Ìàòåìàòè÷åñêèå çàìåòêè

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 515.122.5

Итерации резольвент и однородные пространства разделяющих точек

М. С. Шуликина

Аннотация. Приведен подход, описывающий пространства итераций резольвент с постоянными отображениями. Его использование позволяет строить (однородные, не алгебраически однородные) пространства разделяющих точек произвольного порядка.

Ключевые слова: резольвента, связность, разделяющая точка, однородность, обратная и прямая последовательности.

Abstract. We describe the topology of a space obtained by iterating resolutions with constant maps. This description is used to construct (homogeneous, not coset) cut-point spaces of any order.

Keywords: resolution, connectedness, cut point, homogeneity, inverse and direct sequences.

1. Введение

Резольвенты топологических пространств широко используются для построения примеров и контрпримеров, удовлетворяющих различным топологическим свойствам. Понятие резольвенты было введено В. В. Федорчуком в [1], и выражает идею замены каждой точки исходного пространства экземпляром некоторого другого пространства. Использование процесса итерации резольвент позволяет получать пространства, интересные как своими размерностными, так и кардинальнозначными инвариантами. Обзор сведений о резольвентах и примерах их применения можно найти в работах [2,3].

В настоящей статье показано, что пространства, построенные в [4], являются итерациями резольвент с постоянными отображениями. Используя описание из работы [4], приводится полное решение задачи построения пространств разделяющих точек произвольного порядка. Отметим, что пространства разделяющих точек порядка 3 построены в [5] и [6], при этом в [6] приведенный пример однороден, и говорится о возможности построения пространств разделяющих точек любого

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 08-01-90702 моб-ст,

частично при поддержке ФЦН научные и научно - педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг., госконтракт № П937 от 20.08.2009.

конечного порядка. Построенные нами пространства разделяющих точек произвольного порядка — однородны, и отмечено, что пространства разделяющих точек порядка 3 и более не могут быть алгебраически однородными.

Полагаем, что все рассматриваемые в данной статье пространства — тихоновские, отображения пространств — непрерывные. Используем терминологию и обозначения из [7], через ω обозначим неотрицательные целые числа, и пусть $A \coprod B$ – дизъюнктная сумма пространств A и B.

Точка x связного топологического пространства X называется *разделяющей точкой* [8], если подмножество $X \setminus \{x\}$ несвязно. Если $X \setminus \{x\}$ имеет n ($n \geqslant 2$) компонент связности, то точка x называется разделяющей точкой порядка n. Пространством разделяющих точек называется пространство, все точки которого разделяющие.

2. Итерации резольвент

(А) Определение резольвенты.

Îïðåäåëåíèå 1. (Например, [2,3]) Пусть X - топологическое пространство, каждой точке x которого соответствуют топологическое пространство Y_x и непрерывное отображение $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$. Базу топологии на множестве $R(X, Y_x, h_x) = \bigcup\{\{x\} \times Y_x : x \in X\}$ задают множества

$$U \otimes_x V = (\{x\} \times V) \cup \bigcup\{\{x'\} \times Y_{x'} : x' \in U \cap h_x^{-1}(V)\},$$

где $x \in X$, U — открытое подмножество X и $x \in U$, V — открытое подмножество Y_x.

Пространство $R(X) = R(X, Y_x, h_x)$ называется *резольвентой* X (в каждой точке x в Y_x посредством отображения h_x). Отображение $\pi : R(X) \to X$, переводящее пару (x, y) в точку x, называется *отображением резольвенты.*

Процесс построения резольвент можно итерировать. Обозначим $R^0 = X$, $R^1 = R(X)$ и пусть $\pi_n^{n+1} : R^{n+1} \to R^n$ – отображения резольвент для $n \in \omega$, $R^{n+1} = R(R^n)$. Предел R^ω обратного спектра $S = \{R^n, \pi_n^{n+1}, n \in \omega\}$ есть ω-итерация резольвент.

(Б) Итерация резольвент с постоянными отображениями.

Рассмотрим семейство $\{Y_n : n \in \omega\}$ топологических пространств с отмеченными точками $y_n \in Y_n$ и подпространствами $M_n \subset Y_n$, $n \in \omega$, $y_n \notin M_n$ при $n \geqslant 1$. Пусть $R^0 = Y_0$ и резольвента R^1 есть пространство $R\left(Y_0, Y_x, h_x\right)$, в котором каждой точке $x \in M_0$ поставлено в соответствие пространство $Y_x = Y_1$, а точкам $x \in Y_0 \setminus M_0$ соответствует пространство $Y_x = \{y_1\}$. Отображение $h_x : Y_0 \setminus \{x\} \to Y_x$ для любого $x \in Y_0$ полагаем равным постоянному отображению в точку y_1. Пространство R^0 естественным образом отождествим с подпространством $R^0 \times \{y_1\}$ пространства R^1. Положим $T_1 = \bigcup\{\{x\} \times M_1 : x \in M_0\} \subset R^1$.

