

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.В. Смагин

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

Математический факультет

2014

Содержание

Введение.	3
Глава I. Интеграл Лебега	3
§ 1. Ограниченные множества меры нуль.	3
§ 2. Измеримые функции.	6
§ 3. Интегрирование ступенчатых функций.	9
§ 4. Множество функций $C^+[a, b]$	10
§ 5. Интеграл в множестве $C^+[a, b]$	13
§ 6. Интеграл Римана и ступенчатые функции.	15
§ 7. Интеграл Римана и критерий Лебега.	17
§ 8. Суммируемые функции.	20
§ 9. Теорема Беппо Леви.	22
§10. Несобственный интеграл Римана и суммируемые функции.	24
§11. Теоремы Лебега и Фату.	26
Глава II. Измеримые множества	29
§12. Основные определения и свойства измеримых множеств.	29
§13. Структура измеримого множества положительной меры.	34
§14. Мера измеримого множества как его внешняя мера.	35
§15. Функции, измеримые по Лебегу.	39
§16. Определение интеграла по Лебегу.	41
§17. Интегрирование по измеримому множеству.	43
§18. Случай бесконечного промежутка.	46
§19. Случай функции нескольких переменных.	49
§20. Пространства суммируемых функций.	53
§21. Пространство ограниченных почти всюду функций.	58
Список литературы.	62

В данном пособии излагаются основные факты, касающиеся построения интеграла Лебега и теории меры. При изложении материала используется схема Ф.Рисса-Даниэля, в которой теория начинается с понятия интеграла на элементарных (ступенчатых) функциях и быстро, по сравнению со схемой Лебега, вводит в курс дела. Для понимания материала достаточно знаний и навыков, которыми студенты математических специальностей овладевают к третьему курсу обучения.

Пособие содержит подборку задач, которые предлагаются для решения на практических занятиях.

В конце приводится список использованных при написании данного пособия учебников [1-5]. Эти книги рекомендуются также для самостоятельного более глубокого изучения предмета.

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Ограниченные множества меры нуль

Множество $A \subset [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ называется *множеством меры нуль* (сокращенно ММН), если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \{\Delta_i\} - \text{конечная или счетная система интервалов}) \\ \left[\left(A \subset \bigcup_i \Delta_i \right) \wedge \left(\sum_i |\Delta_i| < \varepsilon \right) \right],$$

где для интервала $\Delta = (\alpha, \beta)$, его длину обозначаем $|\Delta| = \beta - \alpha$.

• ЗАДАЧА.

1.1. Доказать, что всякое конечное или счетное множество является множеством меры нуль.

Примером ММН может служить, что следует из задачи 1.1, всякое конечное или счетное множество. С другой стороны, любой отрезок $[a, b]$, где $a < b$, не является ММН. Действительно, любое конечное покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами имеет сумму длин этих интервалов больше, чем $b - a$. Если же отрезок покрыт счетной системой интервалов, то по лемме Бореля из этого покрытия всегда можно выбрать конечное подпокрытие этого отрезка.

• ЗАДАЧИ:

1.2. Пусть $B \subset A$ и A – ММН. Показать, что и B – ММН.

1.3. Доказать, что любой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал) не является множеством меры нуль.

1.4. Показать, что в определении множества меры нуль интервалы в покрытии можно заменить промежутками.

1.5. Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, быть множеством меры нуль ?

1.6. Пусть множество $F \subset [a, b]$ такое, что $F = [a, b] \setminus \bigcup_i \Delta_i$, где $\{\Delta_i\}$ – конечная или счетная система интервалов такая, что $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ ($i \neq j$) и $\sum_i |\Delta_i| = b - a$. Доказать, что F – ММН.

1.7. Можно ли построить на отрезке $[a, b]$ замкнутое множество полной меры, отличное от всего отрезка ?

1.8. Пусть множество $A \subset [a, b]$ и A – ММН. Является ли его замыкание $\bar{A}$ также множеством меры нуль ?

1.9. Доказать, что всякое замкнутое множество меры нуль является нигде не плотным.

1.10. Известно, что сумма длин интервалов, смежных к замкнутому множеству $F \subset [a, b]$, меньше $b - a$. Показать, что F не является множеством меры нуль.

1.11. Множество $A \subset [a, b]$ назовем множеством меры нуль, если A можно покрыть счетной системой интервалов, с конечной суммой длин, таким образом, что любая точка множества A окажется покрытой бесконечным числом этих интервалов. Доказать эквивалентность этого определения множества меры нуль первоначальному.

Приведем пример ММН, которое является множеством мощности континуум. Это множество Кантора, которое строится на $[0, 1]$ следующим образом. Из отрезка $[0, 1]$ исключается интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; затем из оставшихся двух отрезков $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$ (отрезков первого ранга) исключаются интервалы длины 3^{-2} с центрами в серединах указанных отрезков; затем из оставшихся четырех отрезков (отрезков второго ранга) исключаются интервалы длины 3^{-3} с центрами в серединах этих отрезков и так далее до бесконечности. Множество

D , оставшееся в $[0, 1]$ после исключения всех интервалов, и есть *множество Кантора*. Легко подсчитать, что сумма, длин удаленных из $[0, 1]$ интервалов, равна единице. Воспользовавшись задачей 1.6, получим, что D – ММН.

Заметим, что точки множества D делятся на *точки первого рода* – концы удаленных интервалов вместе с точками 0 и 1, и *точки второго рода* – все остальные точки множества D . Очевидно, что множество точек первого рода счетное. Примером точки второго рода может служить число $1/4$. Можно показать, что множество $D \subset [0, 1]$ включает те и только те числа отрезка $[0, 1]$, которые записываются в виде троичной дроби (конечной или бесконечной), не содержащей единицы в числе своих троичных знаков. Отсюда непосредственно следует, что множество D имеет мощность континуум.

Построим на отрезке $[0, 1]$ еще одно множество. Зададим число $\alpha \in (0, 1)$. Удалим из отрезка $[0, 1]$ интервал длины $\alpha/2$ с центром в середине отрезка; из оставшихся двух отрезков удалим интервалы длины $\alpha/2^3$ с центрами в серединах этих отрезков; из оставшихся четырех отрезков удалим интервалы длины $\alpha/2^5$ с центрами в серединах этих отрезков и так далее. Множество, оставшееся в $[0, 1]$ после удаления всех интервалов, обозначим $\tilde{D}$. Легко подсчитать, что сумма длин удаленных из $[0, 1]$ интервалов равна $\alpha < 1$. Воспользовавшись задачей 1.10, получим, что $\tilde{D}$ не является ММН. Множество $\tilde{D}$ назовем *множеством Кантора ненулевой меры*.

• ЗАДАЧИ:

1.12. Доказать, что множества Кантора (нулевой и ненулевой меры) являются нигде не плотными.

1.13. Пусть A – ММН на отрезке $[0, 1]$ и нигде не плотно на этом отрезке. Является ли его замыкание $\bar{A}$ – ММН ?

Множество $A \subset [a, b]$ называется *множеством полной меры*, если множество $[a, b] \setminus A$ является ММН.

Если некоторое свойство выполняется на множестве полной меры отрезка $[a, b]$, то говорят, что это свойство выполняется *почти всюду* (п.в.) на $[a, b]$.

Так, например, для функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных на $[a, b]$, обозначение $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ означает, что множество $\{t \in [a, b] \mid x(t) \neq y(t)\}$ – ММН.

• ЗАДАЧА.

1.14. Пусть почти всюду на $[a, b]$ задана последовательность функций $\{f_n(t)\}$ такая, что при $n \rightarrow \infty$ выполнено $f_n(t) \xrightarrow{п.в.} f(t)$ и $f_n(t) \xrightarrow{п.в.} g(t)$. Показать, что $f(t) \stackrel{п.в.}{=} g(t)$.

ЛЕММА 1. Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство. Пусть $A = \cup_i A_i$, где все A_i – ММН. Зададим $\varepsilon > 0$. Каждое множество A_i покроем конечной или счетной системой интервалов $\{\Delta_j^i\}_j$ с суммой длин меньше $\varepsilon/2^i$. Тогда множество A окажется покрытым конечной или счетной системой интервалов $\{\Delta_j^i\}_{i,j}$ такой, что

$$\sum_{i,j} |\Delta_j^i| = \sum_i \sum_j |\Delta_j^i| < \sum_i \varepsilon/2^i \leq \varepsilon.$$

Таким образом, A – ММН. ♡ – конец доказательства.

§ 2. Измеримые функции

Функция $h(t)$ называется *ступенчатой* на отрезке $[a, b]$, если существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ отрезка такое, что в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $h(t)$ принимает некоторое постоянное значение $b_i \in \mathbb{R}^1$ ($i = \overline{1, n}$). Значения функции $h(t)$ в точках деления t_i нас интересовать не будут, поскольку множество $\{t_i\}_{i=0}^n$ – ММН.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Пусть $h(t), k(t)$ – ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда функция $\varphi(t) = \varphi[h(t), k(t)]$ – ступенчатая на $[a, b]$.

Доказательство очевидно, если объединить разбиения отрезка $[a, b]$, порожденные функциями $h(t)$ и $k(t)$. ♡

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $h(t), k(t)$ – ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда ступенчатыми являются и следующие функции:

$$\alpha h(t) \ (\alpha \in \mathbb{R}^1), \ |h(t)|, \ h(t) + k(t), \ h(t)k(t), \ \max\{h(t), k(t)\}, \ \min\{h(t), k(t)\}.$$

Доказательство. Следует лишь отметить непрерывность функций $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$, что следует, например, из представлений:

$$\max\{x, y\} = 2^{-1}(x + y + |x - y|), \quad \min\{x, y\} = 2^{-1}(x + y - |x - y|). \quad \heartsuit$$

ЛЕММА 3. Пусть $h(t)$, $k(t)$ – ступенчатые на $[a, b]$ функции и $k(t) \neq 0$ п.в. на $[a, b]$. Тогда частное $h(t)/k(t)$ – ступенчатая на $[a, b]$ функция.

Для доказательства леммы 3, как и в лемме 2, достаточно объединить разбиения отрезка $[a, b]$, порожденные функциями $h(t)$ и $k(t)$. ♡

Вещественная функция $x(t)$, для которой допускаются и бесконечные значения, называется *измеримой* на $[a, b]$, если:

- 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;
- 2) $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$;
- 3) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций таких, что $h_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Очевидно, что всякая ступенчатая функция измерима.

Заметим также, что если $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$, то и функция $y(t)$ измерима на $[a, b]$.

• ЗАДАЧИ:

2.1. Показать, что на $[0, 1]$ измеримы функции:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}.$$

2.2. Пусть множество $A \subset [a, b]$. Рассмотрим

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a, b] \setminus A \end{cases}$$

характеристическую функцию множества A . Пусть $x(t)$ – произвольная конечная п.в. на $[a, b]$ функция. Показать, что если A – ММН, то функция $y(t) = \chi_A(t)x(t)$ является измеримой.

2.3. Показать, исходя из определения, измеримость всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции.

ЛЕММА 4. Пусть $x(t)$, $y(t)$ – измеримые на $[a, b]$ функции. Пусть функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Тогда функция $\varphi(t) = \varphi[x(t), y(t)]$ – измеримая на $[a, b]$.

