大學入學考試中心

102 學年度指定科目考試試題

數學甲

─作答注意事項─

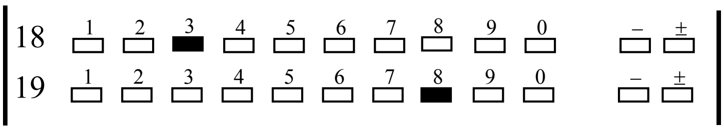
考試時間：80 分鐘

作答方式：

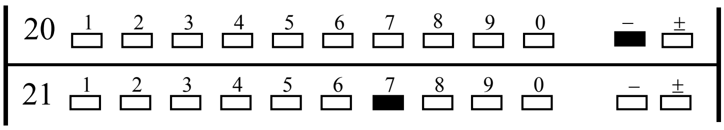
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

5 1. 設 z 爲一複數，且 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$（其中 $i=\sqrt{-1}$ 爲虛數單位）。試問 z 的絕對值 $|z|$ 爲下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3) 1　(4) $\sqrt{2}$　(5) 2

3 2. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_{2}x$ 的圖形於 P、Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_{2}x$ 的圖形於 R、S 兩點。試問<u>四邊形</u> $PQSR$ 的面積最接近下列哪一個選項？（$\log_{10}2\approx 0.3010$）

(1) 10　(2) 11　(3) 12　(4) 13　(5) 14

2 3. 袋中有大小相同編號1到8號的球各一顆。小明自袋中隨機一次取出兩球，設隨機變數 X 的值爲取出兩球中的較小號碼。若 p_k 表 X 取值爲 k 的機率（$k=1,2,\cdots,8$），試問有幾個 p_k 的值大於 $\frac{1}{5}$？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個

2 4. 考慮所有由1、2、3、4、5、6各一個與三個0所排成形如 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ 對角線均爲0的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$ 爲奇數的機率爲下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{20}$　(2) $\frac{1}{10}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{9}{10}$　(5) $\frac{19}{20}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3,4,5 5. 令 $A(-2,0)$、$B(0,1)$、$C(2,1)$、$D(4,3)$為坐標平面上四點。請選出正確的選項。

(1) 恰有一直線通過 A、B、C三點

(2) 恰有一圓通過 A、B、D三點

(3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B、C、D三點

(4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A、B、C、D四點

(5) 可找到兩平行直線，其聯集包含 A、B、C、D四點

1,2,5 6. 設 c為實數，E_1、E_2、E_3皆為坐標空間中的平面，其方程式如下：

$$E_1：\quad cx+y=c$$

$$E_2：\quad cy+z=0$$

$$E_3：\quad x+cz=1$$

已知 E_1、E_2、E_3有一個交點的 z坐標為 1，請選出正確的選項。

(1) $(1,0,0)$是 E_1、E_2、E_3的一個交點

(2) E_1、E_2、E_3有無窮多個交點

(3) E_1、E_2、E_3中一定有兩個平面重合

(4) $c=1$

(5) E_1、E_2、E_3有一個交點的 z坐標為 2

2,4　7. 令 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$。設 a、b、c 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$，請選出正確的選項。

(1) 極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 存在

(2) a、b、c 至少有一個在 0 與 1 之間

(3) $a,\ a^2,\ a^3,\ldots,\ a^n,\ldots$ 為收斂數列

(4) $b,\ b^2,\ b^3,\ldots,\ b^n,\ldots$ 為收斂數列

(5) $c,\ c^2,\ c^3,\ldots,\ c^n,\ldots$ 為收斂數列

1,2　8. 考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。

(1) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(2) f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) f 的最小值為 0

(4) $f(\frac{\pi}{10})>f(\frac{\pi}{9})$

(5) 函數 f 的（最小正）週期為 π

1,3,5 9. 考慮向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,1)$，其中 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$。請選出正確的選項。