Далее проведем построение резольвент $\{R^n : n \geqslant 2\}$ по индукции. Для каждого $n \geqslant 1$ полагаем $R^{n+1} = R\left(R^n, Y_x, h_x\right)$, где каждой точке x множества T_n соответствует пространство $Y_x = Y_{n+1}$, а точкам $x \in R^n \setminus T_n$ соответствует пространство $Y_x = \{y_{n+1}\}$; отображение $h_x : R^n \setminus \{x\} \to Y_x$ для любого $x \in R^n$ является постоянным отображением в точку y_{n+1}. Полагаем $T_{n+1} = \bigcup\{\{x\} \times M_{n+1} : x \in T_n\}$.

Определены отображения резольвент $\pi_n^{n+1} : R^{n+1} \to R^n$ и вложения $\mathrm{i}_{n,n+1} : R^n \to R^{n+1}$, $n \in \omega$, при которых для каждого $n \in \omega$ пространство R^n отождествляется с подпространством $R^n \times \{y_{n+1}\}$ пространства R^{n+1}.

В пространстве R^{n+1}, $n \in \omega$, (считаем $R^{-1} = \emptyset$ и $T_0 = M_0$)

(а) базу окрестностей точек $z \in T_n$ составляют множества:

$$(\{z\} \times V) \cup \bigcup \{\{z'\} \times Y_{n+1} : z' \in (U \setminus \{z\}) \cap T_n\} \cup \bigcup \{\{z'\} \times \{y_{n+1}\} : z' \in U \setminus T_n\},$$

где U — открытое подмножество $R^n \setminus R^{n-1}$, $z \in U$, V — открытое подмножество Y_{n+1}, $y_{n+1} \in V$;

(б) базу окрестностей точек $z \in R^n \setminus T_n$ составляют множества вида

$$\bigcup \{\{z'\} \times Y_{n+1} : z' \in U \cap T_n\} \cup \bigcup \{\{z'\} \times \{y_{n+1}\} : z' \in U \setminus T_n\},$$

где U — открытое подмножество R^n и $z \in U$;

(в) и базу окрестностей точек $z = (x, y) \in R^{n+1} \setminus R^n$, где $x \in T_n$ и $y \in Y_{n+1}$, составляют множества вида

$$\{x\} \times V,$$

где V — открытое подмножество Y_{n+1}, $y_{n+1} \notin V$ и $y \in V$.

Таким образом, определены прямая $\{R^n, \mathrm{i}_{n,n+1}, n \in \omega\}$ и обратная $\{R^n, \pi_n^{n+1}, n \in \omega\}$ последовательности и их пределы R_ω и R^ω, соответственно.

(B) Пространства, построенные А. Соколовской в работе [4].

По семейству $\mathfrak{F} = \{(Y_n, M_n, y_n) : n \in \omega\}$, где Y_n есть пространство, $M_n \subset Y_n$, $n \in \omega$, и точка $y_n \notin M_n$ при $n \geqslant 1$, определяются семейства последовательностей X_n длины $n+1$ такие, что $X_0 = \{(t_0) : t_0 \in Y_0\}$ и $X_n = \{(t_0, \dots, t_n) : (t_0, \dots, t_n) \in M_0 \times M_1 \times \dots \times M_{n-1} \times (Y_n \setminus \{y_n\})\}$ для любого $n \geqslant 1$.

Множество конечных последовательностей обозначается

$$X_{\mathfrak{F}} = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}.$$

Для точки $P \in X_{\mathfrak{F}}$ через $|P| \in \omega$ обозначается индекс, для которого $P \in X_{|P|}$.

Множество бесконечных последовательностей обозначается

$$DX_{\mathfrak{F}} = \{(t_0, t_1, \dots)\,; t_n \in M_n, n \in \omega\}$$

и $bX_{\mathfrak{F}} = X_{\mathfrak{F}} \cup DX_{\mathfrak{F}}$.

Для точки $P = (p_0, \dots, p_n) \in X_n$ и подмножества $U \subset Y_n$, $p_n \in U$, определяется множество

$$B^{\uparrow}_{P,U} = \{(t_0, \dots, t_l) \in bX_{\mathfrak{F}} : n \leqslant l \leqslant \infty,\ t_i = p_i \text{ при } i < n,\ t_n \in U\}.$$

(В случае $l = \infty$ последовательность $(t_0, \dots, t_l)$ считается бесконечной последовательностью $(t_0, t_1, \dots)$). При определении топологии на $bX_{\mathfrak{F}}$ множество U предполагается открытым в Y_n, причем, если $n \geqslant 1$, то $U \subset Y_n \setminus \{y_n\}$.