Доказательство. Определим на отрезке $[a, b]$ множества:

$$A_1 = \{t \in [a, b] \mid x(t) \text{ — не определена}\}, \quad B_1 = \{t \in [a, b] \mid y(t) \text{ — не определена}\}, \\ A_2 = \{t \in [a, b] \mid |x(t)| = \infty\}, \quad B_2 = \{t \in [a, b] \mid |y(t)| = \infty\},$$

$$A_3 = \{t \in [a, b] \mid h_n(t) \not\rightarrow x(t)\}, \quad B_3 = \{t \in [a, b] \mid k_n(t) \not\rightarrow y(t)\}.$$

Здесь $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ ступенчатые функции такие, что $h_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ и $k_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} y(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Функция $\varphi(t)$ определена и конечна на множестве полной меры $[a, b] \setminus (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3)$. Кроме того, ступенчатые функции $\varphi[h_n(t), k_n(t)] \rightarrow \varphi[x(t), y(t)]$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, $\varphi(t)$ – измеримая на $[a, b]$ функция. ♡

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x(t), y(t)$ – измеримые на $[a, b]$ функции. Тогда измеримыми являются и следующие функции:

$$\alpha x(t) \ (\alpha \in \mathbb{R}^1), \ |x(t)|, \ x(t) + y(t), \ x(t)y(t), \ \max\{x(t), y(t)\}, \ \min\{x(t), y(t)\}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $x(t), y(t)$ – измеримые на $[a, b]$ функции и $y(t) \neq 0$ п.в. на $[a, b]$. Тогда функция $x(t)/y(t)$ – измеримая на $[a, b]$.

Доказательство. Дополним множества A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) множеством $B_0 = \{t \in [a, b] \mid y(t) = 0\}$, которое также является ММН. Тогда на множестве полной меры $[a, b] \setminus (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup B_0)$ функция $x(t)/y(t)$ определена и конечна. Пусть $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ соответствующие $x(t)$ и $y(t)$ последовательности ступенчатых функций. Может оказаться, что какие-то функции $k_n(t) = 0$ на некоторых интервалах соответствующих разбиений. Определим тогда по функциям $k_n(t)$ новые ступенчатые функции

$$\bar{k}_n(t) = \begin{cases} k_n(t), & k_n(t) \neq 0 \\ 1/n, & k_n(t) = 0. \end{cases}$$

Для последовательности функций $\{\bar{k}_n(t)\}$ на множестве полной меры $[a, b] \setminus (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3 \cup B_0)$ при $n \rightarrow \infty$ получим

$$|y(t) - \bar{k}_n(t)| \leq |y(t) - k_n(t)| + |k_n(t) - \bar{k}_n(t)| \leq |y(t) - k_n(t)| + \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ следует $h_n(t)/\bar{k}_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)/y(t)$. ♡

Для произвольной функции $x(t)$ определим две функции:

$$x^+(t) = \max\{x(t), 0\}, \quad x^-(t) = \max\{0, -x(t)\}. \quad (1)$$

Очевидно, что $x(t) = x^+(t) - x^-(t)$ и $|x(t)| = x^+(t) + x^-(t)$. Заметим, что для функции $x(t)$, измеримой на $[a, b]$, функции $x^+(t)$ и $x^-(t)$ также измеримы.

§ 3. Интегрирование ступенчатых функций

Пусть ступенчатая на $[a, b]$ функция $h(t)$ принимает в соответствующих интервалах $\Delta_i = (t_{i-1}, t_i)$ значения b_i , где $i = \overline{1, n}$. Определим интеграл от $h(t)$ формулой

$$Ih = \sum_{i=1}^n b_i |\Delta_i|. \quad (2)$$

Нетрудно увидеть, что всякая ступенчатая функция интегрируема по Риману, а определенный в (2) интеграл Ih совпадает с интегралом Римана от этой функции, то есть

$$Ih = (R) \int_a^b h(t) dt.$$

Из известных свойств интеграла Римана следует:

ЛЕММА 6. Пусть h, h_1, h_2 — ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда:

- 1) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}^1) [I(\alpha h) = \alpha Ih]$,
- 2) $I(h_1 + h_2) = Ih_1 + Ih_2$,
- 3) если $h_1(t) \leq h_2(t)$ п.в. на $[a, b]$, то $Ih_1 \leq Ih_2$.

В частности, если $h(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$, то $Ih \geq 0$.

Далее тот факт, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ п.в. на $[a, b]$ монотонно убывая (соответственно возрастающая) при $n \rightarrow \infty$ стремится к функции $x(t)$, будем обозначать $x_n(t) \searrow x(t)$ (соответственно $x_n(t) \nearrow x(t)$).

ЛЕММА 7. Пусть $\{h_n(t)\}$ — последовательность неотрицательных ступенчатых функций и $h_n(t) \searrow 0$. Тогда $Ih_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Определим множество $A_0 = \{t \in [a, b] \mid h_n(t) \not\searrow 0\}$. Через A_i для $i \in \mathbb{N}$ обозначим множество точек разбиения $[a, b]$, соответствующих функции $h_i(t)$. Тогда множество $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ — ММН. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\{\Delta_k\}$ — система интервалов такая, что $(A \subset \bigcup_k \Delta_k) \wedge (\sum_k |\Delta_k| < \varepsilon)$. Возьмем точку $t' \in [a, b] \setminus A$. Тогда $(\exists n = n(t')) [h_n(t') < \varepsilon]$. Точка t' принадлежит некоторому интервалу $\Delta' = \Delta(t')$, в котором функция h_n принимает постоянное значение $h_n(t')$. Аналогичные интервалы построим для каждой точки $t' \in [a, b] \setminus A$.

Интервалы Δ_k вместе с интервалами Δ' образуют покрытие отрезка $[a, b]$. Воспользуемся леммой Гейне-Бореля и выделим из этого покрытия конечное

подпокрытие, интервалы которого обозначим $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m; \Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_p$. Здесь $\Delta_i \in \{\Delta_k\}$ и $\Delta'_i \in \{\Delta'_k\}$. Обозначим через N наибольший из номеров, построенных по соответствующим точкам t' , которые определяют интервалы $\Delta'_1, \dots, \Delta'_p$. Тогда функция h_N на интервалах $\Delta'_1, \dots, \Delta'_p$ меньше ε . На интервалах $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ функция $h_N(t) \leq \max h_1(t) = M$.

Таким образом, для всех $n \geq N$

$$0 \leq Ih_n \leq Ih_N < \varepsilon(b-a) + M\varepsilon = (b-a+M)\varepsilon,$$

что означает $Ih_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ♡

ЛЕММА 8. Пусть $\{h_n(t)\}$ – последовательность неотрицательных ступенчатых функций и эта последовательность п.в. на $[a, b]$ монотонно убывает. Пусть также $Ih_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $h_n(t) \searrow 0$.

Доказательство. Определим, как в лемме 7, множества A_i ($i \in \mathbb{N}$), а также множество $A_0 = \{t \in [a, b] \mid \{h_n(t)\} \text{ не является монотонно убывающей}\}$. Тогда множество $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ – ММН, а множество $[a, b] \setminus A = B$ – множество полной меры.

Для всякого $t \in B$ получим $h_n(t) \searrow g(t) \geq 0$. Рассмотрим множество $F = \{t \in B \mid g(t) > 0\}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим множество $F_m = \{t \in B \mid g(t) \geq 1/m\}$. Очевидно, что $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Покажем, что каждое F_m – ММН.

Возьмем точку $t \in F_m$. Тогда $(\forall n \in \mathbb{N}) [h_n(t) \geq g(t) \geq 1/m]$. Следовательно, интервалы постоянства функции $h_n(t)$, на которых $h_n(t) \geq 1/m$, образуют покрытие множества F_m . Обозначим через δ_n сумму длин этих интервалов. Тогда $Ih_n \geq \delta_n/m$. Отсюда $\delta_n \leq m Ih_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, множество F_m можно покрыть конечной системой интервалов со сколь угодно малой суммой длин. Это и означает, что F_m – ММН.

Отсюда следует, что F – ММН, то есть $h_n(t) \searrow 0$. ♡

§ 4. Множество функций $C^+[a, b]$

Множество $C^+[a, b]$ (или просто C^+) состоит из функций $x(t)$ таких, что:

- 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;
- 2) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций таких, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $(\exists c \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ih_n \leq c]$.

Очевидно, что всякая ступенчатая функция принадлежит C^+ .

Заметим также, что если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+$, то и функция $y \in C^+$.

• ЗАДАЧИ:

4.1. Показать, что функции в задачах 2.1 и 2.2 из класса C^+ .

4.2. Пусть на $[a, b]$ множество $A = \bigcup_i \Delta_i$, где $\{\Delta_i\}$ — конечная или счетная система интервалов таких, что $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Показать, что характеристическая функция $\chi_A \in C^+$.

4.3. Показать, что на отрезке $[0, 1]$ функции:

$x(t) = \ln t$, $y(t) = -t^{-1}$, $z(t) = (t - 1)^{-1}$ не принадлежат классу C^+ .

ЛЕММА 9. Пусть функции $x, y \in C^+$. Тогда множеству C^+ принадлежат и следующие функции:

$$\alpha x(t) \ (\alpha \geq 0), \quad x(t) + y(t), \quad \min\{x(t), y(t)\}, \quad \max\{x(t), y(t)\}.$$

Доказательство. Для функций $\alpha x(t)$ и $x(t) + y(t)$ утверждение леммы очевидно.

Докажем, что $\min\{x(t), y(t)\} \in C^+$. Пусть $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ последовательности ступенчатых на $[a, b]$ функций таких, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ и $k_n(t) \nearrow y(t)$, причем $Ih_n \leq c_1$ и $Ik_n \leq c_2$. Далее заметим, что ступенчатые функции $\min\{h_n(t), k_n(t)\} \nearrow \min\{x(t), y(t)\}$ и, наконец, $I \min\{h_n, k_n\} \leq Ih_n \leq c_1$.

Перейдем к доказательству $\max\{x(t), y(t)\} \in C^+$. Очевидно, что ступенчатые функции $H_n(t) = \max\{h_n(t), k_n(t)\} \nearrow \max\{x(t), y(t)\}$. Выберем константу $\lambda \leq 0$ такую, что $(h_1(t) \geq \lambda) \wedge (k_1(t) \geq \lambda)$ п.в. на $[a, b]$. Тогда получим $(h_n(t) - \lambda \geq h_1(t) - \lambda \geq 0) \wedge (k_n(t) - \lambda \geq k_1(t) - \lambda \geq 0)$. Следовательно, функция $H_n(t) = \max\{h_n(t) - \lambda, k_n(t) - \lambda\} + \lambda \leq h_n(t) + k_n(t) - \lambda$. Таким образом, $IH_n \leq Ih_n + Ik_n - \lambda(b - a) \leq c_1 + c_2 - \lambda(b - a)$. ♡

• ЗАДАЧИ:

4.4. Показать, что существует замкнутое множество $F \subset [0, 1]$ такое, что его характеристическая функция $\chi_F \notin C^+$.

4.5. Привести примеры функций $x(t)$ и $y(t)$ из класса C^+ таких, что функции: $-x(t)$, $|x(t)|$, $x(t) - y(t)$ не принадлежат C^+ .

ТЕОРЕМА 1. Всякая функция $x \in C^+[a, b]$ почти всюду конечна.

Доказательство. Пусть $\{h_n(t)\}$ – соответствующая $x(t)$ последовательность ступенчатых функций. Заметим, что $x(t) \geq h_1(t) > -\infty$ п.в. на $[a, b]$. Поэтому множество $\{t \mid x(t) = -\infty\}$ есть ММН.

Покажем, что и множество $\{t \mid x(t) = +\infty\}$ есть ММН. Для этого, без ограничения общности, будем считать, что п.в. на $[a, b]$ функция $x(t) \geq 0$ и все $h_n(t) \geq 0$. Если это не выполнено, то поступим следующим образом. Выберем константу $\lambda \leq h_1(t)$ п.в. на $[a, b]$. На $[a, b]$ п.в. функция $\bar{x}(t) = x(t) - \lambda \geq x(t) - h_1(t) \geq 0$. Очевидно, что $\bar{x} \in C^+$. На $[a, b]$ п.в. ступенчатые функции $\bar{h}_n(t) = h_n(t) - \lambda \geq h_n(t) - h_1(t) \geq 0$. Кроме того, $\bar{h}_n(t) \nearrow \bar{x}(t)$ и $I\bar{h}_n = Ih_n - I\lambda \leq c - \lambda(b - a)$. Осталось заметить, что выполняется равенство $\{t \mid x(t) = +\infty\} = \{t \mid \bar{x}(t) = +\infty\}$.

