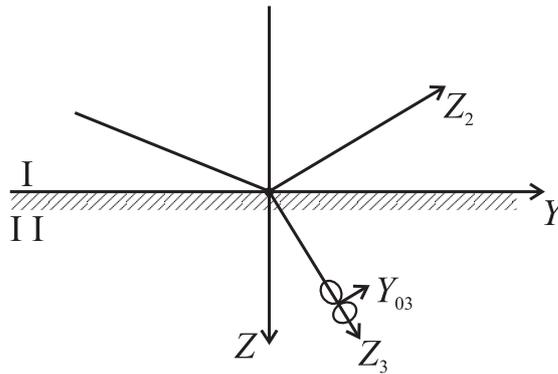


Рис. 19.7

Вектор же  $\vec{E}^+$  ориентирован по  $\vec{y}_{03}$ . В таком же направлении колеблются электрические заряды в среде 2. Эти колеблющиеся заряды представляют собой элементарные электрические диполи, ориентированные по  $\vec{y}_{03}$ . Отраженная волна образуется за счет их суммарного излучения. Однако диаграмма направленности элементарного электрического диполя такова (см. главу 13 из части 4), что вдоль оси диполя (в нашем случае  $\vec{y}_{03}$ ) излучение отсутствует. Поэтому, если  $\vec{y}_{03} \parallel \vec{z}_{02}$ , отраженная волна не возникает. В случае же горизонтальной поляризации  $\vec{E} \parallel \vec{x}_0$  отраженная волна всегда существует. Если на границу раздела диэлектриков падает электромагнитная волна с произвольной поляризацией при  $\varphi = \varphi_0$ , то отраженная волна будет иметь линейную – горизонтальную поляризацию.

Построим теперь ход зависимостей  $\rho_B(\varphi)$  и  $\Phi_B(\varphi)$  (рис. 19.8)

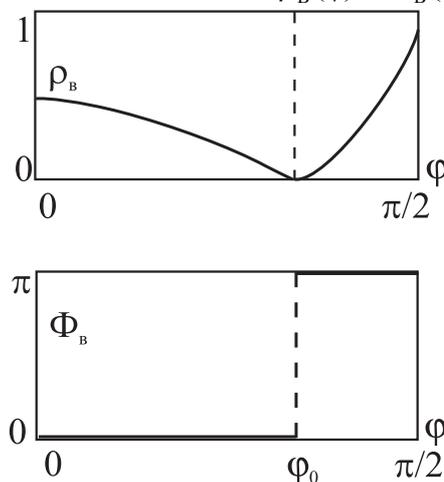


Рис. 19.8

Пусть теперь  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . Тогда зависимости  $\rho_B(\varphi)$  и  $\Phi_B(\varphi)$  изменяются за счет того, что будет существовать  $\varphi = \varphi_{кр}$ , начиная с которого  $\rho_B = 1$ . Как и в предыдущем случае (горизонтальная поляризация)  $\varphi_{кр}$  определяется условием

$$\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \varphi_{\text{кр}}} = 0, \quad \text{т.е. } \sin \varphi_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad \varphi_{\text{кр}} > \varphi_0$$

Графики зависимостей  $\rho_B(\varphi)$  и  $\Phi_B(\varphi)$  приведены на [рис. 19.9](#)

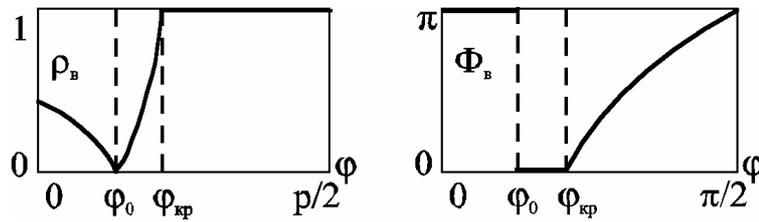


Рис. 19.9

#### 19.4. Отражение плоских волн от плоской границы среды с потерями

Предположим, что в среде 1 потерь нет, а в среде 2 потери имеются. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_1 &= \beta_1, \\ \dot{k}_2 &= \beta_2 - j\alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (19.40)$$

Как и ранее необходимым условием согласования полей на границе раздела является равенство (2-й закон Снеллиуса):

$$k_2 \sin \varphi_3 = k_1 \sin \varphi_1. \quad (19.41)$$

Из (19.41) следует, что  $\varphi_3$  - комплексное число, поскольку  $\dot{k}_2$  - комплексное, а справа в (19.41) стоит действительное число.

Запишем фазовый множитель проходящей волны  $f_3(y, z)$

$$f_3(y, z) = e^{-j\dot{k}_2(y \sin \varphi_3 + z \cos \varphi_3)}. \quad (19.42)$$

Обозначим

$$k_2 \sin \varphi_3 = \beta_y = k_1 \sin \varphi_1, \quad (19.43)$$

$$\dot{k}_2 \cos \varphi_3 = \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \varphi_1} = \beta_z - j\alpha_z. \quad (19.44)$$

Перепишем теперь  $f_3(y, z)$

$$f_3(y, z) = e^{-\alpha_z z} \cdot e^{-j(\beta_y y + \beta_z z)}. \quad (19.45)$$

Теперь очевидно, что фазовый и амплитудный фронты проходящей волны различаются. Действительно, условие равных амплитуд в соответствии с (19.45) выражается как

$$z = \text{const}, \quad (19.46)$$

Условие равных фаз выражается как

$$\beta_y y + \beta_z z = \text{const} \quad (19.47)$$

Амплитудный и фазовый фронт оказываются развернутыми, как это показано на [рис. 19.10](#) (направление распространения  $z_3$  проходящей волны перпендикулярно к фазовому фронту). Нетрудно увидеть, что в системе координат  $z_3$  условие постоянства фазы может быть записано как  $z_3 = \text{const}$  или, используя угол преломления  $\vartheta$ , можно записать

$$z_3 = y \sin \vartheta + z \cos \vartheta = \text{const}. \quad (19.48)$$

Из сравнения (19.48) и (19.47) находим угол преломления  $\vartheta$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\beta_y}{\beta_z} = \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\text{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad (19.49)$$

Уравнение (19.49) выражает закон преломления в случае, когда среда 2 имеет потери.

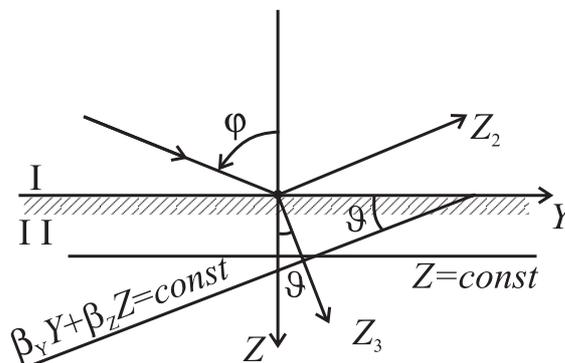


Рис. 19.10

Рассмотрим предельные случаи.

1. Потери в среде 2 пренебрежимо малы, т.е.  $\alpha_2 \ll \beta_2$ . Тогда по формуле (19.49) можно приближенно положить  $k_2 \approx \beta_2$ . В этом случае в (19.43)  $\sin \varphi_3 / \sin \varphi_1 \approx k_1 / \beta_2$ , т.е.  $\varphi_3 = \vartheta$  как и в случае отсутствия потерь.

2. Среда 2 по своим свойствам близка к идеальному проводнику. Тогда

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_\sigma \left( \varepsilon'_2 - j \frac{\sigma}{\omega} \right)} \approx \sqrt{-j \omega \mu_\sigma \sigma} = (1-j) \sqrt{\frac{\omega \mu_\sigma \sigma}{2}}.$$

В этом случае ( $\sigma \rightarrow \infty$ )  $|k_2| \gg k_1$ , и из формулы (19.49) следует, что  $\text{tg} \vartheta \rightarrow 0$ . Таким образом, в среде с очень большой проводимостью угол преломления  $\vartheta = 0$  всегда независимо от  $\varphi$ . Это означает, что при любых углах падения  $\varphi$  проходящая волна в среде 2 распространяется строго по нормали к границе раздела. Этим обстоятельством можно воспользоваться для формулировки приближенных граничных условий на поверхности неидеального проводника (приближенность этих условий состоит в том, что  $\text{tg} \vartheta$  приближенно равен нулю, если  $\sigma \neq \infty$ ). Плоская волна в среде 2 распространяется нормально к границе раздела (рис. 19.11) и поэтому оба вектора  $\vec{E}^+$  и  $\vec{H}^+$  на границе тангенциальны; отношение же  $\frac{\dot{E}^+}{\dot{H}^+} = \dot{W}_\sigma^0$ . Используя это, можно записать

$$\frac{\dot{E}}{z=0} = \dot{W}_\sigma^0 \left[ \dot{\vec{H}}, \vec{n}_0 \right] = -\dot{W}_\sigma^0 \left[ \dot{\vec{H}}, \vec{n}_0 \right] /_{z=0}. \quad (19.50)$$

Условие (19.50) носит название приближенного граничного условия Щукина-Леонтовича. Это условие широко используется в задачах электродинамики; оно, в частности использовалось нами в 1 части курса при расчете затухания в волноводах и при расчете добротности резонаторов.

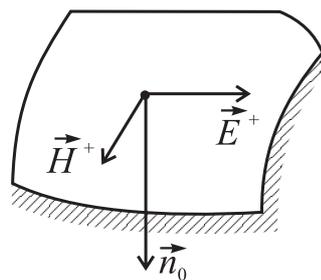


Рис. 19.11

намики; оно, в частности использовалось нами в 1 части курса при расчете затухания в волноводах и при расчете добротности резонаторов.

Обратим внимание на характер затухания проходящей волны в среде 2 при больших  $\sigma$

$$\alpha = -J_m \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi} \approx -J_m k_2 = -J_m \left[ (1-j) \sqrt{\frac{\omega \mu_\sigma \sigma}{2}} \right] = \sqrt{\pi \mu_\sigma \sigma} f.$$

Расстояние, на котором поле в среде 2 уменьшается в  $e$  раз по сравнению со значением его на границе раздела, называется глубиной скин-слоя  $\delta^0$ . Очевидно,  $A^+(\delta^0)/A^+(0) = e^{-\alpha\delta^0} = e^{-1}$ , откуда следует

$$\delta^0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = \Delta \cdot f^{-1/2} \quad [\text{Гц}].$$

Причем  $\Delta=62$  мм для серебра,  $\Delta=66$  мм для меди,  $\Delta=127$  мм для латуни.

## ГЛАВА XX

### ВЛИЯНИЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

#### 20.1. Характеристики направленности реальных излучателей в свободном пространстве

Как было показано в [главе XIII](#) вектор Умова-Пойнтинга (плотность потока энергии электромагнитного поля) для элементарного электрического излучателя выражается следующим образом:

$$\vec{S}_0 = \vec{r}_0 \frac{\text{Im}^2 \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 W^0}{8r^2} \sin^2 \theta \quad (20.1)$$

Из выражения ([20.1](#)) видно, что излучение даже элементарного излучателя не изотропно: плотность потока излучаемой энергии максимальна в экваториальной плоскости ( $\theta = 90^\circ$ ) и отсутствует в направлении оси излучателя ( $\theta = 0^\circ$ ). Для характеристики направленности излучателя введем понятие о **диаграмме направленности** излучателя, определив ее с помощью следующей угловой функции:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{E_m(\theta, \varphi)}{E_{m \max}} \Big|_{r=\text{const}}, \text{ где } r \text{ — расстояние от излучателя.} \quad (20.2)$$

Функция  $F(\theta, \varphi)$  является характеристикой направленности действия любого излучателя (антенны).

Для сравнения различных по направленности действия излучателей введем понятие об изотропном излучателе, который излучает по всем направлениям одинаково. Для такого излучателя  $S_{0r} = S_0^0 \neq f(\theta, \varphi)$ . Рассчитаем полную мощность излучения такого излучателя, выбрав для этого сферу радиуса  $r$ , окружающую излучатель

$$P_\Sigma = S_0^0 4\pi r^2 \quad (20.3)$$

Тогда

$$S_0^0 = P_\Sigma / 4\pi r^2 \quad (20.4)$$

С другой стороны

$$S_0^0 = \frac{1}{2} E_m^0 H_m^0 = \frac{E_m^{0^2}}{2W^0} = \frac{E_m^{0^2}}{240\pi} \quad (20.5)$$

Из сравнения (20.4) и (20.5) следует, что напряженность электрического поля изотропного излучателя  $E_m^0$  выражается через мощность излучения  $P_\Sigma$  как

$$E_m^0 = \sqrt{60P_\Sigma} / r \quad (20.6)$$

Используя выражение (20.6) для  $E_m^0$ , введем **коэффициент направленного действия** (КНД) реального излучателя с той же мощностью излучения  $P_\Sigma$  следующим образом:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{E_m^2(\theta, \varphi)}{E_m^{02}} \Bigg|_{\substack{r=const \\ P_\Sigma = const}} \quad (20.7)$$

Представим  $D(\theta, \varphi)$  в виде

$$D(\theta, \varphi) = \frac{E_m^2(\theta, \varphi)}{E_{m \max}^2} \cdot \frac{E_{m \max}^2}{E_m^{02}} = F^2(\theta, \varphi) \cdot D_m \quad (20.8)$$

Из (20.8) с учетом (20.6) следует

$$E_m(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_m}}{r} F(\theta, \varphi) \quad (20.9)$$

В частном случае, для элементарного излучателя  $F(\theta, \varphi) = \sin \theta$

$$D_m = 3/2, \quad E_m = \frac{\sqrt{90P_\Sigma}}{r} \sin \theta$$

Наряду с КНД используется также и другая характеристика антенн – коэффициент усиления (КУ)  $G$ . Если подводимая к антенне мощность от генератора равна  $P_\Gamma$ , а мощность излучения антенны  $P_\Sigma$ , то КПД антенны

$$\eta = P_\Sigma / P_\Gamma < 1 \text{ и } E_m = \frac{\sqrt{60P_\Gamma \eta D(\theta, \varphi)}}{r}.$$

Величина  $G = \eta \cdot D = G_m \cdot F^2(\theta, \varphi)$  называется коэффициентом усиления антенны. Напряженность поля излучателя  $E_m$  при использовании  $G_m$  может быть определена как

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_\Gamma G_m}}{r} F(\theta, \varphi) \quad (20.10)$$

Этой формулой мы и будем пользоваться в дальнейшем, обозначая  $P_\Gamma = P_0$ .

## 20.2. Напряженность поля излучателя, поднятого над плоской и однородной поверхностью Земли на высоту $h_1$

Для определенности будем иметь в виду вертикальный элементарный электрический излучатель и рассмотрим схему расположения излучателя и приемника, изображенную на [рис. 20.1](#). Волна от источника (O) к приемнику (A) распространяется двумя путями –  $r_1$  и  $r_2$ . В последнем случае волна отражается в области В от плоской земной поверхности. Направление на приемник по пути  $r_1$  определяется углом  $\theta_1$ , по пути  $r_2$  –  $\theta_2$ . Высоты подъема антенн передатчика и приемника соответственно  $h_1$  и  $h_2$ . Распространение волны по пути  $r_2$  можно условно представить, как распространение по прямолинейному пути из точки  $O_1$  (разумеется, учитывается коэффициент отражения в области В, а свойства среды предполагается теми же, что над поверхностью земли).

Для расчета интерференционного поля в точке А введем следующие предположения:  $h_1 \ll r_1$ ,  $h_1 \ll r_2$ . Тогда  $r_1 \approx r_2$ ,  $r_1 \parallel r_2$  ([рис. 20.2](#)). Соответственно

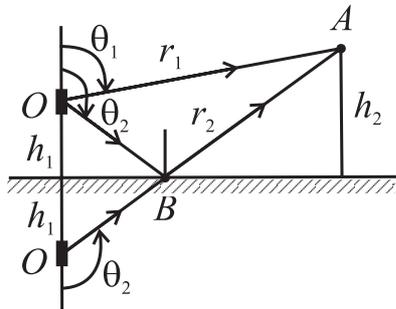


Рис. 20.1

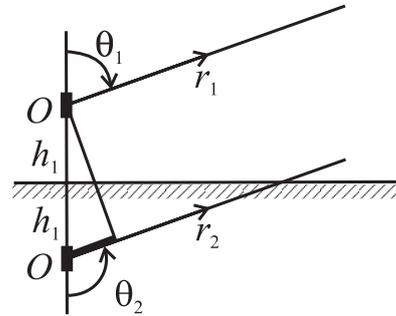


Рис. 20.2

$$\theta_2 \cong 180^\circ - \theta_1, \quad r_2 = r_1 + 2h_1 \cos \theta \quad (\theta = \theta_1) \quad (20.11)$$

Учитывая эти упрощения, запишем поле в точке А

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2, \quad \dot{E}_1 = \dot{E}_{m1} e^{-jk r_1}, \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_{m2} \rho e^{-jk r_2} \quad (20.12)$$

Здесь  $\rho = \rho e^{-j\Phi}$  - коэффициент отражения в точке В. Запишем  $\dot{E}_1, \dot{E}_2$  через мощность генератора  $P_0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r_1} F(\theta) e^{-jk r_1} e^{j\omega t}, \\ \dot{E}_2 &= \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r_2} F(180^\circ - \theta) \rho e^{-j\Phi} e^{-jk r_2} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Используя (20.11) и предполагая, что  $F(\theta) = F(180^\circ - \theta)$ , получим ( $r_2 \approx r_1 = r$ )

$$\dot{E} = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} e^{j(\omega t - kr)} \left( 1 + \rho e^{-j(2h_1 k \cos \theta + \Phi)} \right) F(\theta) \quad (20.14)$$

Запишем теперь модуль комплексной амплитуды

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) \left[ 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2h_1 k \cos \theta + \Phi) \right]^{1/2}. \quad (20.15)$$

Формула (20.15) является основой для дальнейшего анализа влияния отражений от земной поверхности на диаграмму направленности излучателей. В случае горизонтального вибратора в формуле (20.15) следует угол  $\theta$  заменить на угол  $\varphi$ .

Таким образом, как следует из сравнения формул (20.10) и (20.15), за счет отражений от земной поверхности в выражении  $E_m$  появляется интерференционный множитель  $I(\theta) = \left[ 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2h_1 k \cos \theta + \Phi) \right]^{1/2}$ .

### 20.3. Поле вертикального вибратора над плоской отражающей поверхностью

Пусть свойства среды над отражающей поверхностью определяются как  $\varepsilon_1, \mu_1$ , свойства среды под отражающей поверхностью -  $\varepsilon_2, \mu_2$ . Соответ-

$$\text{венно } k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}, W_1^0 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, W_2^0 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}.$$

Коэффициент отражения  $\rho_B$  для вертикально поляризованной волны выражается следующим образом:

$$\rho_B = \frac{W_1^0 \cos \theta - W_2^0 \cos \vartheta}{W_1^0 \cos \theta + W_2^0 \cos \vartheta} \quad (20.16)$$

Здесь  $\vartheta$  - угол преломления. Используя второй закон Снеллиуса, исключим  $\cos \vartheta$

$$\cos \vartheta = \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \theta} \quad (20.17)$$

Подставляя (20.17) в (20.16), получим

$$\rho_B = \frac{k_2 W_1^0 \cos \theta - W_2^0 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta}}{k_2 W_1^0 \cos \theta + W_2^0 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta}}$$

Рассмотрим два предельных случая, представляющих практический интерес.