Для точки $Q = (q_0, \dots, q_n) \in X_n$, где $q_n \in M_n$, и подмножества $V \subset Y_{n+1}$, содержащего точку y_{n+1} определяется множество

$$B^{\downarrow}_{Q,V} = bX_{\mathfrak{F}} \setminus B^{\uparrow}_{Q',F},$$

где $F = Y_{n+1} \setminus V$ и $q'_{n+1} \in F$ для точки $Q' = \big(q_0, \dots, q_n, q'_{n+1}\big)$. Если $V = Y_{n+1}$ (т.е. $F = \varnothing$) или $q_n \notin M_n$, то $B^{\downarrow}_{Q,V} = bX_{\mathfrak{F}}$.

Топология пространства $bX_{\mathfrak{F}}$ задается предбазой, состоящей из множеств $B = \{B^{\uparrow}_{P,U}, B^{\downarrow}_{Q,V}\}$, где P и Q — точки пространства $X_{\mathfrak{F}}$, множества U и V открыты в $Y_{|P|}$ или $Y_{|Q|+1}$, соответственно.

Пространства $X_{\mathfrak{F}}$ и $X^n_{\mathfrak{F}} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} X_k$, $n \in \omega$, рассматриваются как подпространства $bX_{\mathfrak{F}}$.

Отметим, что при определении пространства $bX_{\mathfrak{F}}$ к семейству $\mathfrak{F}$ нами предъявлено требование $y_n \notin M_n$, $n \geqslant 1$, отличное от оригинального в работе [4]. Однако, таким образом введенная формализация равносильна исходной и упрощает изложение.

(Г) Гомеоморфизм пространств $bX_{\mathfrak{F}}$ и R^{ω}.

Определим биекцию ω-итерации резольвент R^{ω} (предела обратной последовательности $\{R^n, \pi^{n+1}_n, n \in \omega\}$) на пространство $bX_{\mathfrak{F}}$.

Точка $z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^{\omega} \subset \prod\{R^n : n \in \omega\}$ в том и только том случае, если $z_{k+1} = (z_k, t_{k+1}) \in R^{k+1}$. При этом, если $t_{k+1} = y_{k+1}$, то $t_m = y_m$ при $m \geqslant k+1$. Таким образом, каждой точке $z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^{\omega}$ можно поставить в соответствие последовательность $(z_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$ и определить биекцию g предела R^{ω} на $bX_{\mathfrak{F}}$, полагая $g(z) = (z_0, t_1, \dots, t_{n(z)})$, если для z существует число $n(z) \geqslant 1$ такое, что $t_{n(z)+1} = y_{n+1}$, а $t_{n(z)} \neq y_{n(z)}$; $g(z) = (z_0)$ при $n(z) = 0$; и $g(z) = (z_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$ иначе.

Òåîðåìà 1. *Отображение g — гомеоморфизм R^{ω} на $bX_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Через $\pi_n : R^{\omega} \to R^n$, $n \in \omega$, обозначим предельные проекции. Базу топологии на R^{ω} образуют множества $\pi_n^{-1}O$, где O — открытые базисные подмножества пространства R^n, $n \in \omega$.

Прообраз при отображении g открытого множества $B^{\uparrow}_{P,U}$, определяемого точкой $P = (z_0, \dots, t_n) \in X_n$, $n \geqslant 1$, и открытым подмножеством $U \subset Y_n$, $t_n \in U$, $y_n \notin U$ является множеством точек в R^{ω} вида $(z_0, z_1 = (z_0, t_1), z_2 = (z_1, t_2), \dots, z_{n-1} = (z_{n-2}, t_{n-1}), z'_n = (z_{n-1}, t'_n), \dots)$, где $t'_n \in U$. Оно совпадает с множеством $\pi_n^{-1}(\{z_{n-1}\} \times U)$, где $\{z_{n-1}\} \times U$ — открытое подмножество R^n. Случай $n = 0$ очевиден.

Прообраз при отображении g открытого множества $B^{\downarrow}_{Q,V}$, определяемого точкой $Q = (z_0, \dots, t_n) \in X_n$, $t_n \in M_n$, и открытым подмножеством $V \subset Y_{n+1}$, $y_{n+1} \in V$, является дополнением до множества точек в R^{ω} вида $(z_0, z_1 = (z_0, t_1), z_2 = (z_1, t_2), \dots, z_n = (z_{n-1}, t_n), z'_{n+1} = (z_n, t'_{n+1}), \dots)$, где $t'_{n+1} \in Y_{n+1} \setminus V$. Оно совпадает с дополнением до множества $\pi^{-1}_{n+1}(\{z_n\} \times (Y_{n+1} \setminus V))$, где $\{z_n\} \times (Y_{n+1} \setminus V)$ — замкнутое подмножество R^n.

Так как прообразы множеств, образующих предбазу $bX_{\mathfrak{F}}$, открыты, то отображение g непрерывно.

Индукцией по $n \in \omega$ докажем, что образы открытых базисных множеств пространства R^{ω} открыты в $bX_{\mathfrak{F}}$.