Считаем далее, что наша функция $x(t) \geq 0$ и соответствующие ей ступенчатые функции $h_n(t) \nearrow x(t)$ такие, что $h_n(t) \geq 0$. Будем также считать, что разбиение отрезка $[a, b]$, порожденное функцией h_{n+1} , получается из разбиения, порожденного функцией h_n , путем добавления новых точек деления.

Обозначим $E = \{t \mid x(t) = +\infty\}$. Удалим из E множество точек, где не выполняется свойство $h_n(t) \nearrow x(t)$, а также точки всех разбиений отрезка $[a, b]$, которые порождены ступенчатыми функциями $h_n(t)$. Останется множество $E' \subset E$, такое что $E \setminus E'$ – ММН. Так как $E = E' \cup (E \setminus E')$, то для доказательства E – ММН достаточно показать, что E' – ММН.

Фиксируем произвольное число $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим конечную систему интервалов разбиения $[a, b]$, порожденного ступенчатой функцией h_k , на которых $h_k(t) \geq m$. Объединение этих интервалов обозначим F_k . Заметим, что $E' \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Действительно, если $t \in E'$, то $h_n(t) \nearrow x(t) = +\infty$. Поэтому $(\exists k)[h_k(t) \geq m]$, то есть $t \in F_k$. Так как $h_k(t) \leq h_{k+1}(t)$ п.в. на $[a, b]$, то с точностью до конечного числа точек из разбиения, порожденного функцией h_k , выполняется $F_k \subset F_{k+1}$. Следовательно, с точностью до множества меры нуль $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k \subset \dots$.

Построим покрытие множества E' . К интервалам, составляющим множество F_1 , добавим интервалы из F_2 , не вошедшие в F_1 . К этим интервалам добавим интервалы из F_3 , не вошедшие в F_2 и т.д. Получим не более чем

счетное покрытие множества E' интервалами. Обозначим через δ_k сумму длин интервалов, составляющих F_k . Учитывая, что $h_n(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$, получим $m\delta_k \leq Ih_k \leq c$ или $\delta_k \leq c/m$. Величина δ_k есть частичная сумма ряда длин всех интервалов, покрывающих множество E' . Тогда сумма длин всех интервалов, покрывающих множество E' , также не превосходит c/m . Но число $m \in \mathbb{N}$ можно взять сколь угодно большим, то есть сделать число c/m сколь угодно малым. Отсюда следует, что E' – ММН. ♡

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая функция $x \in C^+$ является измеримой.*

§ 5. Интеграл в множестве $C^+[a, b]$

Пусть функция $x \in C^+$ и $\{h_n(t)\}$ – соответствующая последовательность ступенчатых функций. Последовательность $\{Ih_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Тогда существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n$.

ЛЕММА 10. *Пусть функции $x, y \in C^+$ и $x(t) \leq y(t)$ п.в. на $[a, b]$. Пусть $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ ступенчатые функции такие, что: $h_n(t) \nearrow x(t)$, $k_n(t) \nearrow y(t)$, $Ih_n \leq c_1$, $Ik_n \leq c_2$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Ik_n$.*

Доказательство. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\{h_m(t) - k_n(t)\}_{n=1}^\infty$. При $n \rightarrow \infty$ получим

$$h_m(t) - k_n(t) \searrow h_m(t) - y(t) \leq x(t) - y(t) \leq 0.$$

Определим функции $(h_m - k_n)^+(t) = \max\{h_m(t) - k_n(t), 0\}$. При $n \rightarrow \infty$ получим $(h_m - k_n)^+(t) \searrow 0$. Из леммы 7 следует, что $I(h_m - k_n)^+ \searrow 0$. Так как $h_m(t) - k_n(t) \leq (h_m - k_n)^+(t)$, то

$$Ih_m - Ik_n = I(h_m - k_n) \leq I(h_m - k_n)^+. \quad (3)$$

Переходя в (3) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $Ih_m - \lim_{n \rightarrow \infty} Ik_n \leq 0$, то есть $Ih_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Ik_n$. Отсюда при $m \rightarrow \infty$ следует утверждение леммы. ♡

Определим теперь интеграл для $x \in C^+$ следующим образом:

$$(C^+)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n. \quad (4)$$

Из леммы 10 следует, что это определение $(C^+)Ix$ не зависит от выбора последовательности ступенчатых функций $\{h_n\}$ и, следовательно, корректно. Это замечание позволяет переформулировать лемму 10.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функции $x, y \in C^+$ и $x(t) \leq y(t)$ п.в. на $[a, b]$. Тогда $(C^+)Ix \leq (C^+)Iy$.

Заметим, что если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (C^+)Iy$.

Непосредственно из определения интеграла (4) следует

ЛЕММА 11. Пусть функции $x, y \in C^+$. Тогда:

- 1) $(\forall \alpha \geq 0)[(C^+)I(\alpha x) = \alpha(C^+)Ix]$,
- 2) $(C^+)I(x + y) = (C^+)Ix + (C^+)Iy$.

• ЗАДАЧА.

5.1. Вычислить C^+ -интегралы от ступенчатой функции, а также от функций, определенных в задачах 2.1, 2.2, 4.2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана последовательность функций $\{x_n\} \subset C^+$ такая, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n)[(C^+)Ix_n \leq c]$.

Тогда функция $x \in C^+$ и $(C^+)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (C^+)Ix_n$.

Доказательство. Для каждой функции $x_k \in C^+$ возьмем соответствующую последовательность ступенчатых функций $\{h_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, в частности такую, что $h_{kn}(t) \nearrow x_k(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Определим ступенчатые функции $h_n(t) = \max\{h_{1n}(t), h_{2n}(t), \dots, h_{nn}(t)\}$. Последовательность $\{h_n(t)\}$ монотонно возрастает. Заметим, что $h_n(t) \leq \max\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} = x_n(t)$. Поэтому $Ih_n \leq (C^+)Ix_n \leq c$.

Обозначим $x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t)$. Из определения множества C^+ следует, что функция $x^* \in C^+$ и $(C^+)Ix^* = \lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n$. Заметим, что $h_{kn}(t) \leq h_n(t) \leq x_n(t)$ при любом фиксированном k и $n \geq k$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \rightarrow \infty$, получим $x_k(t) \leq x^*(t) \leq x(t)$. Отсюда при $k \rightarrow \infty$ следует $x^*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} x(t)$. Таким образом, $x \in C^+$. Далее воспользуемся неравенством $h_n(t) \leq x_n(t) \leq x(t)$, из которого получим $Ih_n \leq (C^+)Ix_n \leq (C^+)Ix$. Так как $(C^+)Ix = (C^+)Ix^* = \lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n$, то из последней оценки следует $(C^+)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (C^+)Ix_n$. ♡

СЛЕДСТВИЕ. Пусть дан функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$, где все функции $y_k \in C^+$ и $y_k(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$. Пусть также $(\exists c)(\forall n)[\sum_{k=1}^n (C^+)Iy_k \leq c]$. Тогда функция $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in C^+$ и $(C^+)Ix = \sum_{k=1}^{\infty} (C^+)Iy_k$.

Доказательство. Следует определить функции $x_n(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$ и применить доказанную теорему 2. ♡

§ 6. Интеграл Римана и ступенчатые функции

Напомним известную из курса математического анализа (напр., [6]) схему построения интеграла Римана от ограниченной на $[a, b]$ функции $x(t)$. Обозначим через P разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $\Delta_j = [t_{j-1}, t_j]$, где $j = \overline{1, k}$. Обозначим

$$m_j = \inf_{t \in \Delta_j} x(t), \quad M_j = \sup_{t \in \Delta_j} x(t).$$

Составим две суммы, зависящие от разбиения P ,

$$s_P = \sum_j m_j |\Delta_j|, \quad S_P = \sum_j M_j |\Delta_j|,$$

которые называются соответственно нижней и верхней интегральными суммами Дарбу.

Пусть даны два разбиения P_1 и P_2 , а разбиение $P = P_1 \cup P_2$. Тогда, очевидно, $s_{P_1} \leq s_P \leq S_P \leq S_{P_2}$. Таким образом, при добавлении новых точек деления нижняя сумма Дарбу может лишь увеличиться, а верхняя сумма лишь уменьшиться. Кроме того, для произвольных разбиений любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы. Следовательно, определены два числа:

$$s = \sup_P s_P, \quad S = \inf_P S_P,$$

где точные верхняя и нижняя границы берутся по всем разбиениям P отрезка $[a, b]$. Очевидно, что $s \leq S$.

Если $s = S$, то говорят, что функция $x(t)$ интегрируема на $[a, b]$ по Риману, причем значение интеграла Римана

$$(R) \int_a^b x(t) dt = (R)Ix = s = S.$$

Если же $s < S$, то говорят, что функция $x(t)$ по Риману на $[a, b]$ не интегрируема.

Возьмем последовательность разбиений $\{P_n\}$ отрезка $[a, b]$ такую, что длина максимального промежутка в разбиении P_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Оказывается, что тогда $s_{P_n} = s_n \rightarrow s$ и $S_{P_n} = S_n \rightarrow S$.

Ограниченной на $[a, b]$ функции $x(t)$ и разбиению P сопоставим две ступенчатые функции $h_P(t)$ и $H_P(t)$, первая из которых в промежутке Δ_j принимает значения m_j , а вторая — M_j . Тогда $s_p = Ih_P$ и $S_p = IH_P$.

Предположим далее, что на $[a, b]$ задана последовательность разбиений $\{P_n\}$ такая, что $P_n \subset P_{n+1}$, то есть разбиение P_{n+1} получается из разбиения P_n путем добавления новых точек деления. Кроме того, считаем что длина максимального промежутка в разбиении P_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Такую последовательность разбиений будем называть *стандартной*. Последовательности таких разбиений сопоставим, как было описано выше, две последовательности ступенчатых функций: $\{h_n(t)\}$ и $\{H_n(t)\}$, где $h_n(t) = h_{P_n}(t)$ и $H_n(t) = H_{P_n}(t)$. Заметим, что п.в. на $[a, b]$

$$h_1(t) \leq h_2(t) \leq \dots \leq h_n(t) \leq \dots \leq x(t) \leq \dots \leq H_n(t) \leq \dots \leq H_2(t) \leq H_1(t).$$

Обозначим через $\underline{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$ предельные функции этих последовательностей ступенчатых функций, то есть $h_n(t) \nearrow \underline{x}(t)$ и $H_n(t) \searrow \bar{x}(t)$. Очевидно, что $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$ п.в. на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 3. *Ограниченная на $[a, b]$ функция $x(t)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $\underline{x}(t) = x(t) = \bar{x}(t)$ п.в. на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть прежде функция $x(t)$ интегрируема по Риману. Последовательность ступенчатых функций $\{H_n(t) - h_n(t)\}$ монотонно убывает, то есть $H_n(t) - h_n(t) \geq H_{n+1}(t) - h_{n+1}(t)$, и $H_n(t) - h_n(t) \geq 0$. Кроме того, $I(H_n - h_n) = IH_n - Ih_n \rightarrow S - s = 0$. Воспользовавшись леммой 8, получим $H_n(t) - h_n(t) \searrow 0$. С другой стороны, $H_n(t) - h_n(t) \searrow \bar{x}(t) - \underline{x}(t)$. Следовательно, $\underline{x}(t) = x(t) = \bar{x}(t)$.