1. Отражение происходит от границы среды, которая может быть охарактеризована как проводник (ДВ, СВ над сушей и морем, КВ над морем). В этом случае  $W_2^0 \rightarrow 0$ ,  $\rho_B = 1$ ,  $\Phi_B = 0$ . Соответственно

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) \sqrt{2[1 + \cos(2h_1 k \cos \theta)]} = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) 2 \cos(h_1 k \cos \theta).$$

В отличие от поля в свободном пространстве здесь появляется интерференционный множитель  $I(\theta) = 2 \cos(h_1 k \cos \theta)$ . Теперь диаграмма направленности излучателя изменяется:  $F_1(\theta) = F(\theta) \cdot I(\theta)$ .

Проанализируем функцию  $I(\theta)$ . Нули этой функции определяются условием

$$h_1 k_1 \cos \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Таким образом,

$$\cos \theta_0 = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Соответственно максимумы  $|I(\theta)|$  определяются условием

$$\cos \theta_{\max} = \frac{n}{2h_1} \cdot \lambda. \quad (20.18)$$

В направлениях  $\theta = \theta_0$  излучение отсутствует, в направлениях  $\theta = \theta_{\max}$  напряженность поля оказывается вдвое большей, чем в свободном пространстве ( $|I(\theta)| = 2$ ). Диаграмма направленности элементарного излучателя при  $h_1/\lambda = 3$  показана на [рис. 20.3](#). Число лепестков диаграммы направленности  $N$  легко определить, исходя из формулы (20.18)

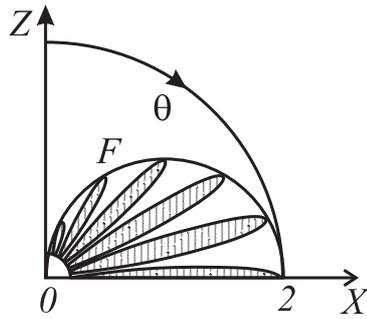


Рис. 20.3

$$N = n_{\max} + 1, \quad n_{\max} \leq \frac{2h_1}{\lambda}.$$

Таким образом, чем больше относительная высота подъема излучателя  $h_1/\lambda$ , тем больше интерференционных лепестков имеет диаграмма направленности.

2. По своим свойствам отражающая среда (земля) близка к диэлектрику, т.е.  $\varepsilon_2' \gg \sigma_2/\omega$  (КВ, УКВ над сушей). В этом случае  $\rho_B = f(\theta)$ . Напомним характер этой зависимости ([рис.20.4](#) – идеальный диэлектрик, [рис. 20.5](#) – диэлектрик с потерями  $\rho_B = \rho_B e^{-j\Phi_B}$ ).

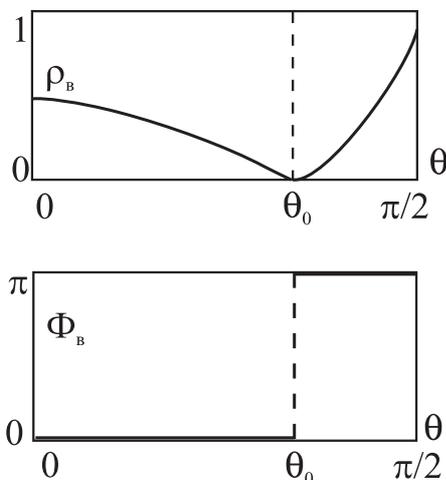


Рис. 20.4

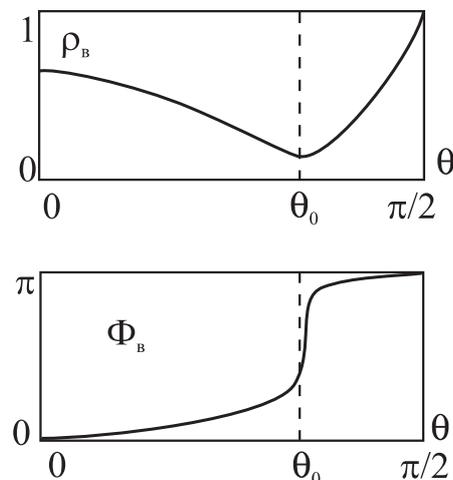


Рис. 20.5

Здесь  $\theta_0$  - угол Брюстера. Как следует из приведенных зависимостей  $\rho_B, \rho_B = 1$  достигается только при  $\theta \rightarrow 90^\circ$ , т.е. только для скользких лучей. При  $\theta > \theta_0$   $\Phi_B = \pi$ , при  $\theta < \theta_0$   $\Phi_B = 0$  для идеальной отражающей поверхности (в отсутствии потерь). Поэтому рассмотрим отдельно случаи  $\theta > \theta_0$  и  $\theta < \theta_0$

- 1)  $\theta > \theta_0, \Phi_B \approx \pi, \rho_B \leq 1,$

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) \sqrt{1 + \rho_B^2 - 2\rho_B \cos(2h_1 k_1 \cos \theta)},$$

$$I(\theta) = \sqrt{1 + \rho_B^2 - 2\rho_B \cos(2h_1 k_1 \cos \theta)}$$

Проанализируем положения минимумов и максимумов интерференционного множителя  $I(\theta)$ .

$$I_{\max} \text{ соответствует } \cos(2h_1 k_1 \cos \theta_{\max}) = -1, \text{ т.е. } \cos \theta_{\max} = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1}.$$

Соответственно направления минимального излучения находятся из условия

$$\cos \theta_{\min} = \frac{n}{2} \cdot \frac{\lambda}{h_1}.$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} E_m^{\max} &= \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta_{\max}) [1 + \rho_B(\theta_{\max})] \\ E_m^{\min} &= \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta_{\min}) [1 - \rho_B(\theta_{\min})] \end{aligned} \right\} \quad (20.19)$$

Заметим, что для  $n = 0$ ,  $\theta_{\min} = \pi/2$  и  $\rho_B(\theta_{\min}) = 1$  и, следовательно,  $E_m^{\min} = 0$ .

2)  $\theta < \theta_0$ ,  $\Phi_B \approx 0$ ,  $\rho_B < 1$ ,

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) \sqrt{1 + \rho_B^2 + 2\rho_B \cos(2h_1 k_1 \cos \theta)}.$$

Соответственно

$$\cos \theta_{\max} = \frac{n}{2} \cdot \frac{\lambda}{h_1}, \quad \cos \theta_{\min} = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1}.$$

т.е. эти условия по сравнению с предыдущими противоположны.

Поля  $E_m^{\min}$  и  $E_m^{\max}$  описываются теми же формулами (20.19). Типичная диаграмма направленности вертикального диполя для рассматриваемого случая

$\left( \varepsilon_2^1 \gg \frac{\sigma_2}{\omega}, \varepsilon_1' < \varepsilon_2' \right)$  приведена на [рис. 20.6](#).

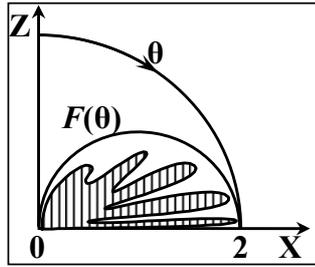


Рис. 20.6

#### 20.4. Поле горизонтального вибратора, поднятого над плоской поверхностью земли на высоту $h_1$

В рассматриваемом случае поле излучателя рассматривается в экваториальной плоскости и поэтому в расчетных формулах следует заменить  $\theta$  на  $\varphi$ . Напомним одновременно, что излучение элементарного электрического излучателя в экваториальной плоскости изотропно, т.е.  $E_m \neq f(\varphi)$  и  $F(\varphi)=1$ . Таким образом, в рассматриваемом случае

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} \sqrt{1 + \rho_r^2 + 2\rho_r \cos(2h_1 k_1 \cos \varphi + \Phi_r)}.$$

Коэффициент отражения для горизонтально поляризованных волн, как показано в теме 4, рассчитывается следующим образом:

$$\rho_r = \rho_r e^{-j\Phi_r} = \frac{W_2^0 \cos \varphi - W_1^0 \cos \vartheta}{W_2^0 \cos \varphi + W_1^0 \cos \vartheta} = \frac{k_2 W_2^0 \cos \varphi - W_1^0 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}{k_2 W_2^0 \cos \varphi + W_1^0 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Рассмотрим те же предельные случаи, что и в предыдущем разделе.

1. Отражающая среда близка по своим свойствам к проводнику ( $\varepsilon_2' \ll \frac{\sigma_2}{\omega}$ ). В этом случае  $\frac{W_2^0}{W_1^0} \rightarrow 0$  и  $\rho_r = -1$ , т.е.  $\rho_r = 1$ ,  $\Phi_r = \pi$ . Соответственно

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} 2 \sin(h_1 k_1 \cos \varphi).$$

Направления максимального излучения,  $\varphi_{\max}$  находятся из условия

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Направления, в которых излучение отсутствует, определяются как

$$\cos \varphi_{\min} = \frac{n}{2} \cdot \frac{\lambda}{h_1}.$$

Диаграмма направленности излучателя в рассматриваемом случае показана на [рис. 20.7](#). Число лепестков диаграммы направленности определяется как

$$N = n_{\max} + 1 \leq \left( \frac{2h_1}{\lambda} + \frac{1}{2} \right).$$

На [рис. 20.7](#) изображен случай, когда  $h_1/\lambda = 2,3$ .

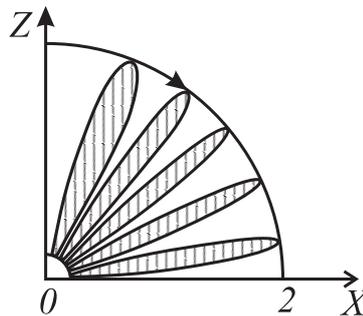


Рис. 20.7

2. Отражения происходят от поверхности среды, близкой по своим свойствам к идеальному диэлектрику. В этом случае графики зависимостей  $\rho_r(\varphi)$  и  $\Phi_r(\varphi)$  имеют вид, изображенный на [рис. 20.8](#). В предельном случае, ко-

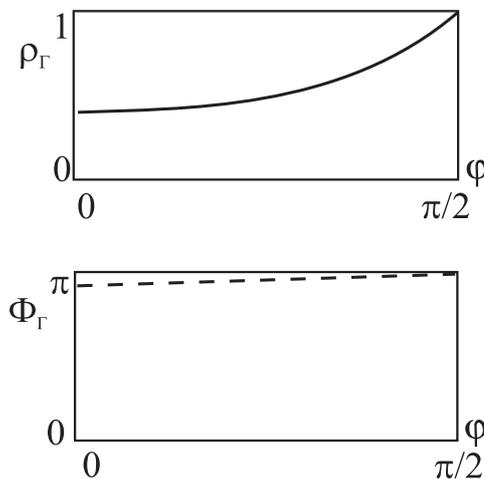


Рис. 20.8

гда  $\sigma_2/\varepsilon'_2\omega \rightarrow 0$ ,  $\Phi_r = \pi$ . Поэтому

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} \sqrt{1 + \rho_r^2 - 2\rho_r \cos(2h_1 k_1 \cos \varphi)}.$$

Направления минимального излучения определяются как

$$\cos \varphi_{\min} = \frac{n}{2} \cdot \frac{\lambda}{h_1}, \quad E_m^{\min} = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} [1 - \rho_r(\varphi_{\min})].$$

Направления максимального излучения определяются следующим образом:

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{h_1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad E_m^{\max} = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} [1 + \rho_r(\varphi_{\max})].$$

При  $n = 0$   $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2}$  и  $\rho_r = 1$ , поэтому  $E_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Типичная диаграмма направленности в рассматриваемом случае приве-

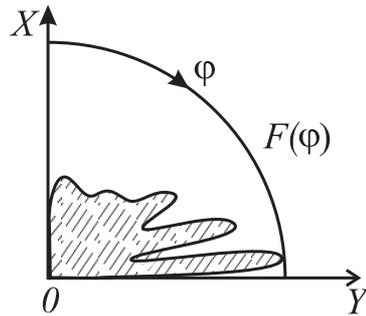


Рис. 20.9

дена на [рис. 20.9](#). В отличие от случая вертикального вибратора возможно излучение в вертикальном направлении.

## 20.5. Распространение радиоволн над неоднородной и негладкой отражающей поверхностью

Свойства отражающей поверхности на протяжении радиотрассы (в пространстве между передатчиком и приемником) обычно не остаются одинаковыми, т.е. отражающая поверхность обычно неоднородна, и поэтому возникает проблема определения  $\dot{\rho}_\beta$ ,  $\dot{\rho}_r$  в интерференционных формулах типа (19.25), (19.36). Заранее очевидно, что при отражении играют роль свойства ограниченного участка отражающей поверхности, границы которого определяются пересечением эллипсоида существенной области и отражающей

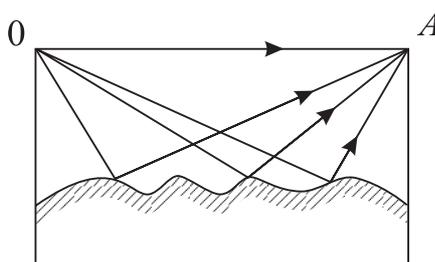


Рис. 20.11

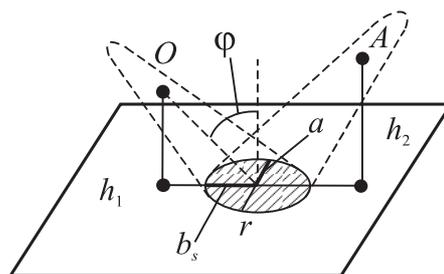


Рис. 20.10

поверхности (рис. 20.10). Этот участок имеет вид вытянутого в направлении радиотрассы эллипса с поперечными размерами (рис. 20.10).

$$a_s \cong R_n = \frac{1}{2}(n\lambda r)^{\frac{1}{2}},$$

$R_n$  - диаметр существенной области,

$$b_s = \frac{a_s}{\cos \varphi}.$$

В КВ диапазоне существенная область при отражении обычно в поперечнике занимает десятки метров, в продольном направлении – десятки километров ( $h_1 \approx h_2$ ). На таком протяжении свойства отражающей поверхности могут меняться. Обычно используется среднее значение коэффициента отражения  $\bar{\rho}$  по существенной области. Значение  $\bar{\rho}$  может быть определено

экспериментально при изменении  $h_1$  или  $h_2$  с использованием формул типа (20.19):

$$\frac{E_m^{\min}}{E_m^{\max}} = \frac{1 - \bar{\rho}}{1 + \bar{\rho}}; \quad \bar{\rho} = \frac{1 - E_m^{\min} / E_m^{\max}}{1 + E_m^{\min} / E_m^{\max}}.$$

При отражении существенны не только свойства отражающей среды, но форма ее границы. В случае, когда поверхность негладкая, ее наклон по отношению к направлению на излучатель изменяется вдоль трассы, что может вызвать многолучевое отражение в сторону приемной антенны (рис 20.11). Это, конечно, имеет место только в том случае, когда характерные размеры неоднородности рельефа отражающей поверхности значительно превосходят рабочую длину волны. Только тогда возникает многолучевое отражение.

Если неровности отражающей поверхности не очень велики по сравнению с длиной волны электромагнитного поля, то при некоторых условиях ими можно пренебречь. Эти условия формулируются известным критерием Релея. Рис 20.12 иллюстрирует суть этого критерия.

Пусть неровность имеет высоту  $h$  над отражающей «средней» плоскостью. И

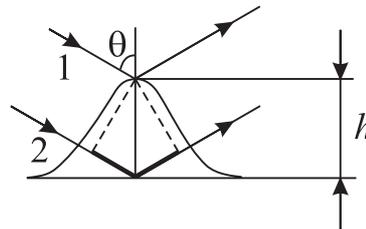


Рис. 20.12

пусть плоская волна падает на эту систему под углом  $\theta$ . Луч 1 отражается от вершины неровности, луч 2 – от «средней» плоскости. Разность их хода в соответствии с чертежом (рис 20.12).  $\Delta r = r_2 - r_1 = 2h \cos \theta$ , Фазовое запаздывание луча 2 относительно луча 1, тогда составляет  $\Delta \varphi = 2kh \cos \theta$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ . Это запаздывание несущественно, если  $\Delta \varphi < \pi/4$ .

Это условие приводит к следующему критерию (критерию Релея):

$$h < \frac{\lambda}{16 \cos \theta}$$

Поскольку в знаменателе справа стоит  $\cos \theta$ , то очевидно, что для скользких лучей ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ) критерий Релея выполняется для весьма больших  $h/\lambda$ . А этот случай, как указывалось выше, как раз и характерен для наземных радиотрасс, когда  $h_1 \sim h_2$ .

## 20.6. Формула Введенского

Рассмотрим случай, когда  $\varphi(\theta)$  близок к  $90^\circ$ . В этом случае, если свойства отражающей поверхности соответствуют в данном диапазоне диэлектрику,  $\rho_\beta \rightarrow 1$ ,  $\Phi_\beta \Rightarrow \pi$ ,  $\rho_r \rightarrow 1$ ,  $\Phi_r \rightarrow \pi$ , причем для горизонтального вибратора эти приближения справедливы в большем диапазоне углов падения, чем для вертикального (см. [рис. 19.4](#) и [19.8](#)). Общая интерференционная формула ([20.15](#)) в этом случае имеет вид:

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) 2 \sin(h_1 k_1 \cos \theta). \quad (20.20)$$

Напомним, что  $2h_1 \cos \theta = r_2 - r_1$  - разность хода прямого и отраженного лучей. Построим следующую схему вычисления  $r_2 - r_1$  ([рис 20.13](#)). Из прямоугольного треугольника АОВ находим  $r_1$ :

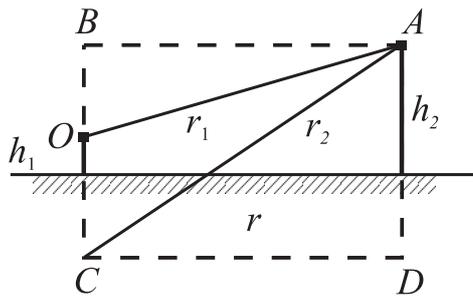


Рис. 20.13

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (h_1 \pm h_2)^2} \approx r \left[ 1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{2r^2} \right]. \quad (20.21)$$

В ([20.21](#)) учтено, что  $h_1 \ll r$ , а также принято новое условие  $h_2 \ll r$ , отражающее то факт, что  $\theta(\varphi) \rightarrow 90^\circ$  и, следовательно,  $h_2 \sim h_1$ .

Из треугольника АСД находим  $r_2$ :

$$r_2 \approx r \left[ 1 + \frac{(h_2 + h_1)^2}{2r^2} \right].$$

Таким образом,

$$\frac{r_2 - r_1}{2} = h_1 \cos \theta \cong \frac{h_1 h_2}{r}.$$

Положим далее, что

$$k_1 \frac{h_1 h_2}{r} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{h_1 h_2}{r} \ll \frac{\pi}{9}$$

и, следовательно,

$$\sin(h_1 k_1 \cos \theta) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{h_1 h_2}{r}\right) \approx \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda_1 r}. \quad (20.22)$$

Подставляя (20.22) в (20.20), получаем

$$E = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{\lambda_1 r^2} 4\pi h_1 h_2. \quad (20.23)$$

Выражение (20.23) и представляет собой формулу Введенского. Эта формула отличается простотой, однако не следует забывать, что она справедлива только в случае  $\varphi, \theta \rightarrow 90^\circ$ ,  $h_1 h_2 \ll r_1$ . когда  $|\rho_{\beta,r}| > 0,95$ ,  $\Phi_{\beta,r} > 175^\circ$  и когда  $\lambda r \gg h_1 h_2$ .