В случае $n = 0$ образ множества $\pi_0^{-1}(O)$, где O открытое подмножество R^0, есть открытое в $bX_{\mathfrak{F}}$ множество $B^{\uparrow}_{P,O}$ для некоторой точки $P = (z_0) \in O$.

Пусть для $k < n$ образ множества $\pi_k^{-1}(O)$, где O открытое подмножество R^k, открыт в $bX_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим множество $\pi_n^{-1}(O)$, где O открытое базисное подмножество в R^n. Точка $z = (z_0, z_1 = (z_0, t_1), z_2 = (z_1, t_2), \dots) \in \pi_n^{-1}O$, если $z_n \in O$.

Пусть $O = (\{z_{n-1}\} \times V)$, где V открытое подмножество Y_n и $y_n \notin V$. Тогда множество $g(\pi_n^{-1}(O))$ содержит точки $(z_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t'_n, \dots)$, где $t'_n \in V$. Значит $g(\pi^{-1}(O)) = B^{\uparrow}_{P,V}$, где $P = (z_0, t_1, \dots, t_n)$, $t_n \in V$, открытое в $bX_{\mathfrak{F}}$ множество.

Пусть $O = (\{z_{n-1}\} \times V) \cup \bigcup \{\{z'\} \times Y_n : z' \in (U \setminus \{z_{n-1}\}) \cap T_{n-1}\} \cup \bigcup \{\{z'\} \times \{y_n\} : z' \in U \setminus T_{n-1}\}$, где V — открытое подмножество Y_n, $y_n \in V$, U — открытое подмножество R^{n-1}, $z_{n-1} \in U$ и $z_{n-1} \in T_{n-1}$, или $O = \bigcup \{\{z'\} \times Y_n : z' \in U \cap T_{n-1}\} \cup \bigcup \{\{z'\} \times \{y_n\} : z' \in U \setminus T_{n-1}\}$, где U — открытое подмножество R^{n-1}, $z_{n-1} \in U$ и $z_{n-1} \in R^{n-1} \setminus T_{n-1}$. Тогда множество $g(\pi_n^{-1}(O))$ содержит все точки вида $(z_{n-2}, t'_{n-1}, \dots) \in U$, за исключением точек $(z_{n-1}, t'_n, \dots)$, где $t'_n \notin V$, если $z_{n-1} \in T_{n-1}$. Следовательно, $g(\pi_n^{-1}(O)) = g(\pi_{n-1}^{-1}(U)) \cap B^{\downarrow}_{Q,V}$, где $Q = (z_0, t_1, \dots, t_{n-1}, y_n)$ (если $z_{n-1} \in R^{n-1} \setminus T_{n-1}$, то $B^{\downarrow}_{Q,V} = bX_{\mathcal{F}}$). По предположению индукции множество $g(\pi_{n-1}^{-1}(U))$ открыто в $bX_{\mathfrak{F}}$. Значит и множество $g(\pi_n^{-1}(O))$ открыто в $bX_{\mathfrak{F}}$.

Доказано, что отображение g — открыто, а значит является гомеоморфизмом. $\square$

Обозначим $R^{\omega}_{fin} \subset R^{\omega}$ — множество точек $z = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^{\omega}$, для которых существует номер $n(z) \in N$ такой, что $z_{n(z)+1} = \big(z_{n(z)}, y_{n(z)+1}\big)$.

Положим $R^{\omega}_{inf} = R^{\omega} \setminus R^{\omega}_{fin}$.

Из определения гомеоморфизма g имеем.

Ñëåäñòâèå 1. *(a)* $g(R^n) = X^n_{\mathfrak{F}}$, *(здесь R^n отождествляется с подмножеством $\{(z_0, z_1, z_2, \dots) \in R^{\omega}; z_{k+1} = (z_k, y_{k+1}), k \geqslant n)\}$ в R^{ω}).*

(b) $g(R^{\omega}_{fin}) = X_{\mathfrak{F}}$.

(c) $g(R^{\omega}_{inf}) = DX_{\mathfrak{F}}$.

Òåîðåìà 2. *Прямой предел R_{ω} последовательности $\{R^n, \mathrm{i}_{n,n+1}, n \in \omega\}$ уплотняется на пространство $X_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Прямым пределом R_{ω} последовательности резольвент $\{R^n : n \in \omega\}$ с вложениями $i_{n,n+1} : R^n \to R^{n+1}$ является фактор-пространство $\coprod \{R^n : n \in \omega\}/_{\sim}$ по отношению эквивалентности: $x \sim y$, $x \in R^n$, $y \in R^m, n < m$, тогда и только тогда, когда $i_{n,m}(x) = (i_{m-1,m} \circ \dots \circ i_{n,n+1})\,(x) = y$ [9].