Теперь предположим, что $\underline{x}(t) = \bar{x}(t)$. Следовательно, $H_n(t) - h_n(t) \searrow \bar{x}(t) - \underline{x}(t) = 0$. Воспользовавшись леммой 7, получим $I(H_n - h_n) \searrow 0$. Но, с другой стороны, $I(H_n - h_n) = IH_n - Ih_n \rightarrow S - s$. Таким образом, $s = S$ и функция $x(t)$ интегрируема по Риману. ♡

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть функция $x(t)$ интегрируема на $[a, b]$ по Риману. Тогда $x \in C^+$ и $(C^+)Ix = (R)Ix$.*

Доказательство. По произвольной стандартной последовательности разбиений отрезка $[a, b]$ определим, как описано выше, последовательность сту-

пенчатых функций $\{h_n(t)\}$. Заметим, что $h_n(t) \nearrow \underline{x}(t) = x(t)$ и, кроме того, $Ih_n = s_n \leq s = (R)Ix < \infty$. Следовательно, $x \in C^+$, а также выполняется $(C^+)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = (R)Ix$. ♡

• ЗАДАЧА.

6.1. Доказать, что для $i = 1, 2, 3, 4$ определенные на $[0, 1]$ функции $x_i(t)$ принадлежат классу C^+ , и вычислить $(C^+)Ix_i$:

а)

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2, & t - \text{иррациональное} \\ t^3, & t - \text{рациональное} \end{cases} ;$$

б)

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2, & (t - \text{иррациональное}) \wedge (t > 1/3) \\ t^3, & (t - \text{иррациональное}) \wedge (t < 1/3) \\ t^4, & t - \text{рациональное} \end{cases} ;$$

в) A – ММН на $[0, 1]$ и множество E – произвольное

$$x_3(t) = \begin{cases} t^2, & t \in A \cap E \\ t^3, & t \in [0, 1] \setminus (A \cap E) \end{cases} ;$$

г) D – канторово ММН на $[0, 1]$

$$x_4(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & t \in [0, 1/2) \cap ([0, 1] \setminus D) \\ \cos \pi t, & t \in [1/2, 1] \cap ([0, 1] \setminus D) \\ \sin \pi t + \cos \pi t, & t \in D \end{cases} .$$

§ 7. Интеграл Римана и критерий Лебега

Пусть $x(t)$ – ограниченная на $[a, b]$ функция. По стандартной последовательности разбиений $\{P_n\}$ были построены функции $\underline{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$, которые, конечно же, зависят от последовательности $\{P_n\}$. Покажем, что функции $\underline{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$ можно задавать непосредственно по функции $x(t)$, во всяком случае с точностью до ММН.

Определим на $[a, b]$ две функции $x_*(t)$ и $x^*(t)$, которые для $t_0 \in [a, b]$ задаются выражениями:

$$x_*(t_0) = \liminf_{t \rightarrow t_0} x(t), \quad x^*(t_0) = \limsup_{t \rightarrow t_0} x(t).$$

Здесь через $\liminf_{t \rightarrow t_0} x(t)$ обозначен нижний предел $x(t)$ при $t \rightarrow t_0$, а через $\limsup_{t \rightarrow t_0} x(t)$, соответственно, верхний предел. Напомним, что для $t_0 \in [a, b]$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b]) [(|t - t_0| < \delta) \rightarrow (x_*(t_0) - \varepsilon < x(t) < x^*(t_0) + \varepsilon)]$.

Заметим также, что для $t \in [a, b]$ всегда $x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t)$.

ЛЕММА 12. *Функция $x(t)$, ограниченная на $[a, b]$, непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда $x_*(t_0) = x(t_0) = x^*(t_0)$.*

Доказательство. Пусть функция $x(t)$ непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$. Тогда $x(t) \rightarrow x(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$, что означает

$$\liminf_{t \rightarrow t_0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \limsup_{t \rightarrow t_0} x(t).$$

Таким образом, $x_*(t_0) = x(t_0) = x^*(t_0)$.

Пусть теперь в точке $t_0 \in [a, b]$ выполняется $x_*(t_0) = x(t_0) = x^*(t_0)$. Это означает, что $x(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t)$, то есть $x(t)$ непрерывна в точке t_0 . ♡

ЛЕММА 13. *Пусть $x(t)$ – ограниченная на $[a, b]$ функция. Пусть $\{P_n\}$ – стандартная последовательность разбиений отрезка $[a, b]$, по которой определены функции $\underline{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$. Тогда $\underline{x}(t) \stackrel{n.B.}{=} x_*(t)$ и $\bar{x}(t) \stackrel{n.B.}{=} x^*(t)$.*

Доказательство. Из отрезка $[a, b]$ удалим множество точек, образующих разбиения P_n , а также множество точек, в которых не выполняются свойства: $h_n(t) \nearrow \underline{x}(t)$ и $H_n(t) \searrow \bar{x}(t)$. Оставшееся на $[a, b]$ множество полной меры обозначим $[a, b]'$.

Возьмем произвольное $t_0 \in [a, b]'$ и покажем, что $\underline{x}(t_0) = x_*(t_0)$. По произвольному заданному $\varepsilon > 0$

$$(\exists \delta > 0)(\forall t \in [a, b]) [(|t - t_0| < \delta) \rightarrow (x(t) > x_*(t_0) - \varepsilon)].$$

Кроме того, $(\exists n \in \mathbb{N}) [t_0 \in \Delta_j^n \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)]$, где $\Delta_j^n = [t_{j-1}^n, t_j^n]$ – некоторый отрезок, порожденный разбиением P_n . Но тогда

$$h_n(t_0) = \inf_{t \in \Delta_j^n} x(t) \geq x_*(t_0) - \varepsilon.$$

Из последней оценки при $n \rightarrow \infty$ получим $\underline{x}(t_0) \geq x_*(t_0) - \varepsilon$. С другой стороны, $(\exists t \in \Delta_j^n) [x(t) < x_*(t_0) + \varepsilon]$. Следовательно, справедлива оценка

$$h_n(t_0) = \inf_{t \in \Delta_j^n} x(t) < x_*(t_0) + \varepsilon,$$

из которой при $n \rightarrow \infty$ получим $\underline{x}(t_0) \leq x_*(t_0) + \varepsilon$. Таким образом, п.в. на $[a, b]$ для произвольного $\varepsilon > 0$ установлены оценки $x_*(t) - \varepsilon \leq \underline{x}(t) \leq x_*(t) + \varepsilon$. Следовательно, установили, что $\underline{x}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} x_*(t)$.

Аналогично доказывается, что $\bar{x}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} x^*(t)$. ♡

ТЕОРЕМА (ЛЕБЕГА) 4. Ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $x(t)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва есть ММН.

Доказательство. Пусть задана $\{P_n\}$ – стандартная последовательность разбиений $[a, b]$, по которой определены функции $\underline{x}(t)$ и $\bar{x}(t)$.

Предположим прежде, что функция $x(t)$ интегрируема по Риману. Тогда (теорема 3 и лемма 13) п.в. на $[a, b]$ выполняется

$$x_*(t) = \underline{x}(t) = x(t) = \bar{x}(t) = x^*(t).$$

Следовательно (лемма 12), п.в. на $[a, b]$ функция $x(t)$ непрерывна.

Теперь предположим, что функция $x(t)$ на $[a, b]$ непрерывна на множестве точек полной меры. Тогда (леммы 12 и 13) п.в. на $[a, b]$ выполняется

$$\underline{x}(t) = x_*(t) = x(t) = x^*(t) = \bar{x}(t).$$

Следовательно (теорема 3), функция $x(t)$ интегрируема по Риману. ♡

• ЗАДАЧИ:

7.1. Может ли быть интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функция, разрывная во всех точках непустого открытого множества $G \subset [a, b]$?

7.2. Показать на примере, что из интегрируемости по Риману функции на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$, еще не следует, что она интегрируема на $[a, b]$.

7.3. Доказать, что если функция интегрируема по Риману на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$ таком, что $a < \alpha < \beta < b$, и если она ограничена на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на $[a, b]$.

7.4. Верно ли утверждение: "Если A – ММН на $[a, b]$, то характеристическая функция $\chi_A(t)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ " ?

7.5. Верно ли утверждение: "Если A – нигде не плотное множество на $[a, b]$, то характеристическая функция $\chi_A(t)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ " ?

7.6. Верно ли утверждение: "Если A – ММН нигде не плотное на $[a, b]$, то характеристическая функция $\chi_A(t)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ "?

7.7. Пусть F – ММН замкнутое на $[a, b]$. Интегрируема ли характеристическая функция $\chi_F(t)$ на $[a, b]$ по Риману ?

7.8. Пусть множество $E \subset [a, b]$ такое, что замыкание $\overline{E}$ – ММН. Интегрируема ли характеристическая функция $\chi_E(t)$ на $[a, b]$ по Риману ?

§ 8. Суммируемые функции

Функция $x(t)$, определенная п.в. на $[a, b]$, называется *суммируемой*, если п.в. на $[a, b]$ функция $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Заметим, что указанное представление суммируемой функции в виде разности двух функций из C^+ не однозначно. Множество всех функций, суммируемых на $[a, b]$, будем обозначать $L[a, b]$ или просто L .

Очевидно, что всякая суммируемая функция измерима. Если $x \in C^+$, то $x \in L$. Заметим также, что если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in L$, то и функция $y \in L$.

• ЗАДАЧА.

8.1. Пусть F – замкнутое множество на $[a, b]$. Показать, что характеристическая функция $\chi_F \in L$.

ЛЕММА 14. Пусть функции $x, y \in L$. Тогда множеству L принадлежат и следующие функции:

$$x(t) + y(t), \quad \alpha x(t) (\alpha \in \mathbb{R}), \quad |x(t)|, \quad \min\{x(t), y(t)\}, \quad \max\{x(t), y(t)\}.$$

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$. Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2) \in L$, так как по лемме 9 $f_1 + f_2, g_1 + g_2 \in C^+$.

Для функции $\alpha x(t)$ в случае $\alpha \geq 0$ получим $\alpha x = (\alpha f_1) - (\alpha g_1) \in L$, так как опять по лемме 9 $\alpha f_1, \alpha g_1 \in C^+$. В случае $\alpha < 0$ получим $\alpha x = (-\alpha g_1) - (-\alpha f_1) \in L$, ибо здесь $-\alpha > 0$ и $-\alpha g_1, -\alpha f_1 \in C^+$.

Для функции $|x(t)|$ отметим представление

$$|x(t)| = \max\{f_1(t), g_1(t)\} - \min\{f_1(t), g_1(t)\}.$$

Так как (лемма 9) $\max\{f_1(t), g_1(t)\}, \min\{f_1(t), g_1(t)\} \in C^+$, то и $|x(t)| \in L$.

Наконец, из равенств

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|), \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

следует, что $\min\{x(t), y(t)\} \in L$ и $\max\{x(t), y(t)\} \in L$. $\heartsuit$

Определим для функции $x \in L$ *интеграл*. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Положим по определению $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig$. Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от представления $x = f - g$. Пусть есть еще представление $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$. Тогда $f - g = f_1 - g_1$ и, следовательно, $f + g_1 = f_1 + g$. Отсюда получим $(C^+)I(f + g_1) = (C^+)I(f_1 + g)$. Учитывая свойства интеграла в C^+ , приходим к равенству $(C^+)If - (C^+)Ig = (C^+)If_1 - (C^+)Ig_1$, которое означает, что определение $(L)Ix$ корректно.

Обратим внимание, что если $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (L)Ix$. Далее, если $x \in L$ и $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$, то $(L)Ix = (L)Iy$.

• ЗАДАЧА.

8.2. Пусть $\tilde{D} \subset [0, 1]$ – множество Кантора не нулевой меры такое, что сумма длин смежных интервалов равна α , где $0 < \alpha < 1$. Вычислить $(L)I\chi_{\tilde{D}}$.