(1) 向量 $\overrightarrow{v}$ 與 z 軸正向的夾角恆為定值（與 c、d 之值無關）

(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 夾角的最大值為 $135°$

(4) $ad-bc$ 的值可能為 $\frac{5}{4}$

(5) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

三、選填題（占 12 分）

說明：1.第 A 與 B 題，請將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(10–15)。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 A、B、C、D為空間中四個相異點，且直線 CD垂直平面 ABC。已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，$\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$，且 $\angle ABC$為銳角，則 $\overline{AD}=$ 6 ⑩ $\sqrt{⑪}$ 5 。（化成最簡根式）

B. 設 m為實數。若圓 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$與直線 $y=m(x+3)$在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m之最大範圍為 $a<m<b$，則 $a=\dfrac{⑫\ 2}{⑬\ 3}$、$b=\dfrac{⑭\ 5}{⑮\ 3}$。（化成最簡分數）

— — — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的 $t \geq 1$，函數 $y = p(x)$、$y = -1 - x^2$ 的圖形與直線 $x = 1$、$x = t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$（其中 C 為常數）。

(1) 試說明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立。（2 分）

(2) 設 $t \geq 1$，試求 $\int_1^t (-1 - x^2)dx$。（3 分）

(3) 試求 C。（2 分）

(4) 試求 $p(x)$。（5 分）

二. 設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。經平面線性變換 M 作用後，A 被映射至 $A'(1,\sqrt{2})$、B 被映射至 $B'(-1,\sqrt{2})$，而 C 被映射至 C'。

(1) 試問變換 M 的矩陣為何？（4 分）

(2) 試證明變換 M 將 ΔABC 的重心映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心。（4 分）

(3) 若 ΔABC 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。（4 分）

一、

答：(1) 略 (2) $-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$

(3) -4 (4) $p(x)=4x^3+2x^2+2x$

Sol：(1) ∵ $p(x)$ 各項係數均大於等於 0

∴ $x\geq 1$ 時 $p(x)\geq 0$

又 $x\geq 1$ 時 $-1-x^2<0$ 恆成立

∴ $p(x)>-1-x^2$

(2) $\int_1^t(-1-x^2)\,dx=-x-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^t$

$=(-t-\frac{1}{3}t^3)-(-1-\frac{1}{3})$

$=-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$

(3) $\int_1^t p(x)-(-1-x^2)\,dx$

$=\int_1^t p(x)\,dx+\int_1^t 1+x^2\,dx$

$=\int_1^t p(x)\,dx+\frac{1}{3}t^3+t-\frac{4}{3}$

$=t^4+t^3+t^2+t+C$

$t=1$ 時：$0+\frac{1}{3}+1-\frac{4}{3}=4+C$

∴ $C=-4$

(4) 由 (3) 可知：

$\int_1^t p(x)\,dx=t^4+\frac{2}{3}t^3+t^2-\frac{8}{3}$

∴ $p(x)=4x^3+2x^2+2x$

二、

答：(1) $\begin{bmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$ (2) 略 (3) $6\sqrt{2}$

Sol：

(1) $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$, $M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow M\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$ ∴ $M=\begin{bmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$

(2) 設 $C(a,b)$，其中 $a+b\neq 1$

$\begin{bmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b\\\sqrt{2}a+\sqrt{2}b\end{bmatrix}$

∴ $C'(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$

$\triangle A'B'C'$ 之重心 $G'\left(\frac{1-1+a-b}{3},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3}\right)$

$=G'\left(\frac{a-b}{3},\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\triangle ABC$ 之重心 $G\left(\frac{1+0+a}{3},\frac{0+1+b}{3}\right)$

$\begin{bmatrix}1&-1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}\\\frac{1+b}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a-b}{3}\\\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}$

∴ $\triangle ABC$ 重心映射至 $\triangle A'B'C'$ 重心

(3) $\triangle ABC$ 面積 3

$\Rightarrow \triangle A'B'C'$ 面積 $=3\times|\det M|=3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

又 $\overline{A'B'}=2$

∴ C' 到 $\overline{A'B'}$ 之距離為 $\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\times 2}=6\sqrt{2}$