## 20.7. Учет сферичности земной поверхности

До сих пор мы пользовались предположение о том, что отражающая поверхность плоская. При распространении волн вблизи земной поверхности на достаточно больших расстояниях приходится учитывать сферичность земной поверхности и вносить соответствующую коррекцию в используемые формулы.

Определим вначале максимальное распространение прямой видимости для заданных высот антенн  $h_1$  и  $h_2$  (рис. 20.14). Треугольники ОСВ и АСВ –

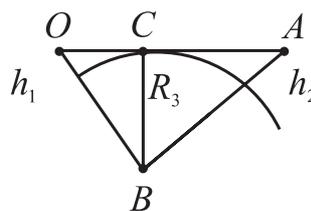


Рис. 20.14

прямоугольные, поскольку в точке С луч ОА касается земной поверхности. Будем считать, что высоты приемной и передающей антенн  $h_1, h_2 \ll R_3$  ( $R_3$  – радиус земли).

$$\begin{aligned} \text{Тогда можно записать: } OC &= \sqrt{(R_3 + h_1)^2 - R_3^2} \approx \sqrt{2R_3 h_1}, \\ CA &= \sqrt{(R_3 + h_2)^2 - R_3^2} \approx \sqrt{2R_3 h_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное расстояние прямой видимости определяется как

$$r_0 = OC + CA = \sqrt{2R}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$

Учитывая, что  $R_3 = 6370$  км, получаем

$$r_0 [\text{км}] = 3,57(\sqrt{h_1 [M]} + \sqrt{h_2 [M]}).$$

Рассмотрим далее случаи, когда  $r < r_0$ . В этих случаях с достаточной степенью точности можно считать, что отражения происходят от плоской поверхности (в пределах существенной при отражении области поверхность можно считать плоской: [рис. 20.15](#)). Если определить приведенные высоты

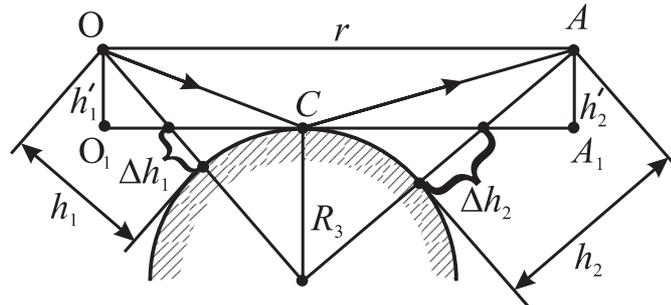


Рис. 20.15

антенны  $h'_1$  и  $h'_2$ , то можно использовать все полученные ранее формулы, заменяя в них  $h_1$  на  $h'_1$ ,  $h_2$  – на  $h'_2$ . Определим  $h'_1$  и  $h'_2$ . При этом будем считать, что  $h_1, h_2 \ll R_3$ ,  $r < r_0$  и угловое расхождение между  $h_1$  и  $h_2$  пренебрежимо мало, т.е.  $h_1 \sim // h_2$ . Тогда  $h'_1 \approx h_1 - \Delta h_1$ ,  $h'_2 \approx h_2 - \Delta h_2$ . Причем

$$\Delta h_1 \approx \frac{(O_1C)^2}{2R_3}, \quad \Delta h_2 \approx \frac{(CA_1)^2}{2R_3}.$$

При определении  $O_1C$  и  $CA_1$  обычно рассматриваются два предельных случая.

1.  $r \ll r_0$ ; это случай, приближающийся к плоской задаче ([рис. 20.16](#)). Из

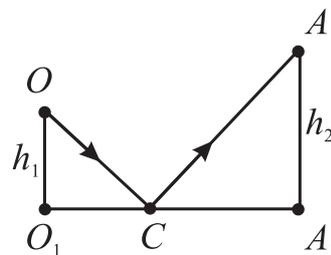


Рис. 20.16

геометрической задачи находим

$$\frac{O_1C}{CA_1} \cong \frac{h_1}{h_2}, \quad O_1C + CA_1 = r$$

Таким образом, в этом случае

$$O_1C \cong r \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad CA_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2}. \quad (20.24)$$

2.  $r \approx r_0 \approx \sqrt{2R_3}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$ . Тогда  $O_1C \approx \sqrt{2R_3 h_1}$ ,  $CA_1 \approx \sqrt{2R_3 h_2}$ .

$$O_1C \approx r \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}, \quad CA_1 \approx r \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}. \quad (20.25)$$

Во всех промежуточных случаях перерасчет обычно не производится, а берется среднее значение  $O_1C$  и  $CA_1$ , определяемое по формулам (20.24) и (20.25). Таким образом, за счет использования приведенных высот антенн  $h_1'$  и  $h_2'$  задача сводится к плоской, и все предыдущие результаты могут быть использованы.

## 20.8. Распространение радиоволн вблизи земной поверхности.

### Поверхностные волны

Рассмотрим случай, когда излучатель находится непосредственно на земной поверхности, т.е.  $h_1 \rightarrow 0$ . Будем считать, что свойства земной поверхности в данном диапазоне можно считать близкими к проводнику. Если  $\sigma \rightarrow \infty$ , то для вертикального вибратора

$$E_{\perp m} = 2 \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) \cos(h_1 k_1 \cos \theta) = 2 \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} F(\theta) \quad (h_1 \rightarrow 0). \quad (20.26)$$

$$E_{\parallel m} = \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} 2F(\varphi) \sin(h_1 k_1 \cos \varphi) = 0 \quad (h_1 \rightarrow 0) \quad (20.27)$$

Таким образом, далее имеет смысл рассматривать только вертикальный вибратор.

Как следует из (20.26), поле вибратора из-за идеально проводящей поверхности удваивается в верхней полуплоскости по сравнению со свободным пространством. Структура поля вблизи проводящей поверхности изображена на рис. 20.17. Линии напряженности электрического поля нормальны к идеально проводящей поверхности, линии напряженности магнитного поля строго параллельны этой поверхности. Вектор Умова-Пойнтинга направлен параллельно поверхности непосредственно вблизи ее. Поскольку вектор  $\vec{E}$  нормален к идеально проводящей поверхности, при плавных ее изгибах (радиус изгиба намного больше длины волны) волна вблизи проводящей поверхности следует за ее изгибами (рис 20.18). Вектор Умова-Пойнтинга ме-

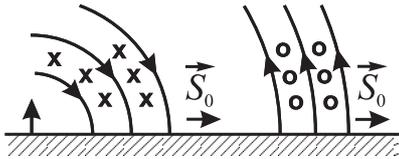


Рис. 20.17

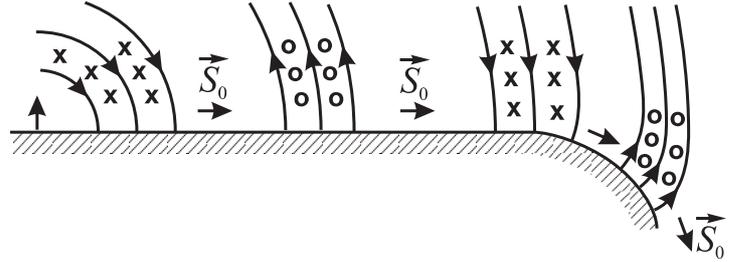


Рис. 20.18

няет направление и вблизи границы направлен по касательной к ней. Вдали же от границы поле изменяется только из-за изменений фазовых условий в отраженной волне в случае изгиба границы, т.е. изменяются лишь условия интерференции. Поле вдали от границы «не замечает» ее деформации и направление распространения волн изменяется слабо. Таким образом, вблизи границы образуется типично поверхностная волна, амплитуда которой быстро убывает с увеличением расстояния от поверхности. Эта волна следует за изгибами «ведущей» поверхности, как в плавно изогнутом волноводе.

В случае, когда  $\sigma$  конечна, картина качественно изменяется за счет того, что часть энергии поверхностной волны теряется; поля проникают через границу, в толщу земли. Чем ближе волновое сопротивление земли к 377 Ом, тем большая часть энергии тратится на потери в земле. Формально затухание поверхностной волны можно учесть, введя множитель затухания  $\left| \dot{F}_s \right|$ .

$$E_{\perp m} = E_{\perp m}^0 \left| \dot{F}_s \right|$$

где  $E_{\perp m}^0$  - поле поверхностной волны при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Расчет  $\left| \dot{F}_s \right|$  в общем случае достаточно сложен. Для приближенной его оценки обычно используется формула Шулейкина-Ван дер Поля

$$\left| \dot{F}_s \right| = \frac{2 + 0,3\rho}{2 + \rho + 0,6\rho^2}, \quad (20.28)$$

где  $\rho = \frac{\pi}{\lambda} \frac{r}{\sqrt{\varepsilon_2^* \varepsilon_2}}$  - приведенное расстояние.

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' - j\varepsilon_2''.$$

Формула Шулейкина-Ван дер Поля применима при условии  $\varepsilon_2'' > \varepsilon_2'$ .

При  $\rho > 10$  из (20.28) получаем

$$\left| \dot{F}_s \right| \cong \frac{1}{2\rho} \quad (20.29)$$

Как следует из (20.29), закон изменения амплитуды напряженности поля поверхностной волны с расстоянием  $r$  соответствует  $\frac{1}{r^2}$ . Напомним, что в свободном пространстве амплитуда напряженности поля излучателя убывает с расстоянием от источника  $r$  как  $\frac{1}{r}$ ; то же самое относится и к интерференционному полю вдали от отражающей поверхности. Поскольку зависимость от  $r$  вблизи неидеальной отражающей поверхности ( $\theta \cong 90^\circ$ ) и вдали от нее (т.е. при  $\theta < 90^\circ$ ) изменяется с изменением  $r$ . Характерные изменения в зависимости от  $\rho(r)$  представлены на [рис.20.19](#).

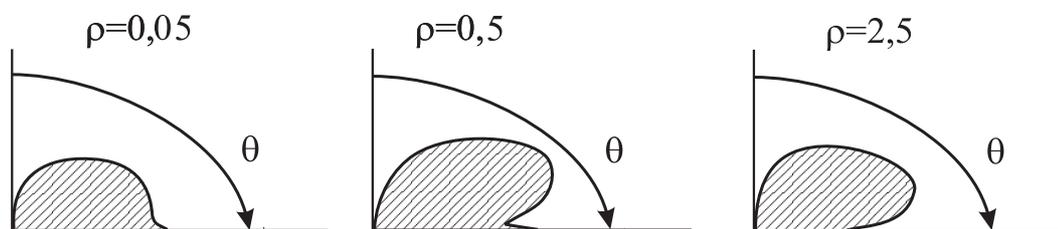


Рис. 20.19

Учтем теперь, что  $\left| \dot{F}_s \right|$  - комплексный множитель, т.е.  $\dot{F}_s = |F_s| e^{+j\varphi}$  и, следовательно,  $E_{m\perp} = E_{m\perp}^0 |F_s| e^{+j\varphi} = 2 \frac{\sqrt{60P_0 G_m}}{r} |F_s| e^{-j(\omega t - k_1 r - \varphi)}$ . Причем,  $\varphi = \varphi(r)$ . Введем обозначение:  $k_1 r + \varphi = k_1' r$ .

Поскольку  $k_1 = \frac{\omega}{c} = \text{const}$ ,  $k_1' = \frac{\omega}{v_\phi}$ ,  $v_\phi = v_\phi(r)$  и, кроме того,  $v_\phi < c$ , т.е.

поверхностная волна оказывается замедленной. Степень замедления зависит от свойств земной поверхности: чем больше ее проводимость и чем, следовательно, меньше потери, тем меньше и замедление и наоборот. Особенно резко изменяется  $v_\phi$  для данного диапазона длин волн при распространении волн над сушей (малая проводимость) и над морем (большая проводимость). Это различие лежит в основе явления, называемого береговой рефракцией.

Сущность его поясняется на [рис. 20.20](#). Фазовая скорость  $v_{\phi 1}$  распростране-

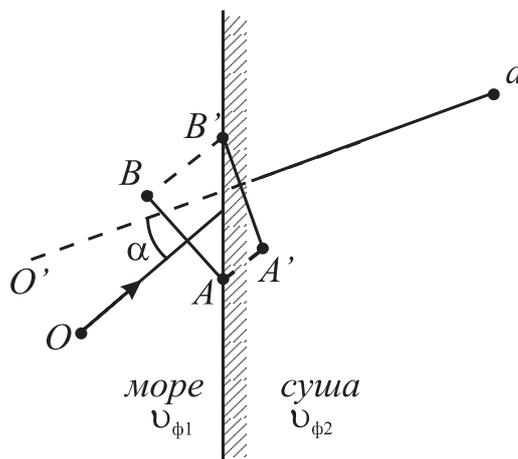


Рис. 20.20

ния поверхностных волн над морем больше, чем скорость  $v_{\phi 2}$  распространения этих волн над сушей. Вследствие этого точка, лежащая на фронте волны  $A$ , проходит над сушей путь  $AA'$  – меньший, чем путь  $BB'$ , проходимый точкой  $B$  над морем. В результате фронт волны над сушей оказывается развернутым на угол  $\alpha$ ; на тот же угол изменяется направление распространения волн. Поэтому из точки наблюдения  $a$  источник виден в направлении на точку  $O'$ , а не на точку  $O$ , где он действительно расположен. Угол  $\alpha$  называется углом рефракционной ошибки; при отладке работы береговой радиолокационной станции он тщательно измеряется и учитывается на каждом из рабочих диапазонов.

### 20.9. Дифракция радиоволн вокруг сферической земной поверхности

В диапазоне длинных и сверхдлинных радиоволн существенное значение имеет дифракция радиоволн вокруг сферической земной поверхности. Если приемная и передающая антенны закрыты шаровым сегментом высоты  $h$  и  $h$  меньше радиуса существенной области  $R_n$ , в точке приема  $A$  будет существовать достаточно заметное дифракционное поле ([рис.20.21](#)). Поскольку  $R_n \sim \sqrt{\lambda}$ , чем больше  $\lambda$ , тем существеннее явление дифракции и, наоборот, с уменьшением  $\lambda$  явление дифракции становится все более несущественным

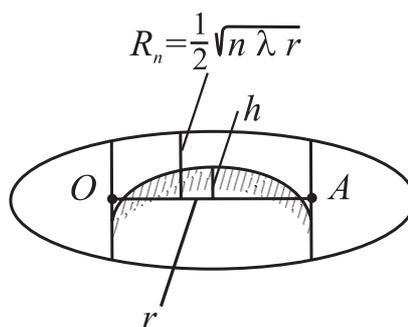


Рис. 20.21

при расчете поля в точке приема. На [рис 20.22](#) представлены зависимости напряженности дифракционного поля в точке приема в зависимости от рас-

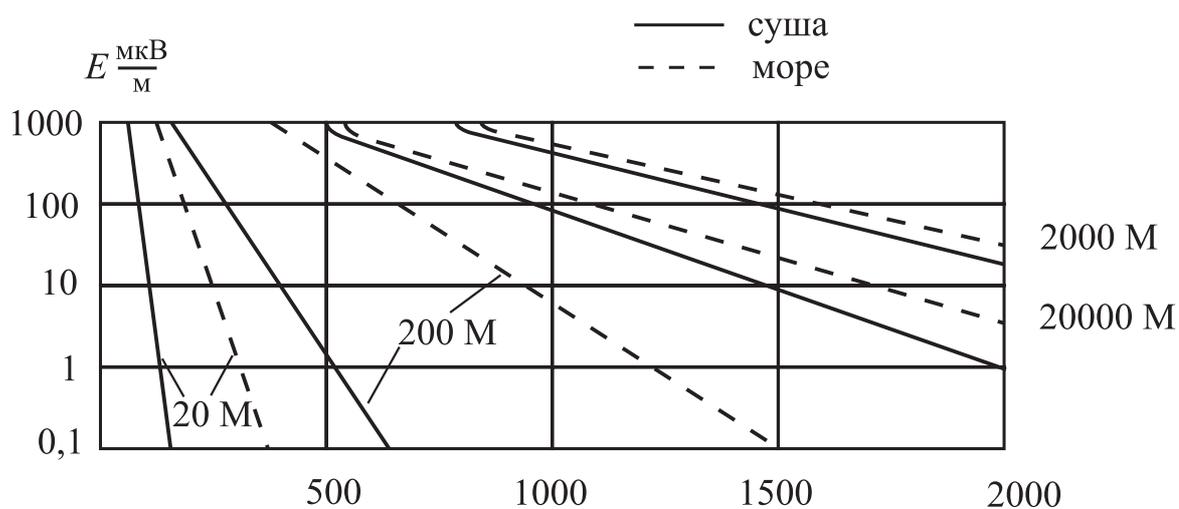


Рис. 20.22

стояния для различных диапазонов волн при  $P_0 = 1$  кВт.

Пунктирные линии соответствуют случаю распространения волн над морем, сплошные – над сушей.

## ГЛАВА XXI

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ТРОПОСФЕРЕ

#### 21.1 Строение тропосферы

Тропосферой называется нижняя часть атмосферы до высоты порядка 15 км. Если предположить, что состав газов и температура не меняются по высоте, то давление в атмосфере определяется известной барометрической формулой

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg_h}{RT}} \quad (21.1)$$

где  $h$  – высота,  $R=8,32$  Дж/град.моль,  $T$  – абсолютная температура,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $M$  – масса грам-молекулы газа.

На самом деле температура в тропосфере не остается постоянной, а падает с высотой приблизительно на  $5^{\circ}\text{C}$  с каждым километром, поэтому формула (21.1) имеет приближенный характер. Состав же тропосферы действительно остается постоянным по высоте и составляет: 78% - молекулярный азот, 21% - молекулярный кислород, 1% - прочие составляющие – озон, пары воды, углекислый газ и др.

Относительная диэлектрическая проницаемость тропосферы определяется следующей эмпирической формулой:

$$\varepsilon = 1 + \left[ \frac{157}{T} \left( p + \frac{4800P_n}{T} \right) 10^{-6} \right] \quad (21.2)$$

Здесь  $P_n$  – парциальное давление паров воды в тропосфере. Как видно из (21.2), водяные пары существенно изменяют значение  $\varepsilon$  тропосферы, что связано с большим значением  $\varepsilon$  для воды. Ввиду малого отличия  $\varepsilon$  от 1 показатель преломления тропосферы можно записать в виде

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{(\varepsilon - 1) + 1} \approx 1 + \frac{\varepsilon - 1}{2} = 1 + \frac{78,5}{T} \left[ p + \frac{4800P_n}{T} \right] 10^{-6}$$

Для удобства действия с числовыми величинами, характеризующими  $n$  тропосферы, обычно используется величина  $N$ , называемая индексом преломления

$$N = (n - 1)10^6$$

Индекс преломления тропосферы сильно зависит от высоты, метеорологических условий, времени года и широты. На высоте 9 км  $N=109$  и не меняется в зависимости от времени года и широты.

## 21.2. Поглощение радиоволн в тропосфере

Поглощение радиоволн в тропосфере существенно только в дециметровом и более коротковолновых диапазонах. Это поглощение обусловлено, в основном, тремя факторами.

- 1) Поляризационные потери на каплях воды.
- 2) Рассеяние радиоволн на неоднородностях (каплях воды, микротурбулентностях, пылевых включениях и т.п.).
- 3) Резонансное поглощение на частотах энергетических переходов молекул  $H_2O$  (нескомпенсированный электрический момент) и молекул  $O_2$  (нескомпенсированный магнитный момент). Резонансное поглощение является селективным и существенно в узком диапазоне длин волн.