ЛЕММА 15. Пусть функции $x, y \in L$. Тогда:

- 1) $(L)I(x + y) = (L)Ix + (L)Iy$,
- 2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) [(L)I(\alpha x) = \alpha(L)Ix]$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$. Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$ и 1) следует из равенства

$$(L)I(x + y) = (C^+)I(f_1 + f_2) - (C^+)I(g_1 + g_2) =$$

$$((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) + ((C^+)If_2 - (C^+)Ig_2) = (L)Ix + (L)Iy.$$

Докажем 2). Если $\alpha \geq 0$, то

$$(L)I(\alpha x) = (C^+)I(\alpha f_1) - (C^+)I(\alpha g_1) =$$

$$\alpha(C^+)If_1 - \alpha(C^+)Ig_1 = \alpha((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) = \alpha(L)Ix.$$

Если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и

$$(L)I(\alpha x) = (L)I((-\alpha)g_1 - (-\alpha)f_1) = (C^+)I((-\alpha)g_1) - (C^+)I((-\alpha)f_1) =$$

$$(-\alpha)(C^+)Ig_1 - (-\alpha)(C^+)If_1 = \alpha((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) = \alpha(L)Ix. \quad \heartsuit$$

ЛЕММА 16. Пусть $x, y \in L[a, b]$.

1. Если $x(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$, то $(L)Ix \geq 0$.
2. Если $x(t) \leq y(t)$ п.в. на $[a, b]$, то $(L)Ix \leq (L)Iy$.
3. $|(L)Ix| \leq (L)I|x|$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$, и $x(t) \geq 0$. Тогда $f(t) \geq g(t)$ и, в силу следствия из леммы 10, $(C^+)If \geq (C^+)Ig$. Следовательно, $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig \geq 0$. Таким образом, доказали пункт 1.

Пункт 2 следует из пункта 1, если рассмотреть функцию $y(t) - x(t) \geq 0$.

Пункт 3 следует из неравенств $-|x(t)| \leq x(t) \leq |x(t)|$ и пункта 2. ♡

Далее, если не будет возникать особой необходимости, интеграл $(L)Ix$ будем обозначать просто Ix .

§ 9. Теорема Беппо Леви

В данном разделе будет дано обоснование монотонного предельного перехода под знаком интеграла.

ЛЕММА 17. Пусть функция $x \in L[a, b]$. Тогда

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists f_\varepsilon, g_\varepsilon \in C^+) [(x(t) = f_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t)) \wedge (g_\varepsilon(t) \geq 0) \wedge (Ig_\varepsilon < \varepsilon)].$$

Доказательство. Так как функция $x \in L$, то выполняется некоторое разложение $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Для функции $g \in C^+$ существует последовательность ступенчатых функций $\{h_n(t)\}$ таких, что $h_n(t) \nearrow g(t)$ и $Ig = \lim_{n \rightarrow \infty} Ih_n$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $0 \leq Ig - Ih_n < \varepsilon$. Рассмотрим представление $x = (f - h_n) - (g - h_n) = f_\varepsilon - g_\varepsilon$, где $f_\varepsilon = f + (-h_n) \in C^+$ и $g_\varepsilon = g + (-h_n) \in C^+$. Заметим, что $g_\varepsilon(t) \geq 0$ и $Ig_\varepsilon = Ig - Ih_n < \varepsilon$. ♡

Замечание. Если в условиях леммы 17 дополнительно функция $x(t) \geq 0$, то в соответствующем разложении функция $f_\varepsilon(t) \geq 0$. Действительно, в этом случае функция $f_\varepsilon(t) = f(t) - h_n(t) \geq f(t) - g(t) = x(t) \geq 0$.

ТЕОРЕМА (БЕППО ЛЕВИ) 5. Пусть функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ такой, что функции $x_k \in L[a, b]$ и $x_k(t) \geq 0$. Пусть $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [\sum_{k=1}^n Ix_k \leq c]$. Тогда функция $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \in L[a, b]$ и $Ix = \sum_{k=1}^{\infty} Ix_k$.

Доказательство. Каждую функцию $x_k(t)$, в силу леммы 17 и замечания к ней, запишем в виде $x_k(t) = f_k(t) - g_k(t)$, где: $f_k(t) \geq 0, g_k(t) \geq 0; f_k, g_k \in C^+$ и $(C^+)Ig_k \leq 1/2^k$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\sum_{k=1}^n (C^+) I g_k \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1$. Воспользовавшись следствием теоремы 2, получим, что функция $g \in C^+$ и $(C^+) I g = \sum_{k=1}^{\infty} (C^+) I g_k$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n (C^+) I f_k = \sum_{k=1}^n I(x_k + g_k) = \sum_{k=1}^n I x_k + \sum_{k=1}^n I g_k < c + 1.$$

Получили, что и функция $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \in C^+$ и $(C^+) I f = \sum_{k=1}^{\infty} (C^+) I f_k$.

Таким образом, функция $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} g_k = f - g \in L$ и

$$I x = (C^+) I f - (C^+) I g = \sum_{k=1}^{\infty} (C^+) I f_k - \sum_{k=1}^{\infty} (C^+) I g_k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((C^+) I f_k - (C^+) I g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I x_k. \quad \heartsuit$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [I x_n \leq c]$. Тогда функция $x \in L[a, b]$ и $I x = \lim_{n \rightarrow \infty} I x_n$.

Доказательство. Определим функции:

$$y_1(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) - x_2(t), \dots, \quad y_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t), \dots$$

Заметим, что $x_n(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(t)$, где $y_k(t) \geq 0$ и $y_k \in L$. Кроме того, $\sum_{k=1}^{n-1} I y_k = I x_n - I x_1 \leq c - I x_1 < \infty$. Из теоремы 5 следует, что функция $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L$ и $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L$. Также получим $I x = I x_1 + I \sum_{k=1}^{\infty} y_k = I x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} I y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (I x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} I y_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} I x_n$. $\heartsuit$

Замечание. Если последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что $x_n(t) \searrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [I x_n \geq c]$, то, очевидно, как и в следствии 1, функция $x \in L[a, b]$ и $I x = \lim_{n \rightarrow \infty} I x_n$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть на $[a, b]$ функция $x(t) \geq 0$, $x \in L[a, b]$ и $I x = 0$. Тогда $x(t) = 0$ п.в. на $[a, b]$.

Доказательство. Определим функции $y_n(t) = n x(t)$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$y_n(t) \rightarrow y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) = 0 \\ \infty, & x(t) > 0. \end{cases}$$

Причем, $y_n(t) \nearrow y(t)$ и $Iy_n = I(nx) = nIx = 0$. Из следствия 1 получим, что $y \in L$, в частности функция $y(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$. Таким образом, множество $\{t \in [a, b] \mid x(t) > 0\}$ – ММН. ♡

§ 10. Несобственный интеграл Римана и суммируемые функции

Пусть на $[a, b]$ функция $x(t) \geq 0$ непрерывна на полуинтервале $(a, b]$ и неограничена в окрестности точки a . Напомним, что такая функция $x(t)$ называется *несобственно интегрируемой по Риману* на $[a, b]$, если существует конечный

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b x(t) dt = (R_\infty) \int_a^b x(t) dt = (R_\infty)Ix.$$

На языке последовательностей это означает, что для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ такой, что $\varepsilon_n \rightarrow +0$ при $n \rightarrow \infty$, существует не зависящий от последовательности $\{\varepsilon_n\}$ конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt$. При этом, без ограничения общности, можно считать (рекомендуется проделать это в качестве упражнения), что последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$.

ТЕОРЕМА 6. *Несобственная интегрируемость по Риману на отрезке $[a, b]$ функции $x(t)$, определенной в этом разделе выше, равносильна суммируемости этой функции на отрезке $[a, b]$, при этом $(L)Ix = (R_\infty)Ix$.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, a + \varepsilon_n) \\ x(t), & t \in [a + \varepsilon_n, b]. \end{cases}$$

Функция $x_n(t)$ ограничена и кусочно непрерывна. Следовательно, функция $x_n \in L$ и $(L)Ix_n = (R)Ix_n$. Заметим также, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что существует $(R_\infty)Ix$. Заметим, что $(L)Ix_n = (R)Ix_n \leq (R_\infty)Ix < \infty$. Отсюда в силу следствия 1 теоремы 5 получим, что функция $x \in L$ и, кроме того,

$$(L)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (R)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt = (R_\infty)Ix.$$

Для обратного доказательства предположим, что $x \in L$. Из неравенства $x_n(t) \leq x(t)$ получим, что $(L)Ix_n \leq (L)Ix$. Вновь применим следствие 1 из

теоремы 5 и получим $(L)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n$. В результате установили, что существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (R)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = (L)Ix,$$

не зависящий от последовательности $\{\varepsilon_n\}$. Это и означает, что существует $(R_\infty)Ix$. ♡

Далее покажем, что для знакопеременных функций несобственная интегрируемость по Риману не означает суммируемости этих функций.

Рассмотрим на $(0, 1]$ функцию $x(t) = t^{-1} \sin(t^{-1})$. Для нее

$$(R_\infty)Ix = \int_0^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt = \int_1^\infty \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$$

существует по признаку Дирихле. Заметим теперь, что сходимость $(R_\infty)Ix$ не является абсолютной. Действительно, если предположить существование $(R_\infty)I|x|$, то после замены переменной получим, что существует и интеграл $(R_\infty) \int_1^\infty \tau^{-1} |\sin \tau| d\tau$. Покажем, что это не так. Воспользуемся оценкой

$$\frac{|\sin \tau|}{\tau} \geq \frac{\sin^2 \tau}{\tau} = \frac{1}{2\tau} - \frac{\cos 2\tau}{2\tau},$$

из которой следует расходимость $(R_\infty) \int_1^\infty \tau^{-1} |\sin \tau| d\tau$.

Предположим теперь, что наша функция $x \in L$, но тогда и функция $|x| \in L$. Заметим, что функция $|x(t)| \geq 0$ п.в. на $[0, 1]$, непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$ и неограничена в окрестности точки 0. Тогда из теоремы 6 следует существование $(R_\infty)I|x| = (L)I|x| < \infty$, что противоречит расходимости $(R_\infty)I|x|$. Таким образом, $x \notin L$.

• ЗАДАЧИ:

10.1. Привести пример суммируемой функции, квадрат которой не суммируем.

10.2. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}^1$ функция $x(t) = t^\alpha$ суммируема на $[0, 1]$?

10.3. Показать, что функции $x_i(t)$, где $i = 1, 2, 3$, суммируемы на отрезке $[0, 1]$. Вычислить соответствующие $(L)Ix_i$:

$$1) \quad x_1(t) = \begin{cases} t^{-1/2}, & t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ t^3, & t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}, \quad 2) \quad x_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \in D \\ t^{-1/3}, & t \notin D \end{cases},$$

$$3) \quad x_3(t) = \begin{cases} t^{-2}, & t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -t^{-1/2}, & t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

10.4. Привести пример на $[0, 1]$ последовательности $\{x_n\} \subset L$ такой, что п.в. $x_n(t) \geq 0$ и при $n \rightarrow \infty$ п.в. $x_n(t) \nearrow x(t)$. Функция $x(t)$ конечна п.в. на $[0, 1]$, но не суммируема.

10.5. Пусть функция $x(t)$ непрерывна на $(a, b]$, имеет особенность при $t = a$ и является суммируемой на $[a, b]$. Показать, что $x(t)$ интегрируема на $[a, b]$ по Риману в несобственном смысле.

§ 11. Теоремы Лебега и Фату

В данном разделе рассмотрим условия выполнения немонотонного предельного перехода под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА (ЛЕБЕГА) 7. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $(\exists x_0 \in L)(\forall n \in \mathbb{N})[|x_n(t)| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} x_0(t)]$. Тогда функция $x \in L$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$.

Доказательство теоремы разобьем на три леммы. При этом определим для $x_0 \in L$ необходимое далее множество $L(x_0) = \{x \in L \mid |x(t)| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} x_0(t)\}$.

ЛЕММА 18. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L(x_0)$ такая, что $x_n(t) \nearrow$ (монотонно возрастает), либо $x_n(t) \searrow$ (монотонно убывает), п.в. на $[a, b]$. Тогда $(\exists x \in L(x_0))[(x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)) \wedge (Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n)]$.