Реккурентно зададим непрерывные отображения $f_n : R^n \to R^{\omega}_{fin}$. Для $z_n = (z_{n-1}, t_n)$ полагаем $f_n(z_n) = (z_0, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1} = (z_n, y_{n+1}), \dots)$, где первые n координат совпадают с координатами точки $f_{n-1}(z_{n-1})$, $n \geqslant 1$ (при $n = 0$ и $z_0 \in Y_0$ полагаем $f_0(z_0) = (z_0, z_1 = (z_0, y_1), \dots))$. Через $f : \coprod \{R^n : n \in \omega\} \to R^{\omega}_{fin}$ обозначим комбинацию отображений f_n, $n \in \omega$. Образы эквивалентных точек при отображении f совпадают. Поэтому корректно определено непрерывное отображение R_{ω} на пространство R^{ω}_{fin}, гомеоморфное $X_{\mathfrak{F}}$. $\square$

Çàìå÷àíèå 1. Уплотнение в теореме 2 не обязано быть гомеоморфизмом. Действительно, пусть $\mathfrak{F} = \{(Y_n = [0,1], M_n = (0,1], y_n = \{0\}) : n \in \omega\}$. Занумеруем рациональные числа $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ интервала $(0,1)$ и рассмотрим множество $F = \bigcup \{\pi_k^{-1}(g^{-1}(t_0(= r_k), \dots, t_{k-1}(= r_k)) \times [1/2, 1]) : k \in \omega \setminus \{0\}\} \subset R^{\omega}$. Легко видеть, что $f(R^n) \cap F$

замкнуто для любого $n \in \omega$ (лишь первые n элементов объединения пересекаются с $f(R^n)$). Тем самым, $f^{-1}(R^{\omega}_{fin} \setminus F)$ есть открытое подмножество прямого предела R_{ω}. Однако, $R^0 \subset R^{\omega} \setminus F$, но само пространство $R^{\omega} \setminus F$ не является окрестностью в R^{ω} никакой точки из R^0 (в силу плотности $\mathbb{Q}$ в $[0,1]$).

3. Разделяющие точки пространства $X_{\mathfrak{F}}$.

Пространства Y_n, $n \in \omega$, семейства $\mathfrak{F} = \{(Y_n, M_n, y_n) : n \in \omega\}$ с фиксированными точками $y_n \in Y_n$ и подпространствами $M_n \subset Y_n, n \in \omega$, где $y_n \notin M_n$ при $n \geqslant 1$, всюду ниже считаем связными. Следуем понятиям, введенным в [4]. По точке $P = (p_0, p_1, \dots p_n) \in X_{\mathfrak{F}}$, где $p_n \in M_n$, определим слой $C_P = \{(p_0, p_1, \dots, p_n, t) : t \in Y_{n+1} \setminus \{y_{n+1}\}\} \bigcup \{P\}$. Отметим, что каждый слой C_P гомеоморфен соответствующему пространству Y_{n+1} [4]. Полагаем $C_{\emptyset} = \{(t) : t \in Y_0\}$. Слой $C_{\emptyset}$ гомеоморфен Y_0.

Пусть $P, Q \in X_{\mathfrak{F}}$, тогда

• $P < Q$, если $Q \in C_P$ и $P \neq Q$ (слои C_P и C_Q пересекаются, если слой C_Q определен);

• $P \ll Q$, если существует такая конечная последовательность $P_1, \dots, P_n$ точек $X_{\mathfrak{F}}$, что $P = P_1 < P_2 < \dots < P_n = Q$ (существует последовательность попарно пересекающихся слоев $C_P = C_{P_1}$ и C_{P_2}, C_{P_2} и C_{P_3}, ..., $C_{P_{n-1}}$ и $C_{P_n} = C_Q$, если слой C_Q определен).

Ëåììà 1. *Для точки $P = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in X_{\mathfrak{F}}$ имеем*

(a) Если $E \subset Y_n \setminus \{y_n\}$ — связное подмножество, содержащее точку p_n, то множество $B^{\uparrow}_{P,E}$ — связное подмножество $X_{\mathfrak{F}}$.

(b) Если $E \subset Y_{n+1}$ — связное подмножество, содержащее точку y_{n+1}, и $p_n \in M_n$, то множество $B^{\downarrow}_{P,E}$ — связное подмножество $X_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. (a) Пусть $P' = (p_0, p_1, \dots p_{n-1}) \subset C_{P'}$ и $E' = \{(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, t) : t \in Y_n \cap E\}$. Тогда $B^{\uparrow}_{P,E} = E' \cup \bigcup\{C_Q : P'' \ll Q, P'' \in E',$ и слой C_Q определен$\}$. Множество E' связно, и для каждого слоя $C_Q \in B^{\uparrow}_{P,E}$ существует последовательность попарно пересекающихся связных слоев $C_{P_1}, C_{P_2}, C_{P_3}, \dots C_{P_{n-1}}, C_{P_n} = C_Q$ множества $B^{\uparrow}_{P,E}$, $C_{P_1} \cap E' \neq \emptyset$. Тем самым, $B^{\uparrow}_{P,E}$ связно.