Суммарные потери в тропосфере характеризуются коэффициентом поглощения  $\alpha_T$  (Нп/км):

$$E(\vec{r}) = E^0(\vec{r})e^{-\alpha_T r} = E^0(\vec{r}) \cdot 10^{-0.05 \Gamma_T r}$$

где  $E^0$  – напряженность поля волны без влияния потерь,  $E$  – действительная напряженность поля.

В расчетах обычно используется значение коэффициента затухания в дБ/км ( $\Gamma_m$ ).

$$\Gamma_T = 20 \lg \frac{E^0}{E} \Big|_{r=1 \text{ км}} = 8,6 \cdot 10^3 \alpha_T \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{км}} \right].$$

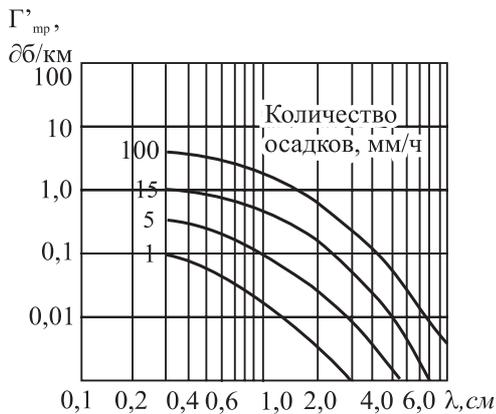


Рис. 21.1

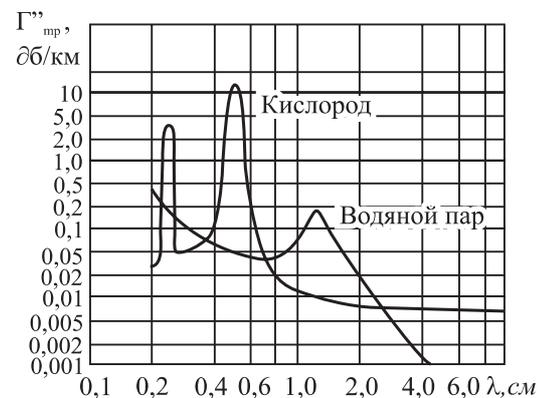


Рис. 21.2

Графики зависимости  $\Gamma_T$  от  $\lambda$  для двух видов потерь приведены на [рис.21.1](#) (зависимость  $\Gamma_T$  от интенсивности дождя и  $\lambda$ ) и [рис. 21.2](#) (зависимость селективного поглощения в  $H_2O$  и  $O_2$  от  $\lambda$ ).

### 21.3. Рефракция радиоволн в тропосфере

Поскольку показатель преломления в тропосфере убывает с высотой, наклонные радиолучи преломляются и отклоняются к земле. Законы преломления в тропосфере наиболее просто устанавливаются с использованием второго закона Снеллиуса для плоскопараллельной слоистой модели тропосферы (с последующим предельным переходом) – [рис. 21.3](#). В соответствии со вторым законом Снеллиуса

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n+1}} = \frac{n_{n+1}}{n_n} \quad (21.3)$$

$$n_1 > n_2 > n_3$$

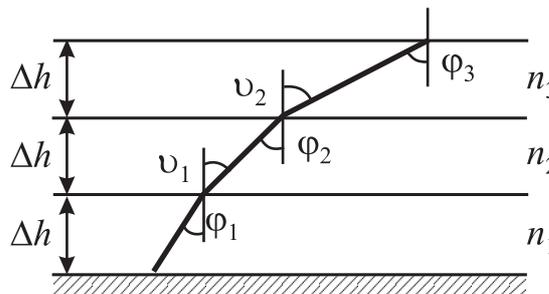


Рис. 21.3

С другой стороны, как следует из [рис. 21.3](#),

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \varphi_n &= \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\}.$$

Таким образом, [\(21.3\)](#) можно переписать в виде

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n+1}} = \frac{n_{n+1}}{n_n} \quad \text{или} \quad n_n \sin \varphi_n = n_{n+1} \sin \varphi_{n+1} = \text{const}.$$

Переходя к пределу  $\Delta h \rightarrow 0$ , получаем точное уравнение

$$n \sin \varphi = \text{const}. \quad (21.4)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение радиолуча в плоском неоднородном диэлектрике – тропосфере.

Рассчитаем радиус кривизны радиолуча  $\rho$  ([рис.21.4](#)).

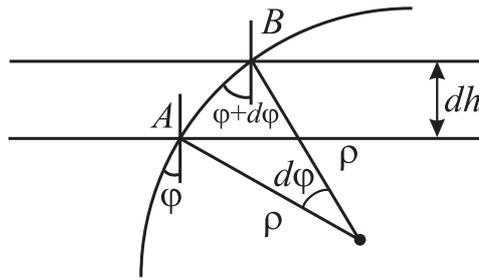


Рис. 21.4

Поскольку  $dh$  бесконечно тонкий слой, из [рис. 21.4](#)) находим

$$\rho = \frac{dh / \cos \varphi}{d\varphi}. \quad (21.5)$$

Определим теперь  $d\varphi \cos \varphi$  из уравнения радиолуча ([21.4](#)):

$$dn \sin \varphi + n d\varphi \cos \varphi = 0, \quad d(n \sin \varphi) = 0,$$

$$d\varphi \cos \varphi = -\frac{dn \sin \varphi}{n}. \quad (21.6)$$

Подставляя ([21.6](#)) в ([21.5](#)), получим

$$\rho = -\frac{n}{\sin \varphi \frac{dn}{dh}}. \quad (21.7)$$

Выражение ([21.7](#)) является общим для любого плоского неоднородного диэлектрика и для любого луча (любое  $\varphi$ ). В случае же тропосферы  $n \approx 1$  и, поскольку интерес представляют пологие лучи,  $\sin \varphi \approx 1$ . Учитывая последние условия, найдем

$$\rho = -1 / \frac{dn}{dh}. \quad (21.8)$$

Из ([21.8](#)) следует, что при линейном изменении  $n$  с высотой  $h$   $\rho = \text{const}$ , причем, если  $\frac{dn}{dh} < 0$ , то  $\rho > 0$ , т.е. радиолуч отклоняется в сторону земли.

Для учета тропосферной рефракции обычно вводится понятие об эквивалентном радиусе земли. При этом реальная картина распространения волны заменяется эквивалентной, причем, в исходной картине поверхность земли имеет радиус кривизны  $R_3$ , радиолуч –  $\rho$ , а в эквивалентной – земля имеет радиус  $R_3$ , радиус же кривизны радиолуча  $\rho \rightarrow \infty$ , т.е. в эквивалентной картине радиолуч распространяется прямолинейно. Условием эквивалентности яв-

ляется равенство разности кривизны радиолуча и земли в том и другом случае:

$$\frac{1}{R'_3} - 0 = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{\rho}.$$

$$\text{Таким образом, } R'_3 = \frac{R_3}{1 - R_3/\rho} = \frac{R_3}{1 + R_3 \frac{dn}{dh}}.$$

В последнем равенстве мы использовали (21.8). Отношение  $\frac{R'_3}{R_3}$  обозначают обычно  $K$ .

Различают следующие случаи тропосферной рефракции.

1. Отрицательная рефракция (на некоторых участках, в отдельных слоях тропосферы):  $\frac{dn}{dh} > 0$ . В этом случае  $\rho < 0$  и луч отклоняется от поверхности земли. В этом случае  $R'_3 < R_3$  и  $K < 1$ .

2. Нормальная рефракция:  $\frac{dn}{dh} = -4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{км}}$ ,  $R'_3 > R_3$ ,  $K = \frac{4}{3}$ .

3. Критическая рефракция:

$$\frac{dn}{dh} = -15,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{км}}, \rho = R_3, R'_3 \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty.$$

В этом случае в эквивалентной картине земля плоская и над ней распространяется прямолинейный радиолуч.

4. Сверхрефракция:  $\frac{dn}{dh} < -15,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{км}}$ .

В этом случае  $R'_3 < 0$  и  $K < 0$ , радиолуч распространяется за счет последовательного отражения от земной поверхности; образуется приземной диэлектрический волновод.

Представление об эквивалентном радиусе земли весьма удобно, поскольку позволяет использовать все ранее полученные интерференционные формулы без учета тропосферной рефракции путем простой замены.

## ГЛАВА XXII

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

#### 22.1. Строение ионосферы

Ионосферой называется верхняя часть атмосферы, подверженная действию ионизирующего солнечного и космического излучения. Она простирается с высоты 60 км и дальше – до высот порядка 20000 км. Основными составляющими газа ионосферы по прежнему остаются азот и кислород, однако заметную часть составляют водород и гелий.

Строение ионосферы оказывается достаточно сложным; достаточно полные сведения о строении ионосферы получены лишь в последнее время за счет использования спутников и геофизических ракет.

Распространение электронной концентрации в ионосфере изображено на [рис. 22.1](#).

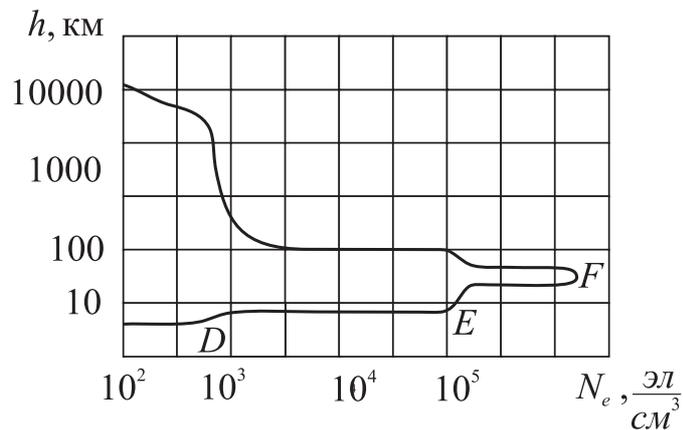


Рис. 22.1

С точки зрения распространения радиоволн основной интерес представляет внутренняя ионосфера, т.е. та ее часть, которая расположена ниже главного максимума электронной концентрации. Поскольку зависимость  $N_e(h)$  во внутренней ионосфере неравномерна и существуют скачкообразные изменения концентрации  $N_e$ , принято деление внутренней ионосферы на слои: D, E, F.

**Слой D.** Этот слой расположен на высоте 60 – 80 км. В слое D  $N_{e\max} \sim 10^2 - 10^3 \frac{\text{Эл}}{\text{см}^3}$ , однако, имеется большая плотность отрицательных ионов:  $N_i^- \sim 10^8 \frac{\text{ИОН}}{\text{см}^3}$ . Благодаря большой плотности газов в слое D, здесь велика частота столкновений электронов с тяжелыми частицами  $\nu = 10^7 \frac{1}{\text{сек}}$ . Слой D существует только в дневное время и с заходом солнца почти мгновенно исчезает.

**Слой E.** Его нижняя граница расположена на высоте 100 км;  $N_e$  днем достигает  $1,5 \cdot 10^5$  эл/см<sup>3</sup> и падает до  $1,5 \cdot 10^3$  эл/см<sup>3</sup> ночью. Толщина слоя составляет 30 – 40 км. В дневное время максимум  $N_e$  в слое E достигается в полдень, при максимальном солнечном освещении; в ночное время  $N_e$  сохраняется почти постоянной. Слой наиболее устойчивый из слоев ионосферы.

**Слой F.** Этот слой расположен на высоте 250 – 400 км. Слой имеет различную структуру в зимние и летние месяцы. В зимние месяцы в дневное время слой F расположен на высоте 220 – 240 км и  $N_{e \max}$  после полудня достигает  $6 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6$  эл/см<sup>3</sup>; ночью этот слой расположен на высоте 300 – 330 км и его электронная концентрация уменьшается до  $2,5 \cdot 10^5$  эл/см<sup>3</sup>.

В летние месяцы в дневное время слой F расщепляется на два слоя – F<sub>1</sub> и F<sub>2</sub>. F<sub>1</sub> расположен на высоте 200 – 230 км, F<sub>2</sub> – на высоте 300 – 400 км.  $N_{e \max}$  слоя F<sub>1</sub> –  $2 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5$  эл/см<sup>3</sup>,  $N_{e \max}$  слоя F<sub>2</sub> –  $4 \cdot 10^5 - 9 \cdot 10^5$  эл/см<sup>3</sup>. В ночное время слой F<sub>1</sub> исчезает вслед за заходом солнца;  $N_e$  в слое F<sub>2</sub> в это же время меняется слабо и составляет  $2,5 \cdot 10^5$  эл/см<sup>3</sup>.

На высотах более 300 км ионосфера представляет собой полностью ионизированный газ, т.е. нейтральных атомов здесь нет. Выше слоя F на высотах 500 – 1000 км электронная концентрация резко падает до  $N_e \sim 10^3 \frac{\text{эл}}{\text{см}^3}$ . Здесь основной газ – атомный кислород. На высотах 1000 – 1700 км основным газом становится водород.

## 22.2. Механизм ионизации и рекомбинации на больших высотах

Для перевода молекулы или атома в ионизированное состояние, молекуле или атому необходимо сообщить некоторую энергию, называемую энергией ионизации. Эта энергия измеряется в электрон-вольтах (ЭВ)  $e\phi_i$ . Для газов, входящих в состав ионосферы, эта величина лежит в пределах: O<sub>2</sub>  $\cong$  12,5 ЭВ, O  $\sim$  13,5 ЭВ, H<sub>2</sub>  $\sim$  15,4 ЭВ, H  $\sim$  15,5 ЭВ, N<sub>2</sub>  $\sim$  15,5 ЭВ, N  $\sim$  14,5 ЭВ.

Основным источником ионизирующего излучения является Солнце – его световые потоки и потоки заряженных частиц.

**Механизм фотоионизации.** Энергия при таком механизме передается квантом излучения – фотоном, энергия которого  $W_\phi = hf$ ,  $h$  – постоянная Планка. Составим баланс энергий:

$$hf = e\phi_i + \frac{mv_e^2}{2}, \quad (22.1)$$

$m$ ,  $v_e$  – масса и скорость свободного электрона.

Из (22.1) следует, что не при всех  $f(\lambda)$  излучениях возможна ионизация. Граничное значение  $f_{\text{гр}} = \frac{c}{\lambda_{\text{гр}}}$  определяется из условия  $v_e = 0$ . Из (22.1) следует,

что

$$\lambda_{гр} = \frac{1,24}{eu_i} \quad [\text{мкм}].$$

Таким образом, ионизирующим действием обладает только незначительная по энергии часть солнечного излучения – ультрафиолетовая граница при  $\lambda < \lambda_{гр} \sim 0,1 \text{ мкм}$ . Однако именно фотоионизация является основным механизмом ионизации в верхних слоях атмосферы.

**Ударная ионизация.** Вторым по значимости механизмом ионизации является ударная ионизация молекул и атомов быстро движущимися заряженными частицами. Составим баланс энергии в этом случае

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = eu_i + \frac{m v_e^2}{2}, \quad (22.2)$$

где  $m_1, v_1$  - масса и скорость ионизирующей заряженной частицы.

Как следует из (22.2), минимальная скорость  $v_1$  для ионизации составляет  $\sim 0,1 \text{ с}$ . Ударная ионизация в ионосфере составляет примерно 50% от фотоионизации.

Другими, менее существенными источниками ионизации, являются космические лучи и метеоры, движущиеся со скоростью большей, чем 11 км/сек.

Процессы ионизации уравниваются противоположными процессами – процессами рекомбинации электронов и положительных ионов. На больших высотах концентрация отрицательных ионов  $N_i^-$  незначительна, поэтому можно считать, что  $N_e \approx N_i^+$ . Вероятность рекомбинации тем больше, чем больше как  $N_e$ , так и  $N_i^+$ . Так как  $N_e = N_i^+$ , вероятность рекомбинации можно определить как  $\alpha_e N_e^2$  ( $\alpha_e$  – постоянная рекомбинации).

Пусть интенсивность ионизации  $I_s \left[ \frac{\text{эл}}{\text{сек. см}^3} \right]$  на данной высоте задана.

Тогда уравнение установления электронной плотности можно записать в форме:

$$\frac{dN_e}{dt} = I_s - \alpha_e N_e^2. \quad (22.3)$$

Уравнение (22.3) легко анализируется в предельных случаях.

1. Электронная концентрация установилась,  $\frac{dN_e}{dt} = 0$ . Тогда  $I_s = \alpha_e N_e^2$ .

Таким образом, равновесная концентрация

$$N_e^0 = \sqrt{\frac{I_s}{\alpha_e}}. \quad (22.4)$$

Из (22.4) следует, что  $N_e^0$  тем больше, чем меньше  $\alpha_e$ ; с другой стороны, если бы  $\alpha_e$  не зависела от высоты, то распределение  $N_e^0(h)$  повторяло бы зависимость  $I_s(h)$ . На самом деле это не так, поскольку с высотой меняется давление и газовый состав верхних слоев атмосферы; образование скачков  $N_e^0(h)$  (слоев E, F, D) обусловлено именно такими факторами.

2. Источник ионизации выключен в момент  $t = t_0$  например, после захода Солнца. Тогда

$$\frac{dN_e}{dt} = -\alpha_e N_e^2. \quad (22.4)$$

Решая (22.4), получаем

$$N_e = \frac{N_e^0}{1 + N_e^0 \alpha_e (t - t_0)}. \quad (22.5)$$

Здесь  $N_e^0$  - равновесная концентрация в момент  $t = t_0$ .

Формула (22.5) выражает закон изменения  $N_e$  в ночные часы. Очевидно, что в нижних слоях, где  $\alpha_e$  велико,  $N_e$  убывает очень быстро и поэтому слой D, например, исчезает почти мгновенно вслед за заходом Солнца (в нижних слоях за счет присутствия отрицательных ионов  $\alpha_{эфф} \gg \alpha_e$ ).

### 22.3. Электронная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа без учета столкновений электронов с ионами и нейтральными молекулами

В соответствии с материальными уравнениями, вектор электрической индукции определяется как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (22.6)$$

Здесь  $\epsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\vec{P}$  - вектор поляризованности среды,  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ .

Рассчитаем  $\vec{P}$  в ионизированном газе, пренебрегая смещением положительных ионов. Электрический момент  $\vec{P}$ , возникающий при смещении одного электрона на  $\vec{r}$  относительно равновесного (в статистическом смысле) положения определяется как  $-\vec{P} = e \vec{r}$ .  $e$  - заряд электрона по модулю.

Если электронная концентрация равна  $N_e$ , то средний электрический момент единицы объема или же вектор поляризации  $\vec{P}$  определится как

$$-\vec{P} = e \vec{r} N_e. \quad (22.7)$$

Определим теперь упорядоченное смещение  $\vec{r}$  в электронном газе, возникающее под действием поля напряженности  $\vec{E} = \vec{E}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ . Поскольку смещение электронов  $|\vec{r}| \ll \lambda$ , запаздыванием в формуле  $\vec{E}$  можно пренебречь и считать, что на электрон действует сила  $\vec{F}_e = -e\vec{E}_m e^{j\omega t}$ . Тогда нерелятивистское уравнение упорядоченного движения электрона будет иметь вид (внешнее магнитное поле отсутствует)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}_m e^{j\omega t}.$$

Полагая решение для вынужденного упорядоченного движения электрона в виде  $\vec{r} = \vec{r}_m e^{j\omega t}$  (установившийся режим), получим:

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{\omega^2 m}. \quad (22.8)$$

Подставляя (22.8) в (22.7), получим

$$\vec{P} = -\frac{e^2 N_e}{\omega^2 m} \vec{E}. \quad (22.9)$$

Как следует из (22.9), электронный газ характеризуется как материальная среда с линейными свойствами ( $\vec{P} \sim \vec{E}$ ). Это, вообще говоря, следствие сделанного выше предположения о том, что  $|\vec{r}| \ll \lambda$ . При достаточно больших смещениях электронов  $|\vec{r}| \sim \lambda$  проявятся нелинейные свойства электронного газа.