Доказательство. Рассмотрим случай $x_n(t) \nearrow$. Эта последовательность $\{x_n(t)\}$ п.в. на $[a, b]$ ограничена сверху, так как $x_n(t) \leq x_0(t)$. Тогда существует определенная п.в. на $[a, b]$ функция $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. Очевидно, что $Ix_n \leq Ix_0$. По следствию 1 из теоремы 5 функция $x \in L$, что вместе с очевидной оценкой $|x(t)| \leq x_0(t)$ означает $x \in L(x_0)$. Кроме того, $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$.

Случай $x_n(t) \searrow$ рассматривается аналогично с учетом замечания к следствию 1 теоремы 5. ♡

ЛЕММА 19. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L(x_0)$. Тогда:

$$f(t) = \sup\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots\} \in L(x_0),$$

$$g(t) = \inf\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots\} \in L(x_0).$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f_n(t) = \max\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Заметим, что $f_n \in L$ и $|f_n(t)| \leq x_0(t)$, то есть $f_n \in L(x_0)$. Очевидно, что по-

следовательность $\{f_n(t)\}$ монотонно возрастает. Покажем, что $f_n(t) \nearrow f(t)$. Возьмем точку t такую, что все значения функций $x_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) определены, конечны и выполняется оценка $|x_n(t)| \leq x_0(t)$. Множество таких точек, очевидно, является множеством полной меры. В выбранной точке t значение $f(t)$ определено, конечно и выполняется оценка $|f(t)| \leq x_0(t)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $(\exists x_N(t))[f(t) - \varepsilon < x_N(t) \leq f(t)]$. Для любого $n \geq N$ получим $f(t) - \varepsilon < x_N(t) \leq f_n(t) \leq f(t)$. Следовательно, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon]$. Таким образом, $f_n(t) \nearrow f(t)$, что, в силу леммы 18, означает $f \in L(x_0)$.

Для обоснования свойства $g \in L(x_0)$ следует рассмотреть функции $g_n(t) = \min\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Очевидно, что $g_n \in L(x_0)$. Далее, как и для $f(t)$, доказывается, что $g_n(t) \searrow g(t)$. Тогда из леммы 18 следует, что $g \in L(x_0)$. ♡

ЛЕММА 20. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L(x_0)$ такая, что $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$. Тогда $x \in L(x_0)$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$.

Доказательство. Определим функции $y_n(t) = \sup\{x_n(t), x_{n+1}(t), \dots\}$. По лемме 19 функции $y_n \in L(x_0)$. Заметим, что последовательность $\{y_n(t)\}$ монотонно убывает. Покажем, что $y_n(t) \searrow x(t)$. Возьмем произвольную точку t из множества полной меры точек, в которых все функции $x_n(t)$ и $x(t)$ определены, конечны и выполняется при $n \rightarrow \infty$ сходимости $x_n(t) \rightarrow x(t)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $(\exists N)(\forall n \geq N)[x(t) - \varepsilon < x_n(t) < x(t) + \varepsilon]$. Отсюда для $n \geq N$ следует оценка $x(t) - \varepsilon < y_n(t) \leq x(t) + \varepsilon$. Получили $y_n(t) \searrow x(t)$. Из леммы 18 теперь следует, что $x \in L(x_0)$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Iy_n$.

Рассмотрим функции $z_n(t) = \inf\{x_n(t), x_{n+1}(t), \dots\}$. Как и для функций $y_n(t)$, получим, что функции $z_n \in L(x_0)$, $z_n(t) \nearrow x(t)$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Iz_n$.

Из неравенств $z_n(t) \leq x_n(t) \leq y_n(t)$ следуют неравенства $Iz_n \leq Ix_n \leq Iy_n$, из которых при $n \rightarrow \infty$ получим $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$. ♡

Осталось заметить, что лемма 20 и есть теорема 7 в эквивалентной формулировке.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$ и существует функция $x_0 \in L[a, b]$ такая, что $|x(t)| \leq x_0(t)$ п.в. на $[a, b]$. Тогда $x \in L[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\{h_n(t)\}$ – последовательность ступенчатых функций такая, что $h_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Определим функ-

ции $x_n(t) = \max\{-x_0(t), \min\{h_n(t), x_0(t)\}\}$. Очевидно, что функции $x_n \in L$ и п.в. на $[a, b]$ справедлива оценка $|x_n(t)| \leq x_0(t)$. При $n \rightarrow \infty$ получим $x_n(t) \rightarrow \max\{-x_0(t), \min\{x(t), x_0(t)\}\} = x(t)$. В результате из теоремы 7 следует $x \in L$. ♡

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность измеримых на $[a, b]$ функций такая, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$ и функция $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$. Тогда функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$.

Доказательство. Определим функции $y_n(t) = x_n(t) (1 + |x_n(t)|)^{-1}$. Функции $y_n(t)$ измеримы и ограничены $|y_n(t)| < 1$. Тогда функции $y_n \in L$. Из теоремы 7 при $n \rightarrow \infty$ получим $y_n(t) \rightarrow x(t) (1 + |x(t)|)^{-1} = y(t) \in L$, в частности, функция $y(t)$ измерима. Так как функция $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$, то $|y(t)| < 1$ п.в. на $[a, b]$. Тогда п.в. на $[a, b]$ функция $x(t) = y(t) (1 - |y(t)|)^{-1}$ и, следовательно, измерима. ♡

ТЕОРЕМА (ФАТУ) 8. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что все функции $x_n(t) \geq 0$ и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Кроме того, $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N})[Ix_n \leq c]$. Тогда функция $x \in L[a, b]$ и $0 \leq Ix \leq c$.

Доказательство. Определим функции $y_n(t) = \inf\{x_n(t), x_{n+1}(t), \dots\}$. Покажем, что функции $y_n \in L$. Для этого рассмотрим суммируемые функции $y_n^k(t) = \min\{x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), \dots, x_{n+k}(t)\}$, где $k \in \mathbb{N}$. Как в подобном случае в лемме 19, можно показать, что $y_n^k(t) \searrow y_n(t)$ при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Далее заметим, что $y_n^k(t) \geq 0$, и поэтому $Iy_n^k \geq 0$. Воспользовавшись теперь замечанием к следствию 1 теоремы 5, получим $y_n \in L$.

Далее, как и в лемме 20, устанавливается, что $y_n(t) \nearrow x(t)$. Кроме того, $y_n(t) \leq x_n(t)$, поэтому $Iy_n \leq Ix_n \leq c$. Воспользовавшись следствием 1 теоремы 5, получим $x \in L$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Iy_n \leq c$. Осталось заметить, что $x(t) \geq 0$ и, следовательно, $Ix \geq 0$. ♡

• ЗАДАЧИ:

11.1. С помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла показать, что при $n \rightarrow \infty$:

$$\text{а) } \int_0^1 \sin(tg t^n) dt \rightarrow 0, \quad \text{б) } \int_1^{10} t^{-n} \ln(1+t) dt \rightarrow 0,$$

$$в) \quad \int_0^1 \frac{\arctg t^n}{\sqrt{1-t}} dt \rightarrow 0, \quad г) \quad \int_0^\pi t^{-\frac{1}{3}} \sin^n t dt \rightarrow 0.$$

11.2. Привести пример на $[0, 1]$ последовательности $\{\varphi_n\} \subset L$, что :

а) $\varphi_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} \varphi(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $\varphi \in L$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} I\varphi_n = I\varphi$,

в) не существует неотрицательной функции $\varphi_0 \in L$, что для всех n выполнено п.в. $|\varphi_n(t)| \leq \varphi_0(t)$.

11.3. Пусть функция $x \in L$, а функция $y(t)$ измерима и ограничена. Показать, что произведение $x(t)y(t)$ — суммируемо.

11.4. Пусть функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$ и существует $p > 1$, что $x^p \in L$. Показать, что функция $x \in L$.

11.5. Показать, что для любой последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел таких, что $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, функции $\sin(n_k t)$ не сходятся на $[0, 2\pi]$ при $k \rightarrow \infty$ ни к какой функции $x(t)$.

ГЛАВА II

ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 12. Основные определения и свойства измеримых множеств

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым*, если измерима (следовательно, суммируема) характеристическая функция этого множества

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \in [a, b] \setminus A. \end{cases}$$

При этом число $I\chi_A = \mu A$ называется *мерой множества A*.

Очевидно, что всякий промежуток $\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a, b]$ является измеримым множеством и его мера равна его длине, то есть $\mu \langle \alpha, \beta \rangle = \beta - \alpha$.

• ЗАДАЧА.

12.1. Множество $A \subset [a, b]$ назовем *множеством меры нуль*, если это множество измеримо и $\mu A = 0$. Показать, что это определение совпадает с первоначальным.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ НА $[a, b]$ МНОЖЕСТВ A И B .

1. Если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.

Доказательство следует из неравенства $\chi_A(t) \leq \chi_B(t)$.

2. Если $A \cap B = \emptyset$, то множество $A \cup B$ измеримо и $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cup B}(t) = \chi_A(t) + \chi_B(t)$.

3. Если $B \subset A$, то множество $A \setminus B$ измеримо и $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \setminus B}(t) = \chi_A(t) - \chi_B(t)$.

4. Множество $A \cup B$ измеримо и $\mu(A \cup B) \leq \mu A + \mu B$.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cup B}(t) = \max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$ и оценки $\max\{\chi_A(t), \chi_B(t)\} \leq \chi_A(t) + \chi_B(t)$.

5. Множество $A \cap B$ измеримо.

Доказательство следует из равенства $\chi_{A \cap B}(t) = \min\{\chi_A(t), \chi_B(t)\}$.

6. Множество $A \setminus B$ измеримо.

Доказательство следует из равенства $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

• ЗАДАЧА.

12.2. Пусть A и B измеримые множества. Доказать, что:

$$1) \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu A + \mu B,$$

$$2) \quad \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = I|\chi_A - \chi_B|,$$

где I - интеграл, а χ_A, χ_B - характеристические функции.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\{A_n\}$ - последовательность измеримых множеств. Тогда множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо.

Доказательство. Заметим, что $\chi_A(t) = \sup\{\chi_{A_1}(t), \chi_{A_2}(t), \dots, \chi_{A_n}(t), \dots\}$. Определим измеримые функции $x_n(t) = \max\{\chi_{A_1}(t), \chi_{A_2}(t), \dots, \chi_{A_n}(t)\}$. Очевидно, что $x_n(t) \nearrow \chi_A(t)$. Функция $\chi_A(t)$ всюду конечна. Тогда по следствию 2 теоремы 7 функция $\chi_A(t)$ измерима, то есть измеримо множество A . ♡

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{A_n\}$ - последовательность измеримых множеств. Тогда множество $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ измеримо.

Доказательство. Обозначим множество $[a, b] \setminus A = CA$ (дополнение множества A до отрезка $[a, b]$). В таком случае, множество

$$CA = C \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n$$

измеримо. Но тогда измеримо и множество $A = C(CA) = [a, b] \setminus CA$. ♡

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств таких, что $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Тогда $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Как и в теореме 9, определим суммируемые функции $x_n(t) = \max\{\chi_{A_1}(t), \chi_{A_2}(t), \dots, \chi_{A_n}(t)\}$. Заметим, что $x_n(t) = \chi_{A_n}(t)$. Тогда получим $\chi_{A_n}(t) \nearrow \chi_A(t)$, где $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $I\chi_{A_n} \leq I\chi_A < \infty$. Воспользовавшись следствием 1 из теоремы 5, получим

$$\mu A = I\chi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} I\chi_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n. \quad \heartsuit$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Тогда $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Обозначим $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и рассмотрим множество

$$CA = C\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n.$$

Множества CA_n измеримы и $CA_1 \subset CA_2 \subset \dots \subset CA_n \subset \dots$. Следовательно,

$$\mu(CA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(CA_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([a, b] \setminus A_n) = (b - a) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

С другой стороны, $\mu(CA) = (b - a) - \mu A$, то есть $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$. ♡

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств. Тогда $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Считаем далее, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ сходится. В противном случае утверждение очевидно.