(b) Пусть $P'_0 = (p_0), P'_1 = (p_0, p_1), \dots P'_{n-1} = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ и $E' = \{(p_0, p_1, \dots, p_n, t) : t \in Y_{n+1} \cap E\}$. Тогда

$$B^{\downarrow}_{P,E} = \bigcup\{C_Q : P_0 \ll Q, P_0 = (t) \in C_{\emptyset}, t \neq p_0, \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \bigcup C_{\emptyset} \cup$$

$$\cup \bigcup\{C_Q : P_1 \ll Q, P_1 = (p_0, t) \in C_{P'_0}, t \neq p_1, \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \bigcup C_{P'_0} \cup \dots$$

$$\cup \bigcup\{C_Q : P_n \ll Q, P_n = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, t) \in C_{P'_{n-1}}, t \neq p_n, \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \bigcup C_{P'_{n-1}} \cup$$

$$\cup \bigcup\{C_Q : P'' \ll Q, P'' \in E', \text{ и слой } C_Q \text{ определен}\} \bigcup E'.$$

Согласно рассуждениям в случае (a), каждое из множеств вида $\bigcup\{C_Q\} \bigcup C_{P'_k}$, $k = \emptyset, 1, \dots n-1$ а также множество $\bigcup\{C_Q\} \bigcup E'$ связны. При этом последовательность $C_{\emptyset}, C_{P'_0}, \dots C_{P'_{n-1}}$ слоев из данных множеств и множество E' пересекаются. Тем самым, множество $B^{\downarrow}_{P,E}$ связно. □

Ñëåäñòâèå 2. *Пространство $X_{\mathfrak{F}}$ является связным.*

Òåîðåìà 3. *Если для некоторого $n \in \omega$ и точки $p_n \in M_n$ подпространство $Y_n \setminus \{p_n\}$ имеет k компонент связности, а подпространство $Y_{n+1} \setminus \{y_{n+1}\}$ имеет m компонент связности, то точка $P = (p_0, \dots, p_{n-1}, p_n)$, где $p_0 \in Y_0, \dots, p_{n-1} \in Y_{n-1}$ — любые допустимые точки, является разделяющей точкой пространства $X_{\mathfrak{F}}$ порядка $k + m$.*

Другими словами, если точка p_n — разделяющая точка пространства Y_n порядка $k \geqslant 2$, а точка y_{n+1} — разделяющая точка пространства Y_{n+1} порядка $m \geqslant 2$, то точка $P = (p_0, \dots, p_{n-1}, p_n)$, где $p_0 \in Y_0, \dots, p_{n-1} \in Y_{n-1}$ — любые допустимые точки, является разделяющей точкой пространства $X_{\mathfrak{F}}$ порядка $k + m$.

Доказательство. По условию теоремы множество $Y_n \setminus \{p_n\}$ имеет k компонент связности $Y_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, где без ограничения общности рассуждений считаем, что $y_n \in Y_{n,1}$; а множество $Y_{n+1} \setminus \{y_{n+1}\}$ имеет m компонент связности $Y_{n+1,l}$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Тогда подмножество $X_{\mathfrak{F}} \setminus \{P\}$ можно представить в виде

$$X_{\mathfrak{F}} \setminus \{P\} = \coprod_{j=2}^{k} B^{\uparrow}_{Q_{n,j}, Y_{n,j}} \cup \coprod_{l=1}^{m} B^{\uparrow}_{Q_{n+1,l}, Y_{n+1,l}} \cup B^{\downarrow}_{P', Y_{n,1}},$$

где $P' = (p_0, \dots, p_{n-1})$, $Q_{n,j} = (p_0, \dots, p_{n-1}, y_{n,j})$, $y_{n,j} \in Y_{n,j}$, $j = 2, \dots, k$, и $Q_{n+1,l} = (p_0, \dots, p_n, y_{n+1,l})$, $y_{n+1,l} \in Y_{n+1,l}$, $l = 1, \dots, m$. Все слагаемые суммы – открытые, попарно дизъюнктные и связные, по лемме 1, множества. $\square$

Çàìå÷àíèå 2. *Теорема 3 остается справедливой и для неразделяющих точек связного пространства (считая их разделяющими порядка 1).*

Ïðèìåð 1. Для любой последовательности $K = \{n_1, n_2, \dots\}$, $n_i \in \omega \cup \{\infty\}$, $n_i \geqslant 2$, $i \in \mathbb{N}$, существует пространство разделяющих точек, порядки которых принимают значения из последовательности K, и только их.