Подставляя (22.9) в (22.6), найдем

$$\vec{D}_e = \epsilon_0 \vec{E} - \frac{e^2 N_e}{\omega m} \vec{E} = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 \omega^2 m} \right) \vec{E} \quad (22.10)$$

Таким образом, как следует из (22.10), электронная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа определяется как

$$\epsilon = \frac{\vec{D}}{\vec{E}} = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m \omega^2} \right) = \epsilon_0 \epsilon_r,$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

Введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m}} \quad (22.11)$$

$\omega_0$  носит название круговой частоты Ленгмюра или собственной круговой частоты ионизированного газа.

С учетом (22.11)  $\varepsilon_r$  можно переписать в виде

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (22.12)$$

Проанализируем полученный результат (22.12).

1)  $\varepsilon_r$  - действительная величина,  $\varepsilon_r'' = 0$ . Следовательно, потерь в ионизированном газе нет. Этот результат – следствие пренебрежения столкновения электронов с ионами и нейтральными частицами, при которых расходуется энергия, сообщенная электронам внешним полем. Без учета же этих столкновений сообщенная электронам энергия переизлучается полностью, без потерь.

2)  $\varepsilon_r$  - величина, всегда меньшая 1. Это означает с физической точки зрения, что конвекционный электронный ток в ионизированном газе противофазен току смещения и при  $\omega > \omega_0$  приводит к уменьшению последнего. Действительно,

$$\bar{\delta}_e = -N_e e \bar{v}_e = \frac{N_e e^2 \bar{E}}{j \omega m} = -j \frac{N_e e^2 \bar{E}}{\omega m}, \quad (22.13)$$

$$\bar{\delta}_{cm} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = j \omega \varepsilon_0 \bar{E}. \quad (22.14)$$

Сравнение (22.13) и (22.14) показывает, что  $\bar{\delta}_e$  и  $\bar{\delta}_{cm}$  действительно противофазны.

3) При  $\omega = \omega_0$ ,  $\varepsilon_r = 0$  и волновые явления при  $\omega \leq \omega_0$  невозможны. Действительно, при  $\omega = \omega_0$ , как это следует из (22.13) и (22.14),  $\bar{\delta}_e + \bar{\delta}_{cm} = \bar{\delta}_r = 0$  и  $\text{rot} \bar{H} = 0$ .

4) При  $\omega < \omega_0$  поле в ионизированном газе имеет не волновой, а квазистатический характер, волновое число  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_r}$  оказывается число мнимым

$$k = -j \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}.$$

При  $\omega < \omega_0$  волны в ионизированном газе быстро затухают, подобно волнам в закритической области в волноводе, причем  $\omega_0$  играет роль аналога критической частоты в волноводе.

#### 22.4. Электронная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа с учетом столкновения электронов с тяжелыми частицами

За счет столкновения электронов с тяжелыми частицами изменяется их момент количества движения и упорядоченное движение нарушается. Для простоты будем считать по этой причине, что при столкновении электрон полностью теряет упорядоченную составляющую момента количества движения  $m\bar{v}$ . Пусть в среднем в 1 сек. происходит  $\nu$  столкновений электрона с тяжелой частицей. В результате этих столкновений в среднем теряется  $\nu m\bar{v}$  количества движения электрона. С учетом этих потерь уравнение движения электрона можно записать в виде:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = -e\bar{E} - \nu m\bar{v}, \quad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (22.15)$$

Считая, как и ранее, что  $|\bar{r}| \ll \lambda$ , положим  $\bar{E} = \bar{E}_m e^{j\omega t}$  и, считая режим установившимся, представим упорядоченное смещение электрона в форме  $\bar{r} = \bar{r} e^{j\omega t}$ . Тогда решение (22.15) имеет вид  $\bar{r} = \frac{e\bar{E}}{m\omega(\omega - j\nu)}$ .

Подставляя  $\bar{r}$  в (22.7), получим следующее выражение для поляризованности среды

$$\bar{P} = -\frac{e^2 N_e \bar{E}}{m\omega(\omega - j\nu)}.$$

Соответственно

$$D = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m\omega(\omega - j\nu)} \right) \bar{E}.$$

Таким образом,

$$\epsilon_r = 1 - \frac{e^2 N_e (\omega + j\nu)}{\epsilon_0 m\omega(\omega^2 + \nu^2)}.$$

При учете столкновений находим, что  $\epsilon_r$  - величина комплексная  $\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$ . Представим действительную часть  $\epsilon_r'$  и мнимую  $\epsilon_r''$  следующим образом:

$$\epsilon_r' = 1 - \frac{e^2 N_e}{m\epsilon_0(\omega^2 + \nu^2)} = 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_e \left[ \frac{\text{эл}}{\text{см}^3} \right]}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (22.16)$$

$$\varepsilon_r'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad \sigma = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_e \left[ \frac{\text{ЭЛ}}{\text{см}^3} \right]}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (22.17)$$

При малых  $\frac{\omega}{\nu}$   $\varepsilon_r'$  и  $\sigma$  можно упрощенно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r' &= 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_e}{\nu^2}, \\ \sigma &= 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_e}{\nu^2}. \end{aligned} \quad (22.18)$$

Таким образом, при условии  $\frac{\omega}{\nu} \ll 1$  свойства ионизированного газа соответствуют проводящей среде, параметры которой не зависят от частоты.

При противоположном условии  $\frac{\omega}{\nu} \gg 1$  формулы для  $\varepsilon_r'$  и  $\sigma$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r' &= 1 - 3,19 \cdot 10^9 \frac{N_e}{\omega^2}, \\ \sigma &= 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_e}{\omega^2} \nu. \end{aligned}$$

Здесь с увеличением  $\omega$   $\sigma$  монотонно уменьшается.

Используя (22.16), (22.17) и результаты расчета затухания плоских волн в проводящих средах, определим фазовую постоянную  $\beta$  и постоянную затухания  $\alpha$  в ионизированном газе

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon' \mu_0}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \right)^2} + 1 \right)}, \quad (22.19)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon' \mu_0}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \right)^2} - 1 \right)}.$$

Проанализируем (22.19) в предельных случаях:

а)  $\omega \ll \nu$  (но  $\omega \gg \omega_0$ ). В этом случае  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \gg 1$  и  $\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \sigma}{2}}$ . Используя (22.18), получим:  $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0}{2} \cdot 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{\omega}{\nu} N_e} \sim \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ ;

б)  $\omega \gg \nu$  и  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon'} \ll 1$  ( $\omega > \omega_0$ ). Тогда  $\beta = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon'}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}} \sigma$ . Положим, что  $\epsilon'_r \rightarrow 1$ , т.е.  $\omega \gg \omega_0$ . При этом  $\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot 2,82 \cdot 10^{-2} N_e \frac{\nu}{\omega^2} = 1,69\pi \frac{\nu}{\omega^2}$ .

Таким образом, в случае а)  $\alpha$  возрастает с увеличением  $\omega$  пропорционально  $\sqrt{\omega}$ , в случае б) – убывает пропорционально  $\frac{1}{\omega^2}$ . Это говорит о том, что в области  $f \approx \nu$  имеется максимум  $\alpha$ . Точный анализ с учетом (22.16) и (22.17) показывает, что этот максимум имеет место при  $f = \frac{1}{2}\nu$ . Именно этим объясняется сильное поглощение радиоволн средневолнового диапазона в слое D ( $\nu \cong 10^7$  Гц) и прекращение ионосферного распространения этих радиоволн в дневные часы, когда существует слой D.

## 22.5. Преломление и отражение радиоволн в ионосфере

Рассмотрим, как и при анализе рефракции в тропосфере (раздел 21.3), плоскую модель для отражающих слоев (рис.22.2)

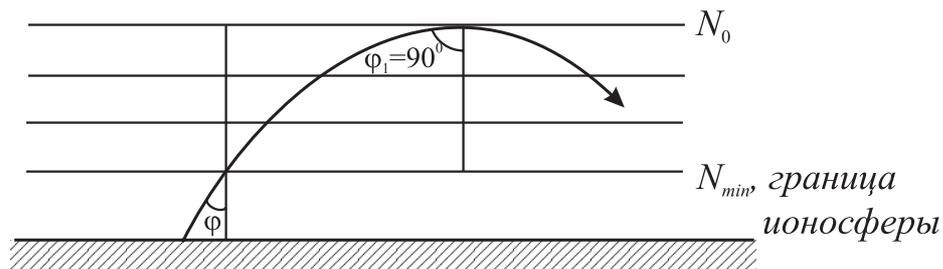


Рис. 22.2

Здесь  $\varphi$  - угол падения радиолуча на ионосферу,  $N_0$  – электронная концентрация в слое, в котором радиолуч имеет угол падения  $\varphi = 90^\circ$ . Очевидно, что глубина проникновения радиоволны в ионосферу зависит от угла падения  $\varphi$  и от рабочей частоты  $\omega$ , поскольку  $\epsilon_r$  и  $n$  зависят от частоты  $\omega$ . Рассчитаем критические углы падения  $\varphi_{кр}$  и критические частоты  $\omega_{кр}$ , при которых отражение радиолуча от ионосферы еще возможно. Используем уравнение радиолуча  $n \sin \varphi = \text{const}$  или

$$n_0 \sin \varphi_0 = n_1 \sin \varphi_1. \quad (22.20)$$

Учтем, что  $n_0 \approx 1$  (граница ионосферы),  $\varphi_1 = 90^\circ$ , а  $n_1 = \sqrt{\epsilon_r}$ . Тогда из (22.21) получим:

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{f_0^2}{f^2}}.$$

$f_0$  – ленгмюровская частота (для простоты считается, что  $\nu = 0$ ).

При  $\varphi \geq \varphi_0$  радиолучи отражаются от ионосферы. Найдем критическую рабочую частоту  $f_{кр}$  при заданных  $\varphi_0, f_0$  (по  $N = N_{max}$ )

$$f_{кр} = \frac{f_0}{\cos \varphi_0}. \quad (22.21)$$

При  $f \leq f_{кр}$  отражения всегда имеют место. Наименьшая  $f_{кр}$  получается при  $\varphi_0 = 0^0$ , т.е., когда волна падает нормально на ионосферу. В этом случае

$$f_{кр}^{min} = f_0 = \sqrt{80,8N_e \left[ \frac{\text{ЭЛ}}{\text{см}^3} \right]} \text{ [кГц]}.$$

Сферичность Земли ограничивает максимально возможные  $\varphi_0$ , тем самым ограничивается диапазон волн, которые могут отражаться от ионосферы (в плоско-параллельной системе могли бы отражаться волны со сколь угодно большой частотой при  $\varphi_0 \rightarrow 90^0$ , как это следует из формулы (22.21)). Определим  $\varphi_0^{max}$  и, соответственно, максимальную частоту радиоволн, отражающихся от ионосферы (рис. 22.3).

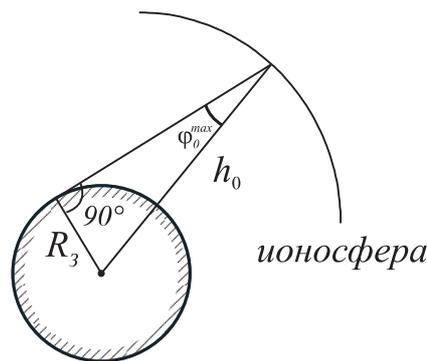


Рис. 22.3

Как следует из рисунка,  $\sin \varphi_0^{max} = \frac{R_3}{R_3 + h_0}$ . Если положить  $h_0 \sim 200 - 300$  км, то  $f_{кр}^{max} \cong 4f_0$ .

## 22.6. Влияние магнитного поля Земли на распространение волн в ионосфере. Двойное лучепреломление

До сих пор мы считали, что внешние статические поля в ионосфере отсутствуют. На самом деле это не так: ионосфера находится в магнитостатическом поле Земли. Магнитное поле существенно изменяет свойства ионизированного газа, делая эту среду анизотропной. Магнитное поле приводит к искривлению траектории движения электронов и вследствие действия маг-

нитной силы Лоренца смещение электрона под действием поля проходящей волны в различных направлениях неодинаково. Это означает, что вектор поляризации в среде зависит от ориентации плоскости поляризации электромагнитной волны, т.е. среда – анизотропна.

Проведем анализ в предположении, что  $v = 0$  (т.е. будем пренебрегать для простоты столкновениями электронов с тяжелыми частицами). Запишем уравнение движения электрона в присутствии магнитостатического поля  $\vec{B}_0$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E} - e[\vec{v}, \vec{B}_0]. \quad (22.22)$$

Воспользуемся прямоугольной системой координат

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

$$\vec{v} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}.$$

Положим, что  $\vec{B} = \vec{k}B_0$ , т.е. однородное магнитное поле направлено по оси  $z$ . Как и ранее, поляризованность среды определяется через упорядоченное смещение электронов под действием поля волны как

$$\vec{P} = -eN_e \vec{r}. \quad (22.23)$$

Подставляя (22.23) в (22.22), имеем

$$\ddot{\vec{P}} = \omega_0^2 \varepsilon_0 \vec{E} - \omega_H \left[ \dot{\vec{P}}, z_0 \right]. \quad (22.24)$$

Здесь  $\omega_H = \frac{eB_0}{m}$  - циклотронная частота.

Распишем (22.24) в прямоугольной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{P}_x &= \omega_0^2 \varepsilon_0 E_x - \omega_H \dot{P}_y, \\ \ddot{P}_y &= \omega_0^2 \varepsilon_0 E_y - \omega_H \dot{P}_x, \\ \ddot{P}_z &= \omega_0^2 \varepsilon_0 E_z. \end{aligned} \right\} \quad (22.25)$$

Рассмотрим теперь различные случаи поляризации волн (и, соответственно, направлений их распространения).

1. Волна распространяется вдоль оси  $z$ , плоскость поляризации (для определенности) –  $xz$ . Тогда

$$\vec{E} = \vec{i}E = \vec{i}E_0 e^{j\omega t}. \quad (22.26)$$

Представим линейно поляризованное поле (22.26) как суперпозицию лево- и правополяризованных волн одинаковой  $\left(\frac{E_0}{2}\right)$  амплитуды

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E_0}{2} (\vec{i} - j\vec{j}) e^{j\omega t} + \frac{E_0}{2} (\vec{i} + j\vec{j}) e^{j\omega t} \quad (22.27)$$

Поскольку волна не имеет z-составляющей электрического поля,  $P_z = 0$ ; для  $P_x$  и  $P_y$  из (22.25) получаем, предполагая  $\vec{P} = \vec{P}_0 e^{j\omega t}$ ,

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \left\{ -\varepsilon_0 E_x - j \frac{\omega_H}{\omega} \varepsilon_0 E_y \right\}, \\ P_y &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \left\{ -\varepsilon_0 E_y + j \frac{\omega_H}{\omega} \varepsilon_0 E_x \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (22.28)$$

Перепишем теперь (22.28) для право- и левополяризованных составляющих  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ :

а)  $\vec{E}_1$ . Для этого поля  $E_y = -jE_x$ , поэтому

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_H)} \varepsilon_0 E_x, \\ P_y &= -\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_H)} \varepsilon_0 E_y. \end{aligned} \right\}$$

Соответственно

$$\vec{D}_t = \varepsilon_0 E_t \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_H)} \right); \quad \varepsilon_1^r = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_H)}; \quad (22.29)$$

б)  $\vec{E}_2$ . В этом случае  $E_y = jE_x$  и мы получаем

$$\varepsilon_2^r = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + \omega_H)}. \quad (22.30)$$

Таким образом, диэлектрические проницаемости для право- и левополяризованных волн оказываются различными. Следовательно, коэффициенты преломления для них также будут различны и их распространение в ионосфере будет происходить по разным направлениям. Иначе говоря, рассматриваемая среда обладает свойством двойного лучепреломления, что характерно для всех анизотропных сред.

Следует отметить, что для волны 1 при  $\omega < \omega_H$   $\varepsilon_1^r > 1$ , т.е. при любом значении  $\omega_0$  и сколь угодно малой рабочей частоте  $\omega$  волны 1 могут распространяться через ионосферу вдоль силовой линии магнитостатического поля Земли.

С физической точки зрения различие в  $\varepsilon_r$  для волн 1 и 2 объясняется следующим образом. Электроны в поперечной к магнитному полю плоскости вращаются с частотой  $\omega_H$ , т.е. представляют собой элементарные электрические осцилляторы с собственной частотой  $\omega_H$ . Направление их вращения совпадает с направлением вращения вектора  $E$  волны 1 и противоположно направлению вращения вектора  $E$  волны 2. При  $\omega = \omega_H$  на волне 1 происходит резонансное возбуждение электронных осцилляторов, что видно из формулы (22.29). При переходе  $\omega$  через значение  $\omega = \omega_H$  меняется характер реакции электронного осциллятора (как  $\omega_p$  и, вообще говоря, любого осциллятора – контура, резонатора и т.д. при переходе через резонансную частоту); при  $\omega > \omega_H$  электронный ток поляризации имеет индуктивный характер, при  $\omega < \omega_H$  – емкостной. В последнем случае электронный ток поляризации складывается с током смещения для пустоты, т.е.  $\varepsilon_r$  всегда оказывается больше 1, что и объясняет упомянутый выше результат.

Поскольку  $\varepsilon_r$  для волн 1 и 2 различна, возникает дополнительный эффект, приводящий к вращению плоскости поляризации волны, распространяющейся вдоль силовой линии магнитного поля (эффект Фарадея). Рассчитаем угол поворота плоскости поляризации электромагнитной волны. Запишем  $x$  и  $y$  – составляющие электрического поля волн 1 и 2

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= \operatorname{Re} \dot{E}_{x1} = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_0 \sqrt{\varepsilon_{r1}} z), \\ E_{y1} &= \operatorname{Re} \dot{E}_{y1} = \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - k_0 \sqrt{\varepsilon_{r1}} z), \\ E_{x2} &= \operatorname{Re} \dot{E}_{x2} = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}} z), \\ E_{y2} &= \operatorname{Re} \dot{E}_{y2} = \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2}} z), \end{aligned} \right\}$$

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Найдем теперь суммарные компоненты  $E_x$  и  $E_y$  полного поля волны

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x1} + E_{x2} = E_0 \cos \left[ \frac{k_0 z}{2} (\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}) \right] \cos \left[ \omega t - \frac{k_0 z}{2} (\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}) \right], \\ E_y &= E_{y1} + E_{y2} = E_0 \sin \left[ \frac{k_0 z}{2} (\sqrt{\varepsilon_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r1}}) \right] \cos \left[ \omega t - \frac{k_0 z}{2} (\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}) \right]. \end{aligned} \right\}$$

Угол поворота плоскости поляризации волны  $\psi$  можно определить как

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg}\left[\frac{k_0 z}{2}(\sqrt{\varepsilon_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r1}})\right],$$

откуда следует, что

$$\psi = \frac{k_0 z}{2}(\sqrt{\varepsilon_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r1}})$$

Среды, в которых происходит вращение плоскости поляризации волны, называются *гиротропными*, примером такой среды является ионизированный газ в магнитном поле.

2. Распространение электромагнитной волны в поперечном относительно силовых линий магнитоэстатического поля направлении.