Для $n \in \mathbb{N}$ определим измеримые множества $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Заметим, что $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Следовательно, по теореме 10

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu E_n.$$

Так как $\mu E_n \leq \sum_{k=1}^n \mu A_k$, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \quad \heartsuit$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Тогда $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Как и в теореме 11, определим измеримые множества $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Заметим, что $\mu E_n = \sum_{k=1}^n \mu A_k$. В таком случае

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \quad \heartsuit$$

Установленное в следствии теоремы 11 свойство называют *счетной аддитивностью меры*.

Замечания

1. Всякое ограниченное открытое множество на прямой измеримо и его мера равна сумме длин составляющих это множество интервалов.

2. Всякое ограниченное замкнутое множество на прямой измеримо, так как оно является дополнением некоторого открытого множества до наименьшего отрезка, содержащего исходное замкнутое множество.

3. Всякое ограниченное множество на прямой, которое получается из открытых и замкнутых множеств путем применения операций объединения и пересечения в счетном числе, а также операции дополнения (разности), является измеримым.

• ЗАДАЧИ:

12.3. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств на $[0, 1]$ такая, что $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k)(\mu A_k > 1 - \varepsilon)$. Доказать, что $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

12.4. Пусть на $[a, b]$ расположены n измеримых множеств $\{A_i\}_{i=1}^n$. Каждая точка отрезка $[a, b]$ принадлежит по меньшей мере p из этих множеств. Доказать, что $(\exists k)[\mu A_k \geq (b - a)p/n]$.

12.5. Доказать, что любое ограниченное измеримое множество A такое, что $\mu A = p > 0$, содержит измеримое подмножество меры q , для любого q , что $0 \leq q < p$.

12.6. Доказать, что если A – измеримое множество на $[a, b]$ и $\mu A > 0$, то на множестве A найдется хотя бы одна пара точек, расстояние между которыми рационально.

12.7. Пусть $x(t)$ – произвольная функция на $[a, b]$. Доказать, что следующие свойства эквивалентны:

- а) $(\forall c \in \mathbb{R}^1)\{t \in [a, b] \mid x(t) > c\}$ – измеримо,
- б) $(\forall c \in \mathbb{R}^1)\{t \in [a, b] \mid x(t) \geq c\}$ – измеримо,
- в) $(\forall c \in \mathbb{R}^1)\{t \in [a, b] \mid x(t) < c\}$ – измеримо,
- г) $(\forall c \in \mathbb{R}^1)\{t \in [a, b] \mid x(t) \leq c\}$ – измеримо.

Поставим вопрос, а существуют ли вообще неизмеримые множества? Сделанные выше замечания показывают, что построение конкретного неизмеримого множества весьма сложная задача. До сих пор не известно ни одного конструктивного примера неизмеримого множества. Однако неизмеримые множества существуют. Покажем это, следуя рассуждениям, которые были предложены Н.Н. Лузиным.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕИЗМЕРИМОГО МНОЖЕСТВА. Рассмотрим полуинтервал $[0, 1)$, который представим себе свернутым в окружность длины единица (точки 0 и 1 совпадают). Точки $t, s \in [0, 1)$ назовем эквивалентными, если $|t - s| \in \mathbb{Q}$, то есть является рациональным числом. Это отношение на $[0, 1)$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, следовательно, является отношением эквивалентности. Тогда все точки на $[0, 1)$ разобьются на множество классов эквивалентных элементов. Заметим, что каждый класс эквивалентных элементов является счетным множеством (точки, находящиеся на рациональном расстоянии от некоторой исходной точки). Всех же классов эквивалентных элементов заведомо несчетное число, так как множество $[0, 1)$, являющееся объединением всех классов эквивалентных элементов, имеет мощность континуум (больше счетного).

Представим теперь, что каким-то образом из каждого класса эквивалентных элементов выбрано по одному представителю. Объединим этих представителей в множество Z , которое будем называть *множеством Лузина*. Покажем, что это множество Z неизмеримо.

Пусть $\{r_n\}$ – множество всех рациональных чисел из $[0, 1)$. Построим множества $Z_n = \{t + r_n \mid t \in Z\}$ – сдвиг множества Z на r_n по дуге окружности. Заметим, что $Z_n \cap Z_m = \emptyset$ при $n \neq m$. Если бы это было не так, то для некоторых $t, s \in Z$ выполнялось $t + r_n = s + r_m$, то есть $|t - s| \in \mathbb{Q}$ и точки t, s принадлежали бы одному классу эквивалентных элементов, что невозможно. Рассмотрим теперь произвольную точку $\lambda \in [0, 1)$. Точка λ принадле-

жит некоторому классу эквивалентных элементов, представителем которого в Z является некоторая точка t . Тогда $(\exists r_n) [|\lambda - t| = r_n]$. Следовательно, $\lambda = t + r_n \in Z_n$ для $\lambda \geq t$, либо $\lambda = t + (1 - r_n) = t + r_m \in Z_m$ для $\lambda < t$. Получили, что $[0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ и множества Z_n попарно не пересекаются.

Предположим, что множество Z измеримо. Тогда измеримы и все сдвиги Z_n этого множества, причем, $\mu Z_n = \mu Z$. Из свойства счетной аддитивности меры следует, что $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu Z$. Но это невозможно: ни при $\mu Z = 0$, ни при $\mu Z > 0$.

Полученное противоречие доказывает неизмеримость множества Z . ♡

Заметим также, что $\chi_Z(t)$ – характеристическая функция множества Лузина является неизмеримой.

• ЗАДАЧА.

12.8. Пусть E – неизмеримое множество на $[a, b]$, множество $A \subset [a, b]$ и $\mu A = 0$. Доказать, что множество $E \cap CA$ неизмеримо.

§ 13. Структура измеримого множества положительной меры

Далее покажем, что всякое ограниченное измеримое множество положительной меры, с точностью до множества произвольно малой меры, можно считать объединением конечного числа интервалов.

ТЕОРЕМА 12. Пусть на $[a, b]$ дано измеримое множество A с $\mu A > 0$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется множество B – конечная система интервалов, а также измеримые множества a и b такие, что: $A \cup b = B \cup a$, $A \cap b = \emptyset$, $B \cap a = \emptyset$ и $\mu a + \mu b < \varepsilon$.

Доказательство. Характеристическая функция $\chi_A(t)$ измерима. Пусть $\{h_n(t)\}$ – последовательность ступенчатых функций такая, что $h_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} \chi_A(t)$ при $n \rightarrow \infty$. По каждой функции $h_n(t)$ построим новую ступенчатую функцию $\bar{h}_n(t)$ по правилу

$$\bar{h}_n(t) = \begin{cases} 0, & h_n(t) < 1/2 \\ 1, & h_n(t) \geq 1/2. \end{cases}$$

Возьмем точку t из множества полной меры такую, что $h_n(t) \rightarrow \chi_A(t)$. Тогда

$$(\exists N = N(t) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) [|h_n(t) - \chi_A(t)| < 1/4].$$

Следовательно, в данной точке для $n \geq N$ выполняется равенство $\bar{h}_n(t) = \chi_A(t)$. Показали, что $\bar{h}_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} \chi_A(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через B_n конечную систему интервалов, на которых функция $\bar{h}_n(t) = 1$. Очевидно, что характеристические функции $\chi_{B_n}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \bar{h}_n(t)$ и, следовательно, $\chi_{B_n}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} \chi_A(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ множество B_n можно считать искомым множеством B .

Определим измеримые множества $a_n = A \setminus B_n$ и $b_n = B_n \setminus A$. Заметим, что $A \cap b_n = \emptyset$, $B_n \cap a_n = \emptyset$, $A \cup b_n = B_n \cup a_n$ и

$$\chi_{a_n}(t) = \max\{\chi_A(t) - \chi_{B_n}(t), 0\} = (\chi_A - \chi_{B_n})^+(t),$$

$$\chi_{b_n}(t) = \max\{\chi_{B_n}(t) - \chi_A(t), 0\} = (\chi_A - \chi_{B_n})^-(t).$$

Далее получим

$$\mu a_n + \mu b_n = I\chi_{a_n} + I\chi_{b_n} = I(\chi_A - \chi_{B_n})^+ + I(\chi_A - \chi_{B_n})^- = I|\chi_A - \chi_{B_n}|.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $|\chi_A(t) - \chi_{B_n}(t)| \in L$ и $|\chi_A(t) - \chi_{B_n}(t)| \leq 2 \in L$. Кроме того, $|\chi_A(t) - \chi_{B_n}(t)| \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда по теореме 7 при $n \rightarrow \infty$ получим $I|\chi_A - \chi_{B_n}| \rightarrow 0$. Таким образом, $\mu a_n + \mu b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что и завершает доказательство. ♡

§ 14. Мера измеримого множества как его внешняя мера

Пусть дано произвольное множество $A \subset [a, b]$. Определим число

$$\mu^* A = \inf_{B \supset A} \mu B,$$

где точная нижняя граница берется по всем открытым множествам $B \supset A$. Это число $\mu^* A$ называется *внешней мерой* множества A .

Заметим, что всякое открытое множество B измеримо, и μB равна сумме длин составляющих это множество интервалов. Таким образом, понятие внешней меры множества можно давать без привлечения понятия интеграла.

ТЕОРЕМА 13. Если множество A измеримо, то $\mu^* A = \mu A$.

Доказательство. Если $\mu A = 0$, то утверждение очевидно (задача 12.1). Считаем далее, что $\mu A > 0$.

Пусть множество B открытое и $A \subset B$, тогда $\mu A \leq \mu B$. Отсюда следует оценка $\mu A \leq \mu^* A$. Для доказательства теоремы требуется установить обратное неравенство.

В силу теоремы 12, по заданному $\varepsilon > 0$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим конечную систему интервалов B_n и измеримые множества a_n, b_n такие, что $A \cup b_n = B_n \cup a_n$ и $\mu a_n < \varepsilon/2^{n+2}$, $\mu b_n < \varepsilon/2^{n+2}$. Обозначим $B = \bigcup_n B_n$. В таком случае,

$$A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n) = B \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n) = B \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n \setminus B).$$

Заметим, что $A \cap (\bigcup_n b_n) = \emptyset$ и $B \cap (\bigcup_n a_n \setminus B) = \emptyset$. Тогда получим

$$\mu A + \mu(\bigcup_n b_n) = \mu B + \mu(\bigcup_n a_n \setminus B).$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} |\mu B - \mu A| &= |\mu(\bigcup_n b_n) - \mu(\bigcup_n a_n \setminus B)| \leq \mu(\bigcup_n b_n) + \mu(\bigcup_n a_n \setminus B) \leq \\ &\mu(\bigcup_n b_n) + \mu(\bigcup_n a_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

из которой, в частности, получим $\mu B < \mu A + \varepsilon/2$. Обратим внимание на то, что множество B открыто, но включение $A \subset B$ может и не выполняться. Поэтому множество B следует несколько “подправить”.

Определим измеримое множество $a = \bigcap_n a_n$. Очевидно, $(\forall n \in \mathbb{N}) [a \subset a_n]$. Поэтому $\mu a \leq \mu a_n < \varepsilon/2^{n+2}$. Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим $\mu a = 0$. Покажем, что $A \subset B \cup a$. Возьмем точку $t \in A$. Тогда $t \in B$, либо $t \notin B$. В первом случае $t \in B \cup a$. Рассмотрим случай $t \notin B$. Так как $B = \bigcup_n B_n$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) [t \notin B_n]$. Из равенств $A \cup b_n = B_n \cup a_n$ следует, что $(\forall n \in \mathbb{N}) [A \subset B_n \cup a_n]$. Но тогда $(\forall n \in \mathbb{N}) [t \in a_n]$. Следовательно, точка $t \in \bigcap_n a_n = a$, то есть доказали, что $t \in B \cup a$.