Обозначим через $\bigvee_i$ букет i окружностей S^1 с общей точкой b_i, $i \in \omega \cup \{\infty\}$, $i \geqslant 1$. В случае конечного числа i топология на V_i естественная. Базу топологии в точке b_∞ пространства $\bigvee_\infty$ составляют множества, содержащие все окружности, кроме их конечного числа, и пересекающие каждую окружность по открытому множеству. База топологии в остальных точках совпадает с топологией окружности. Очевидно, что единственной разделяющей точкой пространства $\bigvee_i$ является точка b_i порядка i при $i \geqslant 2$. При $i = 1$ у пространства $\bigvee_1 = S^1$ разделяющих точек нет. Искомым будет пространство $X_{\mathfrak{F}}$, построенное по семейству $\mathfrak{F} = \{(Y_i, M_i, y_i) : i \in \omega\}$ с фиксированными точками $y_i \in Y_i$ и подпространствами $M_i \subset Y_i$, где $Y_0 = M_0 = S^1$, y_0 – произвольная точка окружности, $Y_i = \bigvee_{n_i - 1}$, $y_i = b_{n_i - 1}$, и $M_i = Y_i \setminus \{y_i\}$, $i \geqslant 1$.

В [6] построен пример однородного пространства разделяющих точек порядка 3 и утверждается, что предложенным способом можно построить пространство разделяющих точек порядка n для любого натурального $n \geqslant 3$. Покажем, что использование итераций резольвент позволяет решить это вопрос.

Òåîðåìà 4. *Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существует однородное пространство $X_{\mathcal{F}_n}$ разделяющих точек порядка n.*

Доказательство. Доказательство проведем индукуцией по $n \geqslant 2$.

База индукции. При $n = 2$ полагаем $\mathfrak{F}_2 = \{\big(Y_i = S^1, M_i, y_i\big) : i \in \omega\}$, y_i — произвольная точка S^1, $i \in \omega$, $M_0 = S^1$, $M_i = S^1 \setminus \{y_i\}$ при $i \geqslant 1$. Тогда $X_{\mathfrak{F}_2}$ — пространство разделяющих точек порядка 2 по теореме 3 и однородное по лемме 10 из [4].

Предположение индукции. Допустим, что для всех $k \leqslant n$ существует однородное пространство разделяющих точек порядка k.

Шаг индукции. Пусть $k = n$. Определим семейство $\mathfrak{F}_n = \{(Y_i, M_i, y_i) : i \in \omega\}$ с фиксированными точками $y_i \in Y_i$ и подпространствами $M_i \subset Y_i$ следующим образом. Для каждого $i \in \omega$ полагаем $Y_{2i+1} = X_{\mathfrak{F}_{n-1}}$, $Y_{2i} = S^1$. Точки $y_i \in Y_i$, $i \in \omega$, выбираем произвольным образом, $M_0 = Y_0$, $M_i = Y_i \setminus \{y_i\}$ при $i \geqslant 1$. По теореме 3 пространство $X_{\mathfrak{F}_n}$ является пространством разделяющих точек порядка n. Оно однородно по лемме 10 из [4]. $\square$

Приведем пример пространства разделяющих точек порядка 2, не являющегося однородным. В качестве первого пространства Y_1 возьмем двумерный открытый диск (он не имеет разделяющих точек), все пространства $Y_i, i > 1$, — окружности, $M_i = Y_i$, точки y_i фиксируем произвольным образом. Применим счетное число итераций. В этом случае точку $P = (p_0)$ нельзя отобразить ни водну из точек, например $Q = (q_0, q_1)$. Так как любая окрестность точки P содержит подмножество гомеоморфное диску, т.е. подмножество без разделяющих точек. При этом у точки Q есть окрестность, любое подмножество которой содержит разделяющие точки. Поэтому не существует гомеоморфизма, отображающего P в Q.

Çàìå÷àíèå 3. В [8, Гл. 5, §46, IX, Теорема 1] доказано, что если X сепарабельное метрическое пространство, то число разделяющих точек порядка $\geqslant 3$ не более чем счетно. Следовательно, в приведенных выше примерах пространства не являются сепарабельными метрическими. Резольвента $R(S^1) = R(S^1, Y_x = S^1, h_x : S^1 \setminus \{x\} \to \{\star\})$ окружности в каждой точке в окружность посредством постоянного отображения есть несепарабельный бикомпакт [2], вложимый в пространства, построенные в теореме 4 и примере 1. Таким образом, пространства $X_{\mathfrak{F}_n}$ и $X_{\mathfrak{F}}$ неметризуемы. Пространства $X_{\mathfrak{F}_n}$ и $X_{\mathfrak{F}}$, в случае $n_i \in \omega$, $i \in \mathbb{N}$, являются счетным объединением подмножеств: R^0, $R^1 \setminus R^0, \ldots, R^{n+1} \setminus R^n, \ldots$, каждое из которых является счетным объединением метризуемых подмножеств.

В [10] для произвольного топологического пространства показано, что пространство разделяющих точек не может быть бикомпактным. Пространства в примере 1 являются σ-бикомпактными (резольвенты $R^0, R^1, \ldots, R^n, \ldots$ бикомпактны).