Пусть направление распространения соответствует оси  $y$ . Поскольку имеется в виду плоская (ТЕМ) волна,  $D_y = 0$ . С другой стороны,  $D_y = \varepsilon_0 E_y + P_y = 0$ ,

причем  $P_y \neq 0$ . Поэтому и  $E_y \neq 0$ :

$$E_y = -\frac{P_y}{\varepsilon_0}. \quad (22.31)$$

Запишем уравнения для  $\vec{P}$  в рассматриваемом случае с учетом (22.31)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{P}_x &= \omega_0^2 \varepsilon_0 E_x - \omega_H \dot{P}_y, \\ \ddot{P}_y &= -\omega_0^2 \varepsilon_0 \frac{P_y}{\varepsilon_0} + \omega_H \dot{P}_x, \\ \ddot{P}_z &= \omega_0^2 \varepsilon_0 E_z. \end{aligned} \right\} \quad (22.32)$$

В качестве решения (22.32) в предположении  $\vec{P} = \vec{P}_0 e^{j\omega t}$  имеем:

$$\text{а) } P_z = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varepsilon_0 E_z, \quad \varepsilon_r^0 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2};$$

$$\text{б) } P_x = -\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varepsilon_0 E_x}{1 - \frac{\omega_H^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}; \quad \varepsilon_r^H = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_H^2}{\omega^2}}.$$

$\varepsilon_r^0$  относится к составляющей волны, имеющей поляризацию в плоскости  $yz$ . Эта составляющая называется *обыкновенной волной*.  $\varepsilon_r^0$  то же самое, что и без магнитного поля.  $\varepsilon_r^H$  относится к составляющей, поляризованной в плоскости  $xz$ . Эта составляющая называется *необыкновенной волной*. Проанализируем  $\varepsilon_r^H$  более подробно:

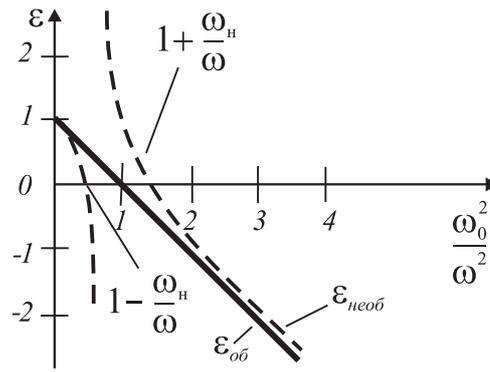


Рис. 22.4

а) случай  $\omega > \omega_H$ . График  $\varepsilon_r^H$  в этом случае в зависимости от  $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  приведен на [рис. 22.4](#). Для сравнения приведен также график  $\varepsilon_r^0$ . Вблизи  $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 1$   $\varepsilon_r^0$  и  $\varepsilon_r^H$  существенно различаются. В точке, где  $1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = 0$ , имеется особенность  $\varepsilon_r^H$ . Здесь график  $\varepsilon_r^H$  разделяется на две ветви;

б) случай  $\omega < \omega_H$  (на [рис. 22.5](#)).

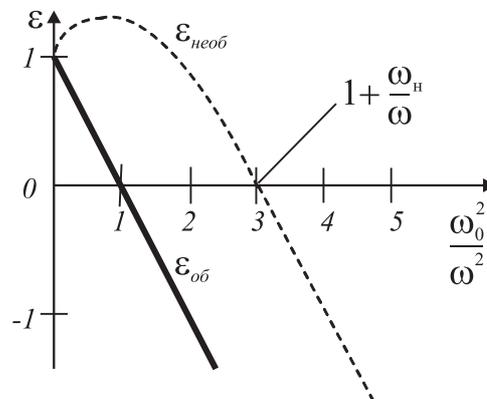


Рис. 22.5

В этом случае имеется только одно решение  $\varepsilon_r^H$  и  $\varepsilon_r^H$  всегда больше, чем  $\varepsilon_r^0$ , т.е. отражение необыкновенной волны происходит от более плотных  $N_e$  слоев, чем обыкновенной.

Следует отметить, что эта особенность приводит к расщеплению радиоимпульса при отражении волны, падающей на ионосферу нормально к силовым магнитным линиям. Волна при этом разделяется на обыкновенную и необыкновенную, и последняя проходит больший путь при отражении, чем обыкновенная.

В случае же а) ( $\omega > \omega_H$ ), когда имеется две ветви зависимости  $\varepsilon_r^H \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ , необыкновенная волна расщепляется на две, у одной из которых  $\varepsilon_r^H < \varepsilon_r^0$ , у другой  $\varepsilon_r^H > \varepsilon_r^0$ . Первая из этих волн отражается от нижних слоев ионосферы с  $\omega_0$  меньшим, чем  $\omega^0$  для обыкновенной волны. Вторая отражается от слоев с большей электронной концентрацией и проникает значительно глубже в ионосферу. Поскольку необыкновенная волна поглощается сильнее, чем обыкновенная, вторая волна ( $\varepsilon_r^H > \varepsilon_r^0$ ) почти полностью поглощается в ионосфере и можно считать, что после отражения от ионосферы приходят лишь две расщепленные волны – необыкновенная с  $\varepsilon_r^H < \varepsilon_r^0$  и обыкновенная. В этом случае критическая частота необыкновенной волны превышает критическую частоту обыкновенной

$$f_{кр}^H \approx f_{кр}^0 + \frac{f_H}{2} = f_{кр}^0 + 0,7 \text{ МГц.}$$

Области отражения и направления распространения после отражения обыкновенной и необыкновенной волн по указанной причине оказываются разными.

## ГЛАВА XXIII ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭМП, ОБЛАДАЮЩИХ СИММЕТРИЕЙ

Во многих случаях электромагнитное поле в электронных приборах и устройствах СВЧ обладает симметрией в пространстве или имеет простые связи координат и времени (вращающееся поле, бегущая волна, поляризованная по кругу волна). В этих случаях легко определяются первые интегралы движения электронов, которые носят название законов сохранения. Законы сохранения играют важную роль в теории электронных приборов по следующим причинам:

1. Они позволяют получить ценную информацию о специфике процессов взаимодействия электрона с электромагнитными полями и произвести анализ этих процессов, не прибегая к численному решению задач. При этом могут быть получены весьма общие и далеко идущие выводы; в частности, во многих случаях еще до решения задачи может быть решен вопрос о возможности или невозможности полезного эффекта при том или другом новом механизме взаимодействия в приборе (если закон сохранения противоречит условиям получения полезного эффекта, то этого эффекта, естественно, не будет).

2. Законы сохранения позволяют контролировать точность численных расчетов. Кроме того, они позволяют эффективно контролировать и правильность формулировки приближенных математических моделей процессов взаимодействия в различных схемах приборов (в этих моделях неизбежны те или иные приближения, т.е. некоторые эффекты и явления игнорируются). Действительно, если интегралы, следующие из приближенных уравнений, противоречат точным, то очевидно, что приближенная модель ошибочна.

3. Законы сохранения могут быть использованы и непосредственно для понижения порядка системы нелинейных уравнений, описывающих процесс взаимодействия электронов с электромагнитными полями.

Наиболее важными являются интегралы движения, не содержащие полевых составляющих. Эти интегралы связывают не только параметры движения электрона, но и позволяют получить достаточно глубокие и определенные выводы о характере этого движения.

### 23.1 Уравнения движения электрона в форме Лагранжа.

Исходными для построения законов сохранения являются уравнения движения в форме Лагранжа

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} . \quad (23.1)$$

Здесь  $p_i$  – обобщенный импульс;  $q_i$  – соответствующая обобщенная координата;  $L$  – функция Лагранжа, которая для электрона имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} - e v A + e \Phi , \quad (23.2)$$

где  $m_0$ ,  $e$  – масса покоя и заряда электрона;  $c$  – скорость света;  $v$  – его скорость;  $\vec{A}$ ,  $\Phi$  – векторный и скалярный потенциалы полного поля.

Полная энергия электрона выражается как

$$\mathcal{E} = mc^2 - e\Phi = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (23.3)$$

где  $m = m_0 \gamma = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ .

Используя (23.1) – (23.3), получаем необходимое для дальнейших преобразований тождество. Для этого продифференцируем (23.3) по времени  $t$  и учтем в соответствии с (23.1), что  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$  и  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ . Тогда:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) = \sum_i \ddot{q}_i p_i + \sum_i \dot{q}_i \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Таким образом, имеет место следствие (23.1), (23.3) вида:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (23.4)$$

### 23.2 Поступательная (трансляционная) симметрия

В случае поступательной симметрии  $\vec{A}$ ,  $\Phi \neq f(z)$ , и поэтому  $L \neq f(z)$ .

Соответственно  $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$  и из (23.1) следует

$$\frac{d}{dt} p_z = \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad p_z = const \quad (23.5)$$

т.е.  $m\dot{z} - eA_z = const$ ,  $A_z = \tilde{A}_z + A_z^0$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи интеграла (23.4)

1. Н-волны на частоте отсечки,  $\tilde{A}_z = 0$ , магнитостатическое поле азимутально-симметричное, и поэтому  $\tilde{A}_z^0 = 0$  (гирорезонансные приборы с регулярной волноводной системой при настройке на критическую длину волны). Естественно, что даже при такой идеализации нельзя утверждать, что  $\vec{A}$ ,  $\Phi \neq f(z)$ , однако имеются протяженные участки взаимодействия (рис. 23.1), где можно считать, что  $\vec{A}$ ,  $\Phi \neq f(z)$ . На этих участках имеет место точный интеграл движения:

$$m\dot{z} = const. \quad (23.6)$$

т.е. продольный механический импульс сохраняется.

Обратимся к рис. 23.1, поясняющему механизм взаимодействия в рассматриваемом случае. На рис. 23.1,а изображен участок круглого волновода на частоте отсечки волны  $H_{01}$ . В этом случае фазовая скорость  $v_\phi \rightarrow \infty$  и распределение компонентов поля не зависит от  $z$ . Винтовой электронный поток,

формируемый продольным магнитостатическим полем с индукцией  $B^0$ , взаимодействует с компонентами поля  $H_{01}$ . Траектория электрона в однородном продольном магнитном поле с индукцией  $B^0$  имеет вид спирали, как это изображено на [рис. 23.1,а](#). На [рис. 23.1,б](#) изображено поперечное вращение электрона в однородном магнитном поле.

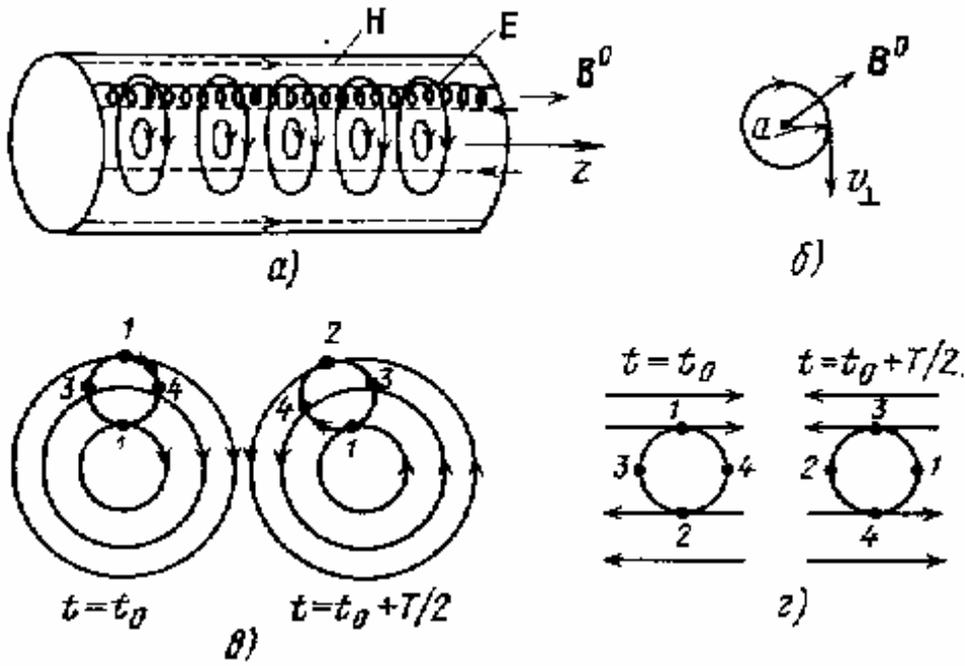


Рис. 23.1.

Здесь  $a$  – радиус вращения электрона (радиус ларморовской орбиты);  $v_{\perp}$  – поперечная скорость электрона. Центробежная сила  $\frac{mv_{\perp}^2}{a}$  уравнивается центростремительной, в качестве которой выступает магнитная составляющая силы Лоренца  $eB^0v_{\perp}$ . Если считать, что круговое движение электрона не возмущается, то  $v_{\perp} = a\Omega$ , где  $\Omega$  – угловая частота вращения электрона в магнитном поле  $B^0$ .

Из баланса сил следует  $\Omega = \frac{B^0 e}{m}$ . Эта формула показывает, что вращение электрона в постоянном магнитном поле неизохронно, т.е. угловая частота вращения  $\Omega$  зависит от массы электрона  $\tilde{m}$ : с ростом массы (т. е. при ускорении электрона) его частота вращения уменьшается; у тормозящегося электрона частота вращения, наоборот, возрастает. За счет этого возможна релятивистская фазовая группировка электронов, лежащая в основе механизма взаимодействия в гирорезонансных приборах. Для накопления эффектов взаимодействия необходимо, чтобы фаза средней за период вращения силы

электромагнитного поля, воздействующей на электрон, изменялась медленно во времени. Такое условие (называемое условием синхронизма) обеспечивается при  $k\Omega \approx \omega$ , где  $k$  — целое число.

На [рис. 23.1,в](#) иллюстрируется случай  $k = 1$ . В момент  $t_0$  электрическое поле достигает максимального значения: при этом электрон 1 оказывается в максимальной тормозящей фазе поля (электрическая сила  $\vec{F} = -e\vec{E}$  направлена противоположно вектору его скорости), электрон 2 — в максимальной ускоряющей фазе, электроны 3 и 4 «нейтральны»: воздействующие на них силы нормальны к траектории. Через полупериод в момент  $t = t_0 + \frac{T}{2}$ , как видно из [рис. 23.1, в](#), относительные фазы электронов во внешнем поле не меняются: электрон 1 опять оказывается в тормозящей фазе, 2 — в ускоряющей, электроны 3, 4 остаются «нейтральными». Очевидно, что с течением времени масса электрона 1 уменьшится, а электрона 2 увеличится. Изменение же частоты вращения будет обратным, за счет этого изменения электроны 1 и 2 сблизятся с электроном 4; произойдет, следовательно, фазовая группировка.

На [рис. 23.1,з](#) иллюстрируется случай  $\omega \approx 2\Omega$ . При этом наиболее выгодным является положение ведущего центра орбиты электрона в узле распределения поперечной составляющей  $\vec{E}$ . Теперь электроны 1, 2 — тормозящиеся, 3, 4 — ускоряющиеся. Очевидно, что если электронный поток на входе области взаимодействия имеет равномерное по фазам вращения распределение электронов (равноперемешанный поток), то за счет фазовой группировки при  $k = 2$  возникают два фазовых сгустка: тормозящиеся электроны 1 сблизятся с ускоряющимися электронами 4, а электроны 2 — с электронами 3.

Вернемся теперь к интегралу движения (23.6). Как видно из структуры поля на [рис. 23.1, а](#), осевые составляющие сил поля равны нулю, т. е.  $d(m\dot{z})/dt = F_z = 0$ , что и соответствует интегралу (23.6). Интеграл (23.6) приводит к очевидному, но тем не менее интересному с физической точки зрения выводу: тормозящийся электрон (масса которого уменьшается) ускоряется по направлению  $z$  (релятивистское ускорение).

2. Случай  $E_{mn0}$ -полей ( $E_{mn}$ -волны на частоте отсечки). При этом условии  $L \neq f(z)$  выполняется точно и мы получаем при  $A_z^0 = 0$

$$m\dot{z} - e\tilde{A}_z = const \quad (23.7)$$

Рассмотрим опять случай гирорезонансного взаимодействия электронов, теперь уже с полем  $E_{mn0}$ . На [рис. 23.2,а](#) рассмотрено взаимодействие винтового электронного потока с полем  $E_{110}$  круглого резонатора. Теперь, в отличие от предыдущего случая, имеются синхронные

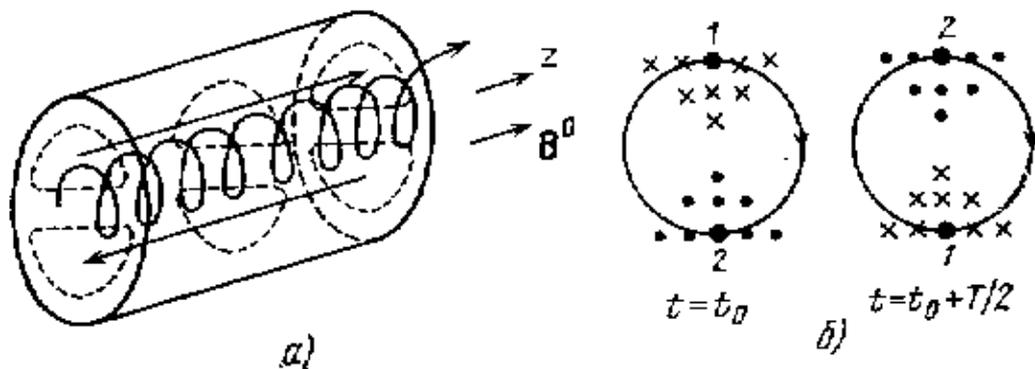


Рис . 23.2.

составляющие как продольной магнитной, так и продольной электрической сил Лоренца. Образование синхронной составляющей силы  $F_{ez} = -eE_z$  иллюстрирует [рис. 23.2, б](#). Для существования этой составляющей достаточно поперечной неоднородности в распределении  $E_z$ ; наиболее же ясна ситуация, когда ведущий центр электронной орбиты совпадает с узлом распределения  $E_z$ , как это показано на [рис. 23.2, б](#).

Обратимся теперь к интегралу (23.7). Положим, что выполняются условия резонансного взаимодействия на  $k$ -й гармонике циклотронной частоты (т. е.  $\omega \approx k\Omega$ ). В этом случае эффекты взаимодействия носят кумулятивный характер и значительные изменения параметров движения электрона возможны в относительно слабом ВЧ поле (в отличие от нерезонансного случая, когда для значительного изменения траектории электрона нужны сильные поля). Поэтому можно считать, что  $|\overline{m\dot{z}}|^T \gg \overline{A_z^T}$ . При таком условии в первом приближении (23.7) дает  $\overline{m\dot{z}^T} \approx const$ .

Последнее приводит к далеко не очевидному заранее выводу: действие продольных магнитной и электрической сил в поле  $E_{mn0}$  при условии гирорезонанса взаимно компенсируется. Отбор энергии электрона в рассматриваемой схеме происходит весьма своеобразно: поперечная скорость ВЧ магнитным полем преобразуется в продольную, причем так, что торможение электрона продольным электрическим полем компенсируется. Более того, с уменьшением энергии электрона (с уменьшением  $m$ )  $\dot{z}$  возрастает, поскольку  $\overline{m\dot{z}^T} \approx const$ . Отсюда, в частности, приходим к выводу, что прямолинейный на входе в поле  $E_{mn0}$  пучок при условии гирорезонанса может только отбирать энергию от поля, но не отдавать ее. Это не означает, конечно, что обратная ситуация невозможна. Более подробный анализ показывает, что отдача энергии (и довольно эффективная) возможна, если  $B^0$  в 2—3 раза превышает синхронное значение, т.е. отбор энергии от прямолинейного электронного пучка возможен в несинхронном режиме под действием сильных  $E_{mn0}$ -полей. Это явление представляет интерес в случае мощных релятивистских электронных потоков, когда отдаваемая потоком энергия достаточна для поддержания в нагруженном резонаторе напряженности поля необходимой амплитуды.

Следует обратить внимание еще на один физический результат, вытекающий из (23.6) и полученного частного следствия (23.7): поскольку  $m\dot{z} \approx const$  ( $H_{011}, H_{mn1}, L \gg \lambda$ ) или  $\overline{m\dot{z}^T} \approx const$  ( $E_{mn0}$ ) в слабом ВЧ поле относительные изменения угловой скорости вращения электрона и скорости продольного движения одинаковы ( $\frac{\Delta\dot{z}}{\dot{z}} = -\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$ ,  $|\Delta m| \ll m$ ). Иначе говоря, в слабом ВЧ поле электроны движутся вблизи невозмущенной винтовой траектории, а их группировка происходит за счет изменения под действием ВЧ поля скорости движения вдоль этой траектории (на это физическое следствие трансляционных интегралов движения обратил внимание авторов В. К. Юлпатов).

### 23.3. Азимутальная симметрия

В этом случае  $L \neq f(\varphi)$  и соответственно  $\frac{dp_\varphi}{dT} = \frac{\Delta L}{\partial\varphi} = 0$  или

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} - erA_\varphi = const, \quad A_\varphi = A_\varphi^0 + \tilde{A}_\varphi \quad (23.8)$$

Закон сохранения (23.8) имеет достаточно широкую область приложения. Рассмотрим здесь наиболее интересный частный случай — гиротрон со слабонеоднородным магнитостатическим полем. При этом

$$A_\varphi^0 = \frac{r}{2} \left[ B^0(z) - \frac{r^2 B^{0''}}{8} + \dots \right] \approx \frac{rB^0}{2} \quad (23.9)$$

Положим также, что  $\tilde{A}_\varphi \ll A_\varphi^0$ , т.е. что ВЧ поле мало по сравнению со статическим и лишь слабо возмущает электронную траекторию. Используя это приближение, а также (23.9), из (23.8) получаем

$$mr^2\dot{\varphi} - B^0 er^2/2 = const. \quad (23.10)$$

Проведем в (23.10) усреднение по периоду вращения электрона. Введем обозначения  $a, r_0, \Phi$ , как это указано на рис. 23.3:  $a$  — мгновенный радиус вращения электрона;  $r_0$  — мгновенный радиус ведущего центра орбиты электрона;  $\Phi$  — угол вращения по орбите с радиусом  $a$ . Тогда:

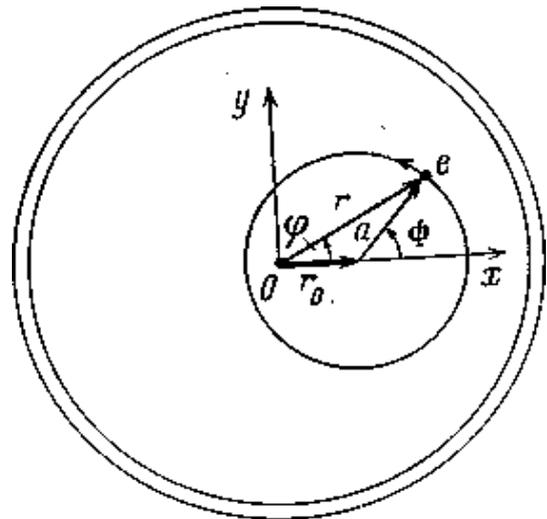


рис. 23.3.

$$r^2 = a^2 + r_0^2 + 2ar_0 \cos\Phi; \quad r^2\dot{\varphi} = \dot{\Phi} \left| r^2 - (r^2 + r_0^2 - a^2)/2 \right|, \quad \dot{\Phi} = \Omega. \quad (23.11)$$

Усредним величины  $r^2$  и  $r^2\dot{\phi}$  по периоду вращения электрона:

$$\begin{aligned}\overline{r^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\Phi = a^2 + r_0^2; \\ \overline{r^2\dot{\phi}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \dot{\phi} d\Phi = \Omega a^2.\end{aligned}\tag{23.12}$$

Учитывая (23.12), (23.11), а также то, что  $\Omega = B^0 e/m$ , из (23.10) получаем

$$B^0(a^2 - r_0^2) = const.\tag{23.13}$$

Полученный результат (23.13) является усредненным орбитально-дрейфовым интегралом движения электрона в азимутально-симметричном поле. Он связывает радиус ларморовской орбиты электрона  $a$  и радиус ведущего центра этой орбиты  $r_0$ .

Как следует из (23.13), при  $B^0 = const$

$$a^2 - r_0^2 = const\tag{23.14}$$

Закон сохранения (23.14) указывает на то, что при уменьшении  $a$  уменьшается и  $r_0$ , и наоборот. Таким образом, радиус ведущего центра тормозящего электрона уменьшается, а ускоряющегося — увеличивается. По этой причине средний радиус ведущих центров трубчатого пучка в гиротроне следует выбирать несколько большим радиуса, на котором достигается максимум рабочей гармоники поля. Тогда в дополнение к основному механизму взаимодействия в гиротроне будет иметь место механизм селекции электронов: тормозящиеся электроны будут перемещаться в область более сильного поля, ускоряющиеся — в область более слабого поля.

Если ларморовский радиус намного меньше радиуса ведущего центра:  $a \ll R$ , то из (23.13) следует

$$r_0 = \frac{const}{\sqrt{B^0}}\tag{23.15}$$

Уравнение (23.15) может использоваться в качестве первого приближения для траектории ведущего центра электронной орбиты в гиротроне.

#### 23.4. Вращающиеся поля

Среди многообразия видов взаимодействия мощных релятивистских и слаборелятивистских электронных потоков с электромагнитными полями особый интерес представляют такие, в которых осуществляется взаимодействие электронов с вращающимся электромагнитным полем в условиях резонанса на одной из гармоник циклотронной частоты. К приборам (схемам), в которых осуществляются подобные виды взаимодействия, относятся гирорезонансные приборы, пениотрон, усилители с магнитным преобразованием дрейфовой энергии в осцилляторную. В гирорезонансных приборах высокая эффективность взаимодействия обусловлена релятивистским механиз-

мом орбитальной группировки; в двух последних схемах идеальные условия фазовой группировки достигаются благодаря действию специальных механизмов перемещения (дрейфа) ведущих центров электронных ротаторов во вращающихся электромагнитных полях. Во всех указанных схемах для правильного описания (и тем более для количественных оценок) необходимо корректное выделение уравнения дрейфа ведущего центра. Такое выделение может быть осуществлено в форме орбитально-дрейфового интеграла движения, который получается ввиду пространственно-временной симметрии вращающегося электромагнитного поля.

Рассмотрим случай вращающегося электромагнитного поля, которое в частном случае может быть задано функцией Герца вида

$$\dot{\Pi}^{e,m} = |A_m J_n|(\chi^{e,m}, r) e^{j(\omega t \pm n\varphi)}$$

$$\chi^e = \frac{v_{ni}}{b} [J_n(v_{ni}) = 0], \quad \chi^m = \frac{\mu_{ni}}{b} [J'_n(\mu_{ni}) = 0],$$

где  $b$  - радиус волновода.

Положим, что магнитостатическое поле направлено вдоль оси вращения поля, т. е. вдоль  $z$ . Тогда функция Лагранжа  $L = L(r, z, \theta, \dot{r}, \dot{z}, \dot{\varphi})$ , где  $\theta = \omega t \pm n\varphi$ . Далее для упрощения записи положим  $\theta = \omega t - n\varphi$ , приписав

знак числу  $n$ . Определим  $\frac{\partial L}{\partial t}$  и  $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -n \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \frac{\partial L}{\partial \theta}. \quad (23.16)$$

Из (23.16) получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\omega}{n} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\omega}{n} \frac{\partial p_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (23.17)$$

Заменяя в (23.17)  $\partial L / \partial t$  на  $-d\mathcal{E} / dt$  в соответствии с (23.3) приходим к следующему интегралу движения:

$$\mathcal{E} - \frac{\omega}{n} (mr^2 \dot{\varphi} - erA_\varphi) = const$$

или

$$mc^2 - e\Phi - \frac{\omega}{n} r^2 m \dot{\varphi} + e \frac{\omega}{n} r A_\varphi = const \quad (23.18)$$

1. Рассмотрим случай, когда

$\Phi^0 = 0, \tilde{A}_\varphi \ll A_\varphi^0, e\tilde{\Phi} \ll (\omega/n)r_m^2 \dot{\varphi}, A_\varphi^0 = B^0(Z)r/2$  (слабонеоднородное магнитостатическое поле). При перечисленных условиях из (23.18) получаем

$$mc^2 - \frac{\omega}{n} \left( \dot{\varphi} - \frac{\Omega}{2} \right) mr^2, \quad \Omega = \frac{e}{m} B^0(z). \quad (23.19)$$

Заметим, что в узлах стоячего поля  $\tilde{A}_\varphi = \tilde{\Phi} = 0$  и интеграл (23.19) в этих точках является точным.

Интеграл (23.19) открывает широкие возможности для анализа особенностей взаимодействия электрона с вращающимися полями. Рассмотрим некоторые из них.

Исследуем вопрос о возможности генерации на прямолинейном электронном потоке во вращающемся поле. Пусть индекс 1 соответствует входу в область взаимодействия, индекс 2 — выходу. Тогда  $r(0) = r_1 = 0$  и из (23.19) получаем

$$\Delta \mathcal{E} = m_1 c^2 - m_2 c^2 = -\frac{\omega}{n} m^2 r_2^2 \frac{\dot{\varphi}_2 - \Omega_2}{2}. \quad (23.20)$$

Из (23.19) следует, что отбор энергии от пучка электронов при  $\omega/n > 0$  (направления вращения электронов в магнитном поле и поля совпадают) возможен лишь при  $\dot{\varphi}_2 < \Omega_2/2$ , т.е. при смещении ведущего центра электронной орбиты более чем на радиус этой орбиты. При  $\omega/n < 0$  (направления вращения электронов и поля противоположны), наоборот, необходимо выполнение условия  $\dot{\varphi}_2 > \Omega_2/2$ .

В случае плоских Т-волн  $\tilde{A}_z = 0$ ,  $\tilde{A}_t \neq \vec{f}(\vec{r}_t)$ . Если положить также, что  $\vec{B}_0 = \vec{z}_0 B^0 = const$ , то нетрудно показать, что  $(m\vec{v})_t - (e\tilde{A}_t + e\vec{B}^0 r \varphi_0) = const$ .

При взаимодействии прямолинейного электронного потока с вращающимся Т-полем резонатора  $r_1 = 0$ ,  $m\vec{v}_{t1} = 0$ ,  $\tilde{A}_{t1} = \tilde{A}_{t2} = 0$  (на поперечных стенках резонатора). В этом случае

$$m_2 \vec{v}_{t2} = e B_0 r \varphi_0 = m_2 r_2 \dot{\varphi}_2 \varphi_0, \text{ т.е. } \dot{\varphi}_2 = e B^0 / m_2 = \Omega_2 \quad (23.21)$$

Результат (23.21) показывает, что развертка электронного потока в Т-поле происходит точно вокруг направления z. Таким образом, для Т-волн (23.20) дает

$$\Delta \mathcal{E} = -(\omega/2n) m_2 r_2^2 \Omega_2. \quad (23.22)$$

Соотношение (23.22) указывает на то, что  $\Delta \mathcal{E} > 0$  при  $\omega \Omega_2 < 0$  т.е. отбор энергии от прямолинейного электронного пучка во вращающемся Т-поле возможен только при встречном вращении поля и электрона в статическом поле  $\vec{B}^0$ . При  $\vec{B}^0 = 0$   $\Omega_2 = 0$  и энергообмен отсутствует. Во вращающемся же Н-поле функцию  $B^0$  выполняет компонент  $\tilde{B}_z$ , поэтому здесь энергообмен возможен и при  $\vec{B}^0 = 0$ . При  $\omega > 0$  и правильном фазировании электрона поле  $\tilde{B}_z$  в месте его нахождения имеет противоположное оси z направление, обеспечивая  $\omega \dot{\varphi}_2 < 0$  и соответственно  $\Delta \mathcal{E} > 0$ .

2. Рассмотрим установившийся режим в цилиндрическом магнетроне. В этом случае в (23.18) присутствуют члены  $B_z^0$ ,  $E_r^0$ ,  $\tilde{A}_\varphi$ , и оно принимает вид

$$mc^2 - \frac{eU_A \ln r/r_k}{\ln r_0/r_k} - \frac{\omega r^2 m \dot{\varphi}}{n} + \frac{m_0 \omega r^2 \Omega_0}{2n} - e\tilde{\Phi} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{n^2 c^2}\right) = const.$$

Здесь  $U_A$  – напряжение на анода;  $r_a, r_k$  – радиусы анода и катода;  $\tilde{\Phi}$  – ВЧ-потенциал замедляющей системы.

3. Исходя из (23.19) получаем усредненный орбитально-дрейфовый интеграл движения электрона во вращающихся полях. Используя (23.12), будем иметь

$$\frac{nmc^2}{e\omega} - \frac{B^0(z)}{2}(a^2 - r_0^2) = const. \quad (23.23)$$

Преобразуем (23.23) к более удобному виду, выделив переменные одного порядка

$$\frac{2n(m - m_0)c^2}{m_0 \Omega_0 \omega} - F(z)(a^2 - r_0^2) = const. \quad (23.24)$$

Здесь  $m_0$  — масса покоя электрона;  $F = \frac{B_0(z)}{B_0^0}$ ;  $B_0^0 = B_0(0)$ ;  $\Omega_0 = \frac{e}{m_0} B_0^0$ .

Выражение (23.24) является общей формой усредненного орбитально-дрейфового интеграла движения, связывающего параметры орбитального движения  $m, a$  с изменением радиуса ведущего центра  $r_0$ .

Рассмотрим некоторые модификации полученного интеграла движения. В случае постоянного магнитного поля (т. е.  $F=1$ ) положим, что в начальном сечении области взаимодействия ( $z = 0$ ) выполняются условия синхронизма с попутной парциальной волной электромагнитного поля на  $k$ -й гармонике циклотронной частоты

$$\omega = k \frac{\Omega_1}{1 - \beta_{\parallel} / \beta_{\varphi}}.$$

Здесь  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel} / c$ ;  $\beta_{\varphi} = v_{\varphi} / c$ ;  $\Omega_1 = \Omega_0 R_1$ ;  $R_1 = \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\perp}^2}$ ;  $\beta_{\perp} = v_{\perp} / c$ ;  $v_{\parallel}, v_{\perp}$  — значения  $v_z$  и  $v_t$  при  $z = 0$ .

При перечисленных условиях из (23.24) получаем

$$r_0^2 + a^2 \left[ \frac{2n}{k} \frac{1 - \beta_{\parallel} / \beta_{\varphi}}{R_1} \frac{R(1 - R)}{\beta_t^2} - 1 \right] = const$$

где  $R = \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}$ ;  $\beta_z^2 = v_z^2 / c^2$ ;  $\beta_t^2 = a^2 \Omega_0^2 R^2 / c^2$ .

Запишем также слаборелятивистское приближение этого интеграла:

$$r_0^2 + a^2 \left\{ \frac{n(1 - \beta_{\parallel} / \beta_{\phi})^2}{k R_1} \left[ 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta_t^2} - \frac{1}{4} \beta_z^2 \left( 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta_t^2} \right)^2 \right] - 1 \right\} = const \quad (23.25)$$

Используя (23.25), получаем также нерелятивистское приближение орбитально-дрейфового интеграла для ТЕ- и Т-полей. В этом случае  $\beta_z = \beta_{\parallel} = const \rightarrow 0$ ;  $\beta_t = \beta_{\perp} \rightarrow 0$ ;  $\beta_z^2 / \beta_t^2 = \beta_{\parallel}^2 c^2 / a^2 \Omega = const / a^2$  и из (23.25) следует

$$r_0^2 + a^2 [n/k - 1] = const .$$

Рассмотрим теперь случай слабонеоднородного магнитостатического поля, причем на  $F(z)$  наложим условие, сохранения синхронизма по всей области взаимодействия для изофазной электронной трубки

$$F(z) / m(1 - \beta_z / \beta_{\phi}) = const \quad (23.26)$$

Тогда комбинируя (23.24), (23.26), получаем

$$\frac{\beta_{\phi} - \beta_z}{\beta_{\phi} R} \left\{ r_0^2 + a^2 \left[ \frac{2n}{k} \left( 1 - \frac{\beta_z}{\beta_{\phi}} \right) \frac{1 - R}{\beta_t^2} - 1 \right] \right\} = const . \quad (23.27)$$

В слаборелятивистском приближении (23.27) дает

$$\frac{\beta_{\phi} - \beta_z}{\beta_{\phi} R} \left\{ r_0^2 + a^2 \left[ \frac{n}{k} \left( 1 - \frac{\beta_z}{\beta_{\phi}} \right) \left( 1 + \frac{\beta_z^2}{\beta_t^2} \right) - 1 \right] \right\} = const .$$

### 23.5. Бегущие в направлении $z$ волны

Рассмотрим случай, когда электронный поток взаимодействует с группой бегущих волн (возможно, разных частот), имеющих одинаковую фазовую скорость  $v_{\phi}$ . Такая ситуация возможна как в свободном пространстве, так и в направляющих системах. В этом случае  $L(z \pm v_{\phi} t)$  и поэтому имеет место связь производных  $\partial L / \partial t$  и  $\partial L / \partial z$  вида

$$\frac{\partial L}{\partial t} \mp v_{\phi} \frac{\partial L}{\partial z} = 0 . \quad (23.28)$$

Учитывая (23.1), (23.28) и (23.4), получаем

$$\mathcal{E} \mp v_{\phi} (m\dot{z} - eA_z) = const, \quad \mathcal{E} = mc^2 - e\Phi . \quad (23.29)$$

Рассмотрим некоторые следствия интеграла (2.29).

Для ламп бегущей и обратной волны типа О (ЛБВ-О, ЛОВ-О) в нерелятивистском случае ( $v_{\phi} / c \ll 1$ ,  $v_z / c \ll 1$ )

$$\frac{1}{2} v_z^2 \mp v_{\phi} v_z - \frac{e}{m_0} \tilde{\Phi} = const .$$

Здесь  $\tilde{\Phi}$  — ВЧ потенциал замедляющей системы.

Для ламп бегущей и обратной волны типа М (ЛБВ-М, ЛОВ-М) планарного типа  $\vec{B}_t^0 = \vec{x}_0 B^0$ ,  $\vec{E}^0 = -\vec{y}_0 E^0$ , и из (23.29) следует

$$mc^2 \left[ 1 - \frac{y}{c^2} \left( \Omega \frac{E_0}{B_0} \mp v_\phi \Omega \right) \mp \beta_\phi \beta_z \right] - e\tilde{\Phi}(1 - \beta_\phi^2) = const.$$

В случае Н-волн, продольного магнитного поля  $\vec{B}_0 = \vec{z}_0 B^0$ ,  $B^0 = const$ , отсутствия электростатических полей,  $\tilde{A}_z = 0$ ,  $\tilde{\Phi} = 0$  (23.29) дает

$$m(1 \mp \beta_\phi \beta_z) = const. \quad (23.30)$$

Для попутных волн [нижний знак в (23.30)] продольные и поперечные составляющие силы Лоренца синфазны — тормозящиеся поперечными силами электроны тормозятся и продольными; для встречных волн продольные и поперечные составляющие противофазны. С другой стороны, если бы продольных сил не было, продольный импульс электрона оставался бы неизменным ( $m\beta_z = const$ ) и при уменьшении  $m$  возрастала бы величина  $\beta_z$  (релятивистское ускорение). Продольные силы уменьшаются с увеличением  $\beta_\phi$  и при некотором  $\beta_{\phi_{кр}} = 1/\beta_{0z}$  торможение, вызываемое ими, компенсируется релятивистским ускорением в случае попутных волн.