Пространство, являющееся пространством левых смежных классов топологической группы, называется *алгебраически однородным.*

Òåîðåìà 5. *Однородное пространство X_n разделяющих точек порядка $n \geqslant 3$ не является алгебраически однородным.*

Доказательство. Из замечания 2 [11] следует, что пространство алгебраически однородно, если на нем возможно транзитивное и *открытое действие* ($x \in \mathrm{int}(Ox)$, где $Ox = \cup\{g(x) : g \in O\}$, для любой окрестности единицы O, действующей группы).

Для $x \in X_3$ возьмем в каждой компоненте связности множества $X_3 \setminus \{x\} = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ по точке $y_i \in Y_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда при любой топологизации непрерывно действующей на X_3 группы ее окрестностью единицы будет множество $O = \{h :$

$h(y_i) \in Y_i, i = 1, 2, 3\}$. Для любого $h \in O$ имеем $h(x) = x$. Действительно множества $Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2$, $Y_2 \cup \{x\} \cup Y_3$ и $Y_1 \cup \{x\} \cup Y_3$ связны; $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_1 \neq \emptyset$, $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_2 \neq \emptyset$, и $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ связно. Значит, $x \in h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ (иначе множество $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ будет несвязно). Аналогично $x \in h(Y_2 \cup \{x\} \cup Y_3)$ и $x \in h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_3)$. Тем самым, $h(x) = x$ для любого $h \in O$ и действие не открыто.

Для $x \in X_n$, $n \geqslant 4$, возьмем в каждой компоненте связности множества $X_n \setminus \{x\} = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ по точке $y_i \in Y_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда при любой топологизации непрерывно действующей на X_n группы ее окрестностью единицы будет множество $O = \{h : h(y_i) \in Y_i, i = 1, \dots, n\}$. Для любого $h \in O$ имеем $h(x) = x$. Действительно множества $Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2$ и $Y_3 \cup \{x\} \cup Y_4$ связны; $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_1 \neq \emptyset$, $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2) \cap Y_2 \neq \emptyset$, и $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ связно. Значит, $x \in h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ (иначе множество $h(Y_1 \cup \{x\} \cup Y_2)$ будет несвязно). Аналогично $x \in h(Y_3 \cup \{x\} \cup Y_4)$. Тем самым, $h(x) = x$ для любого $h \in O$ и действие не открыто. $\square$

ÑÏÈÑÎÊ ÖÈÒÈÐÎÂÀÍÍÎÉ ËÈÒÅÐÀÒÓÐÛ

[1] Â. Â. Ôåäîð÷óê, Î áèêîìïàêòàõ ñ íåñîâïàäàþùèìè ðàçìåðíîñòÿìè, ÄÀÍ ÑÑÑÐ, 1968, ò. 182(2), 275 277.

[2] Â. Â. Ôåäîð÷óê, Âïîëíå çàìêíóòûå îòîáðàæåíèÿ è èõ ïðèëîæåíèÿ, Ôóíäàìåíòàëüíàÿ è ïðèêëàäíàÿ ìàòåìàòèêà, 2003, ò. 9, N 1, 105 235.

[3] S. Watson, The construction of topological spaces: Planks and resolutions, Recent Progress in General Topology / eds. M. Hušek, J. van Mill. Amsterdam: North-Holland. 1992. 673 757.

[4] À. Ì. Ñîêîëîâñêàÿ, Îäèí ìåòîä ïîñòðîåíèÿ ïîëóðåøåòîê áèêîìïàêòíûõ G-ðàñøèðåíèé, Ìàòåìàòè÷åñêèå çàìåòêè, 2007, ò. 82, âûï. 6, 916 924.

[5] D. Deniel, W. S. Mahavier, Concerning cut point spaces of order three, Int. J. of Math. Sci., 2007, 43 50.

[6] L. R. Ford, Homeomorphism groups and coset spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 1954, v. 77, 490 497.

[7] Ð. Ýíãåëüêèíã, Îáùàÿ òîïîëîãèÿ, Ì.: Ìèð. 1986.

[8] Ê. Êóðàòîâñêèé, Òîïîëîãèÿ. Ò. 2, Ì.: Ìèð. 1969.

[9] C. Bessaga, A. Pelczynski. Selekted topics in in nite-dementional topology, Polska akalemia nauk, instytut matematyczhy, Warszawa. 1975, V 58, 1-353.

[10] B. Honari, Y. Bahrampour, Cut-point spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 1999, v. 127, N 9, 2797 2803.

[11] Ê. Ë. Êîçëîâ, Â. À. ×àòûðêî, Òîïîëîãè÷åñêèå ãðóïïû ïðåîáðàçîâàíèé è áèêîìïàêòû Äóãóíäæè, Ìàòåìàòè÷åñêèé ñáîðíèê, 2010, ò. 201, N 1, 103 128.