В случае Е-волн, продольного магнитного поля  $\vec{B}^0 = \vec{z}_0 B^0$ ,  $B^0 = const$ , отсутствия электростатических полей (только  $\tilde{A}_z \neq 0$ ) полагаем  $\tilde{\Phi} = 0$  (один из возможных видов калибровки потенциалов). Тогда из (23.29) имеем

$$m(1 \mp \beta_\phi \beta_z) \pm \frac{v_\phi e A_z}{c^2} = const. \quad (23.31)$$

В случае гирорезонансных приборов можно считать, что  $|e A_z v_\phi| \ll mc^2$  и при выполнении условий циклотронного резонанса имеет место усредненный интеграл типа (23.30):  $\overline{m(1 \pm \beta_\phi \beta_z)^\Omega} = const.$

Для комбинированного интеграла движения в случае вращающихся (поляризованных по кругу) Е-волн вместе с (23.31) можно использовать интеграл (23.18) и при этом учесть, что для Е-волны имеет место связь компонентов векторного потенциала вида (на эту возможность обратил внимание авторов В. А. Жураховский)

$$\frac{\omega}{n} r A_\phi = \mp \frac{c \beta_\phi}{\beta_\phi^2 - 1} \tilde{A}_z. \quad (23.32)$$

Комбинируя (23.31), (23.18) и (23.32), получаем следующий точный интеграл движения в случае Е-волн, в котором отсутствуют силовые ВЧ составляющие:

$$m \left\{ (\beta_\phi^2 - 1) \left[ 1 - \frac{\omega r^2}{nc^2} \left( \dot{\phi} - \frac{\Omega}{2} \right) \right] + (1 \mp \beta_\phi \beta_z) \right\} = const.$$

Использование (23.1), (23.4) часто оказывается полезным и в тех случаях, когда в (23.2) имеются «возмущающие» зависимости от координат, не позволяющие сформулировать точные законы сохранения. В специальных случаях соотношение (23.4) дает возможность полностью или частично исклю-

читать явно входящие силовые составляющие в уравнениях для одной или нескольких фазовых переменных.

Для иллюстрации рассмотрим случай бегущих волн и слабонеоднородного азимутально-симметричного магнитостатического поля

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} - e\vec{v}\vec{A}(r, \varphi, \mp v_\phi t - z) + e\vec{\Phi}(r, \varphi, \mp v_\phi t - z) - e v_\phi A_\phi^0(r, z) = \\ = L_1(r, \varphi, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) + L_2(r, \varphi, z, \dot{\varphi}), \quad \theta = \mp v_\phi t - z.$$

Образуем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial L_2}{\partial z} = -\frac{\partial L_1}{\partial \theta} + \frac{\partial L_2}{\partial z} \quad (23.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \pm v_\phi \frac{\partial L_1}{\partial \theta} \quad (23.34)$$

Умножая обе части (23.33) на  $\pm v_\phi$  и складывая получившиеся с (23.34), находим

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \mp v_\phi \frac{\partial L}{\partial z} \pm v_\phi \frac{\partial L_2}{\partial z}$$

Поскольку  $\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{dp_z}{dt}$  в соответствии с (23.1), а  $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  в соответствии с (23.4), окончательно имеем

$$\pm v_\phi \dot{p}_z - \dot{\mathcal{E}} = \pm v_\phi \frac{\partial L_2}{\partial z}. \quad (23.35)$$

Используя связи  $p_z = m v_z - e\vec{A}_z$ ,  $\mathcal{E} = mc^2 - e\vec{\Phi}$ ,  $\Omega = \frac{e}{m} B_0(z)$ ,

$$A_\phi^0 = r \frac{B^0(z)}{2}, \quad F = \frac{B^0(z)}{B_s}, \quad \dot{F} = \frac{v_z \partial F}{\partial z}$$

(23.35) можно записать в следующем виде:

$$\dot{\beta}_z = \pm \frac{\dot{m}}{m} \frac{1 \mp \beta_\phi \beta_z}{\beta_\phi} - \frac{r^2 \Omega \dot{\varphi} \dot{F}}{2c^2 \beta_z F} \mp \frac{e\dot{\Phi}}{mc^2} + \frac{e\dot{A}_z}{mc} \quad (23.36)$$

В случае, когда поддерживается условие синхронизма ( $\Omega = \omega/k$ ) и перемещение электрона происходит в среднем вдоль силовой линии магнитостатического поля,

$\dot{\Phi} = 0$ ,  $\dot{A} = 0$ ,  $r^2 \Omega \dot{\varphi} = \beta_t^2 c^2$  и из (23.35) следует

$$\dot{\beta}_z = \pm \frac{\dot{m}}{m} \frac{1 \mp \beta_\phi \beta_z}{\beta_\phi} - \frac{\beta_t^2 \dot{F}}{2\beta_z F}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рамо С. и Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. М., Л.: ОГИЗ, 1948, 631с.
2. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М., Л.: ОГИЗ, 1948, 539с.
3. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. Л.: ВКАС, 1949, 426с.
4. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1961, 371с.
5. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973, 607с.
6. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967, 460с.
7. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989, 544с.
8. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М.: Наука, 1983, 304с.
9. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1957, 581с.
10. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988, 440с.
11. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966, 475с.
12. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974, 327с.
13. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1966, 624с.
14. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Связь, 1971, 602с.
15. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1971, 486с.
16. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Советское радио, 1979, 376с.
17. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966, 240с.
18. Фиалковский О.И. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1978, 430с.
19. Семенов Н.А. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973, 470с.
20. Машковцев Б.М., Цибизов К.Н., Емелин Б.Ф. Теория волноводов. М.: Наука, 1966, 351с.
21. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981, 312с.
22. Сушкевич В.И. Нерегулярные линейные волноводные системы. М.: Советское радио, 1967, 295с.
23. Коган Н.А., Машковцев Б.М., Цибизов К.Н. Сложные волноводные системы. Л.: Судпром ГИЗ, 1963, 356с.

24. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.,Л.: Энергия, 1967, 376с.
25. Кураев А.А. Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ. Мн.: Наука и техника, 1979, 336с.
26. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. М.: Радио и связь, 1986, 208с.
27. Кураев А.А., Байбурин В.Б., Ильин Е.М. Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ приборов. Мн.: Наука и техника, 1990, 392с.
28. Демидчик В.И. Электродинамика СВЧ. Мн.: Университетское, 1992, 255с.
29. Колесников П.М. Теория неоднородных световодов и резонаторов. Мн.: Наука и техника, 1982, 296с.
30. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Издательство МГУ, 1983, 232с.
31. Илларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов. М.: Советское радио, 1980, 200с.
32. Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Полосковые линии передачи. М.: Наука, 1980, 312с.
33. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневых частот. М.: Наука, 1996, 304с.
34. Кураев А.А. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. Мн.: Наука и техника, 1971, 312с.
35. Кац Б.М., Мещанов В.П., Фельдштейн А.Л. Оптимальный синтез устройств СВЧ с Т-волнами. М.: Радио и связь, 1984, 288с.
36. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964, 428с.
37. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970, 520с.
38. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Издательство ХГУ, 1971, 400с.
39. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Советское радио, 1962, 243с.
40. Курутин Е.П., Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах. М.: Наука, 1975, 196с.
41. Нефедов Е.И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979, 272с.
42. Гончаренко А.А., Кравченко В.Ф., Пономарев В.И. Дистанционное зондирование неоднородных сред. М.: Машиностроение, 1991, 256с.
43. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. М.: Высшая школа, 1975, 280с.
44. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. М.: Связь, 1972, 336с.
45. Черный Ф.Б. Распространение радиоволн. М.: Советское радио, 1972, 464с.

46. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Издательство АН СССР, 1961, 546с.
47. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р., Смирнов В.П. Справочник по элементам волноводной техники. М.: Советское радио, 1967, 651с.
48. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М.: ГИФМЛ, 1962, 480с.
49. Говорков В.А., Купалян С.Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1963, 371с.
50. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ // Под редакцией В.В. Никольского. М.: Радио и связь, 1982, 272с.
51. Микроэлектронные устройства СВЧ // Под редакцией Г.И. Веселова. М.: Высшая школа, 1988, 280с.
52. Векштейн Е.Г. Сборник задач по электродинамике. М.: Высшая школа, 1966, 287с.
53. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств // Под редакцией в.и. Вольмана. М.: Радио и связь, 1982, 328с.
54. Бергер М.Н., Капилевич Б.Ю. Прямоугольные волноводы с диэлектриками. М.: Советское радио, 1973, 254с.
55. Гвоздев В.И., Нефедов Е.И. Объемные интегральные схемы СВЧ. М.: Наука, 1985, 256с.
56. Лавров В.М. Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн. М.: Связь, 1964, 368с.
57. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. М.: Высшая школа, 1980, 399с.
58. Князь А.И. Электродинамика информационных систем. М.: Радио и связь, 1994, 392с.

## ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

### ПО ГЛАВАМ

- Глава 1: [1...10, 14...23, 27, 28, 55...57].
- Глава 2: [1...10, 14...22, 27, 28, 55,56].
- Глава 3: [1...10, 14...22, 55, 56].
- Глава 4: [4...10, 55, 56].
- Глава 5: [1...10, 14...23, 27, 28, 55...57].
- Глава 6: [1...12, 14...23, 27...33, 55, 56].
- Глава 8: [2, 24...26, 29, 30].
- Глава 9: [31, 32, 34].
- Глава 10: [31, 32, 34].
- Глава 11: [3...11, 14...19, 27, 28, 55, 56].
- Глава 12: [5...7, 16...19, 27, 55, 56].
- Глава 13: [5...8, 16...23, 55...57].
- Глава 14: [5...8, 16...23, 55...57].
- Глава 15: [5...8, 14...16].

Глава 16: [4...10, 14...16, 55...57].  
Глава 17: [42...45].  
Глава 18: [35...45].  
Глава 19: [4...7, 41...44].  
Глава 20: [6, 7, 16, 36, 38, 41...44].  
Глава 21: [6, 7, 16, 41...44].  
Глава 22: [6, 7, 16, 42...44].  
Глава 23: [24...26, 33].

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ЧАСТЬ I ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Интегральная формулировка УМ

1.2. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности

1.3. Физическое содержание первого УМ

1.4. Материальные уравнения

#### ГЛАВА II. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭМП

2.1. ГУ для тангенциальных составляющих векторов ЭМП

2.2. ГУ для нормальных составляющих векторов ЭМП

#### ГЛАВА III. ЭНЕРГИЯ ЭМП

3.1. Удельная мощность сторонних источников в ЭМП.

Мощность сторонних источников

3.2. Баланс энергии в ЭМП. Теорема Умова-Пойтинга

#### ГЛАВА IV. КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ И ТЕОРЕМА

##### О КОМПЛЕКСНОЙ МОЩНОСТИ

4.1. УМ в комплексной форме

4.2. Теорема о комплексной мощности

#### ГЛАВА V. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И

##### ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

5.1. Волновые уравнения

5.2. Электродинамические потенциалы

5.3. Электрический вектор Герца или поляризационный потенциал

5.4. Фиктивные магнитные точки и заряды. Перестановочная двойственность УМ. Магнитный вектор Герца

5.5. Граничные условия для  $\Pi_z^e$ ,  $\Pi_z^m$  на идеально проводящих продольных и поперечных поверхностях

### ЧАСТЬ 2 НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ИЛИ ВОЛНОВОДЫ

#### ГЛАВА VI. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

6.1. Типы направляющих систем

6.2. Постановка и схема решения волноводных задач (регулярные ВВ)

6.3. Общие свойства электрических (E) волн в регулярных волноводах

6.4. Общие свойства магнитных (H) волн в регулярных ВВ

6.5. Т-волны в направляющих системах

6.6. Дисперсия собственных волн в регулярных ВВ. Докритический и закритический диапазоны волновода

6.7. Электрические (E) типы волн в прямоугольном волноводе

6.8. Магнитные волны в прямоугольном волноводе

6.9. Вырождение волн в прямоугольном волноводе. Доминантная волна и рабочий диапазон прямоугольного волновода

[6.10. Электрические \(E\) волны в волноводах с круговыми сечением](#)

[6.11. Магнитные \(H\) волны в круглом волноводе](#)

[6.12. Потери и затухание волн в волноводах](#)

## [ГЛАВА VII. ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ СТОРОННИМИ ИСТОЧНИКАМИ](#)

[7.1. Лемма Лоренца. Теорема взаимности](#)

[7.2. Ортогональность собственных волн в регулярных волноводах](#)

[7.3. Уравнения возбуждения регулярных волноводов сторонними токами](#)

[7.4. Способы возбуждения волноводов \(примеры\)](#)

## [ГЛАВА VIII. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ](#)

[8.1. Неортогональные координатные системы](#)

[8.2. Дифференциальные операторы](#)

[8.3. Продольно-азимутально нерегулярный волновод. Контравариантные компоненты уравнений Максвелла](#)

[8.4. Уравнение возбуждения произвольно-нерегулярного волновода сторонними токами](#)

[8.5. Самосогласованные нелинейные уравнения ЛБВ-0 с замедляющей системой в виде продольно-нерегулярного волновода](#)

[8.6. Уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного коаксиального волновода](#)

[8.7. Уравнения возбуждения нерегулярных замедляющих системах](#)

[8.8. Нерегулярные волноводы с прямоугольным сечением. Теория и приложения](#)

[8.9. T-функции для решения двухточечных задач в теории нерегулярных волноводов T-функции для решения двухточечных задач в теории нерегулярных волноводов](#)

## [ГЛАВА IX. ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ](#)

[9.1. Телеграфные уравнения](#)

[9.2. Расчет параметров коаксиальной и двухпроводной линий](#)

[9.3. Трансформирующие свойства отрезков линий передачи](#)

[9.4. Короткозамкнутые и разомкнутые на конце отрезки линии передачи \(шлейфы\)](#)

[9.5. Частичное отражение волн в линиях передачи](#)

## [ГЛАВА X. ПЛАНАРНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ](#)

[10.1. Понятие планарных линий передачи](#)

[10.2. Симметричная полосковая линия](#)

[10.3. Несимметричная полосковая линия](#)

[10.4. Симметричная щелевая линия](#)

[10.5. Несимметричная щелевая линия](#)

[10.6. Модифицированный метод неортогональных рядов для расчета характеристик полосковых линий передачи](#)

[10.6.1. Общая формулировка метода](#)

[10.6.2. Расчет физических параметров полосковых линий передачи](#)

[10.6.3. Пример использования метода неортогональных рядов:](#)

[расчет характеристик области сильной связи трехдецибельного направленного ответвителя](#)

[10.7. Копланарная линия передачи](#)

[10.8. Четная и нечетная моды в связанных полосковых линиях](#)

## [ЧАСТЬ 3 ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ](#)

### [ГЛАВА XI. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ](#)

[11.1. Типы объемных резонаторов](#)

[11.2. Поля в ОР как в отрезках регулярных волноводов с короткозамыкающими крышками](#)

[11.3. Расчет полей в резонаторах с помощью потенциалов Герца](#)

[11.3.1. Прямоугольный резонатор](#)

[11.3.2. Цилиндрический резонатор](#)

[11.4. Добротность собственных колебаний в резонаторах. Внешняя и нагруженная добротности](#)

### [ГЛАВА XII. ВОЗБУЖДЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ СТОРОННИМИ ТОКАМИ](#)

[12.1. Постановка задачи](#)

[12.2. Свойства собственных функций резонатора](#)

[12.3. Уравнение возбуждения резонатора](#)

[12.4. Способы возбуждения резонаторов](#)

## [ЧАСТЬ 4 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ](#)

### [ГЛАВА XIII. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ](#)

[13.1. Расчет полей с помощью электрического вектора Герца](#)

[13.2. Анализ поля ЭЭИ в квазистатической \(ближней\) зоне](#)

[13.3. Анализ поля ЭЭИ в волновой \(дальней\) зоне](#)

### [ГЛАВА XIV. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО МАГНИТНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ \(ЭМИ\)](#)

[14.1. Расчет поля ЭМИ](#)

[14.2. Анализ поля ЭМИ в квазистатической \(ближней\) зоне](#)

[14.3. Анализ поля ЭМИ в волновой \(дальней\) зоне](#)

### [ГЛАВА XV. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ](#)

### [ГЛАВА XVI. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ](#)

[16.1. Определение плоских электромагнитных волн](#)

[16.2. Плоские волны в однородной изотропной среде без потерь. Поляризация плоских волн](#)

[16.3. Плоские волны в среде с потерями](#)

## [ЧАСТЬ 5 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ](#)

ГЛАВА XVII. ДИАПАЗОНЫ ВОЛН. КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОВОЛН ПО МЕХАНИЗМУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

ГЛАВА XVIII. ДИФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН

18.1. Принцип Гюйгенса. Формула Кирхгофа

18.2. Зоны Френеля. Область, существенная для распространения радиоволн

18.3. Дифракция электромагнитных волн от края непрозрачного экрана

ГЛАВА XIX. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

19.1. Отражение и прохождение волн при нормальном падении на плоскую границу раздела

19.2. Наклонное падение горизонтально-поляризованной волны на плоскую границу раздела двух сред

19.3. Наклонное падение вертикально-поляризованной волны на плоскую границу раздела двух сред

19.4. Отражение плоских волн от плоской границы среды с потерями

ГЛАВА XX. ВЛИЯНИЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

20.1. Характеристики направленности реальных излучателей в свободном пространстве

20.2. Напряженность поля излучателя, поднятого над плоской и однородной поверхностью Земли на высоту

20.3. Поле вертикального вибратора над плоской отражающей поверхностью

20.4. Поле горизонтального вибратора, поднятого над плоской поверхностью земли на высоту  $h_1$

20.5. Распространение радиоволн над неоднородной и негладкой отражающей поверхностью

20.6. Формула Введенского

20.7. Учет сферичности земной поверхности

20.8. Распространение радиоволн вблизи земной поверхности. Поверхностные волны

20.9. Дифракция радиоволн вокруг сферической земной поверхности

ГЛАВА XXI. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ТРОПОСФЕРЕ

21.1. Строение тропосферы

21.2. Поглощение радиоволн в тропосфере

21.3. Рефракция радиоволн в тропосфере

ГЛАВА XXII. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

22.1. Строение ионосферы

22.2. Механизм ионизации и рекомбинации на больших высотах

22.3. Электронная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа без учета столкновений электронов с ионами и нейтральными молекулами

22.4. Электронная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа с учетом столкновения электронов с тяжелыми частицами

22.5. Преломление и отражение радиоволн в ионосфере

22.6. Влияние магнитного поля Земли на распространение волн в ионосфере. Двойное лучепреломление

## ГЛАВА XXIII. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭМП ОБЛАДАЮЩИХ СИММЕТРИЕЙ

23.1. Уравнения движения электрона в форме Лагранжа

23.2. Поступательная (трансляционная) симметрия

23.3. Азимутальная симметрия

23.4. Вращающиеся поля

23.5. Бегущие в направлении  $z$  волны

## ЛИТЕРАТУРА