Так как $\mu a = 0$, то есть a – ММН (задача 12.1), то по заданному выше $\varepsilon > 0$ найдется конечная или счетная система интервалов $\{\Delta_i\}$ такая, что $a \subset \bigcup_i \Delta_i$ и $\sum_i |\Delta_i| < \varepsilon/2$. Определим открытое множество $B' = B \cup (\bigcup_i \Delta_i)$. Тогда $A \subset B'$ и

$$\mu B' \leq \mu B + \mu(\bigcup_i \Delta_i) \leq \mu B + \sum_i |\Delta_i| < \mu B + \varepsilon/2 < \mu A + \varepsilon.$$

В результате $\mu^*A \leq \mu B' < \mu A + \varepsilon$. Учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получим $\mu^*A \leq \mu A$. Итак, $\mu^*A = \mu A$. $\heartsuit$

ТЕОРЕМА 14. Множество $A \subset [a, b]$ измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*A + \mu^*CA = b - a$, где $CA = [a, b] \setminus A$.

Доказательство. Пусть множество A измеримо. Тогда измеримо и множество CA . Так как $A \cup CA = [a, b]$ и $A \cap CA = \emptyset$, то $\mu A + \mu CA = b - a$. Осталось заметить (теорема 13), что $\mu A = \mu^*A$ и $\mu CA = \mu^*CA$.

Предположим теперь, что для A выполняется условие $\mu^*A + \mu^*CA = b - a$. Покажем, что множество A измеримо, то есть измерима характеристическая функция $\chi_A(t)$ этого множества.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такая, что $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По каждому ε_n построим открытые множества U_n и V_n такие, что: $U_n \supset A$, $V_n \supset CA$, $\mu U_n < \mu^*A + \varepsilon_n/2$ и $\mu V_n < \mu^*CA + \varepsilon_n/2$. Без ограничения общности, можно считать, что $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ и $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$. Действительно, если по ε_1 и ε_2 построены соответствующие множества U_1, U_2 и $U_1 \not\supset U_2$, то вместо U_2 возьмем множество $U'_2 = U_2 \cap U_1$. Тогда $U'_2 \supset A$ и $U_1 \supset U'_2$. Кроме того, $U'_2 \subset U_2$, поэтому $\mu U'_2 \leq \mu U_2 < \mu^*A + \varepsilon_2/2$ и т.д.

Рассмотрим последовательность суммируемых функций $\{\chi_{U_n}(t)\}$. Покажем, что $\chi_{U_n}(t) \rightarrow \chi_A(t)$ п.в. на $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{\chi_{U_n}(t)\}$ монотонно убывает, а последовательность суммируемых функций $\{1 - \chi_{V_n}(t)\}$ монотонно возрастает. Поэтому последовательность функций $\{\chi_{U_n}(t) - (1 - \chi_{V_n}(t))\}$ монотонно убывает. Так как функции $\chi_{U_n}(t) - (1 - \chi_{V_n}(t)) \geq 0$, то $\chi_{U_n}(t) - (1 - \chi_{V_n}(t)) \searrow f(t) \geq 0$. Учитывая, что $I[\chi_{U_n} - (1 - \chi_{V_n})] \geq 0$, из замечания к следствию 1 теоремы 5 получим: функция $f \in L$ и

$$0 \leq If = \lim_{n \rightarrow \infty} I[\chi_{U_n} - (1 - \chi_{V_n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu U_n + \mu V_n - (b - a)) < \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^*A + \mu^*CA + \varepsilon_n - (b - a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

В результате $If = 0$ и (следствие 2, теоремы 5) $f(t) = 0$ п.в. на $[a, b]$. Установили, что функции $\chi_{U_n}(t) - (1 - \chi_{V_n}(t)) \searrow 0$. Воспользуемся теперь оценкой

$$\chi_{U_n}(t) - (1 - \chi_{V_n}(t)) \geq \chi_{U_n}(t) - \chi_A(t) \geq 0,$$

из которой следует, что $\chi_{U_n}(t) \rightarrow \chi_A(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$.

Осталось заметить, что все функции $\chi_{U_n}(t)$ измеримые и функция $\chi_A(t)$ всюду конечна. Тогда по следствию 2 из теоремы 7 получим, что функция $\chi_A(t)$ измеримая, то есть измеримо и множество A . ♡

Последнее утверждение показывает, что можно дать равносильное первоначальному определение измеримого множества в терминах внешней меры, то есть независимо от понятия интеграла. Именно так поступал в своих построениях А. Лебег: множество $A \subset [a, b]$ называлось им *измеримым*, если $\mu^*A + \mu^*CA = b - a$.

Иногда это определение дается в иной форме. Определим для произвольного множества $A \subset [a, b]$ число

$$\mu_*A = \sup_{F \subset A} \mu F,$$

называемое *внутренней мерой* множества A , где точная верхняя граница берется по всем замкнутым множествам $F \subset A$. При этом по определению считают, что мера замкнутого множества $\mu F = (b - a) - \mu(CF)$, где множество $CF = [a, b] \setminus F$ открыто. Затем множество A называется *измеримым*, если $\mu_*A = \mu^*A$.

Покажем, что последнее определение измеримого множества и определение Лебега равносильны. Действительно,

$$\mu_*A = \sup_{F \subset A} \mu F = \sup_{F \subset A} ((b - a) - \mu(CF)) = (b - a) - \inf_{F \subset A} \mu CF.$$

Так как F замкнуто и $F \subset A$, то CF открыто и $CF \supset CA$. Тогда

$$\inf_{F \subset A} \mu CF = \inf_{CF \supset CA} \mu CF = \inf_{B \supset CA} \mu B = \mu^*CA.$$

Следовательно, $\mu_*A = (b - a) - \mu^*CA$. Таким образом, равенства $\mu_*A = \mu^*A$ и $\mu^*A + \mu^*CA = b - a$ выполняются одновременно. ♡

Далее множества, измеримые в первоначальном определении или в равносильном определении Лебега, называем просто *измеримыми* множествами.

• ЗАДАЧИ:

14.1. Показать, что для множества $A \subset [a, b]$ выполнено $\mu_*A \leq \mu^*A$.

14.2. Пусть множества $A, B \subset [a, b]$ и $A \subset B$. Показать, что $\mu_*A \leq \mu_*B$ и $\mu^*A \leq \mu^*B$.

14.3. Пусть A – ограниченное множество и $A = \bigcup_n A_n$ (объединение конечное или счетное). Показать, что $\mu^* A \leq \sum_n \mu^* A_n$.

14.4. Пусть A – ограниченное множество и $A = \bigcup_n A_n$ (объединение конечное или счетное), причем $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Показать, что $\mu_* A \geq \sum_n \mu_* A_n$.

14.5. Показать, что для неизмеримого множества Лузина Z выполнено: $\mu_* Z = 0$, $\mu^* Z > 0$. Показать, что внешняя мера множества Z зависит от выбора представителей в соответствующих классах эквивалентных множеств.

14.6. Пусть множества $A, B \subset [a, b]$, причем $\mu B = 0$. Показать, что выполнены равенства $\mu^* A = \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \setminus B)$.

14.7. Пусть ограниченные множества A и B такие, что: $\mu A = 1/2$, $\mu_* B = 0$, $\mu^* B = 1$. Доказать, что множество $A \cup B$ неизмеримо.

14.8. Пусть дана последовательность множеств $\{A_n\}$ на $[a, b]$ таких, что $A_n \subset A_{n+1}$. Доказать, что $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* A_n$.

§ 15. Функции, измеримые по Лебегу

Определив измеримые множества, а затем установив свойства измеримых множеств, А. Лебег дает определение измеримой функции.

Функция $x(t)$, определенная и конечная п.в. на $[a, b]$ называется *измеримой* по Лебегу, если для любого $c \in \mathbb{R}^1$ множество $\{t \in [a, b] \mid x(t) \leq c\}$ измеримо.

Далее измеримые функции, о которых говорилось первоначально, будем временно называть измеримыми по Риссу.

ТЕОРЕМА 15. *Множество функций, измеримых по Лебегу, совпадает с множеством функций, измеримых по Риссу.*

Доказательство. Пусть прежде функция $x(t)$ измерима по Риссу. Для произвольного $c \in \mathbb{R}^1$ определим функцию $x_c(t) = \max\{x(t), c\}$, которая также измерима по Риссу. Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_n \searrow 0$. Для $n \in \mathbb{N}$ по Риссу измеримы и все функции $y_n(t) = \varepsilon_n^{-1} [x_{c+\varepsilon_n}(t) - x_c(t)]$. Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$

$$y_n(t) \rightarrow \begin{cases} 1, & x(t) \leq c \\ 0, & x(t) > c \end{cases} = \chi_{\{t \mid x(t) \leq c\}}(t).$$

По следствию 2 из теоремы 7 получим, что характеристическая функция

$\chi_{\{t|x(t)\leq c\}}(t)$ измерима. В результате измеримо множество $\{t \in [a, b] \mid x(t) \leq c\}$, что означает измеримость функции $x(t)$ по Лебегу.

Теперь предположим, что функция $x(t)$ измерима по Лебегу, то есть для всех $c \in \mathbb{R}^1$ измеримы множества $\{t \in [a, b] \mid x(t) \leq c\}$. Для натуральных $n \in \mathbb{N}$ и целых $m \in \mathbb{Z}$ определим множества

$$A(n, m) = \left\{ t \mid \frac{m}{n} < x(t) \leq \frac{m+1}{n} \right\} = \left\{ t \mid x(t) \leq \frac{m+1}{n} \right\} \setminus \left\{ t \mid x(t) \leq \frac{m}{n} \right\}.$$

Так как в правой части последнего равенства множества измеримы, то измеримы и множества $A(n, m)$. Следовательно, измеримы и характеристические функции этих множеств $\chi_{A(n, m)}(t)$.

П.в. на $[a, b]$, где функция $x(t)$ конечна, определим для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ функцию $x_n(t)$ так, что в точках $t \in A(n, m)$ она принимает значение $x_n(t) = m/n$. Заметим, что функция $x_n(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$ и

$$x_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{m}{n} \chi_{A(n, m)}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=-k}^{m=k} \frac{m}{n} \chi_{A(n, m)}(t).$$

Так как функции $\sum_{m=-k}^{m=k} \frac{m}{n} \chi_{A(n, m)}(t)$ измеримы по Риссу, то, в силу следствия 2 теоремы 7, функции $x_n(t)$ также измеримы по Риссу. Заметим теперь, что п.в. на $[a, b]$ выполняется $|x_n(t) - x(t)| \leq 1/n$. Следовательно, $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Вновь по следствию 2 теоремы 7 получим, что функция $x(t)$ измерима по Риссу. ♡

Далее функции, измеримые по Лебегу или в равносильном определении измеримые по Риссу, будем называть просто *измеримыми* функциями.

• ЗАДАЧИ:

15.1. Показать, что из измеримости на $[a, b]$ функции $x^2(t)$, либо $|x(t)|$, не следует измеримость $x(t)$ на $[a, b]$.

15.2. Доказать, что если функция $x(t)$ измерима на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$, то она измерима и на отрезке $[a, b]$.

15.3. Доказать, что если функция $x(t)$ имеет производную во всех точках отрезка $[a, b]$, то эта производная $x'(t)$ является измеримой на $[a, b]$ функцией.

15.4. Пусть $x(t)$ – измеримая на $[a, b]$ функция. Доказать, что для любых

$m < M$ на $[a, b]$ измерима функция

$$[x(t)]_m^M = \begin{cases} M, & x(t) \geq M \\ x(t), & m < x(t) < M \\ m, & x(t) \leq m \end{cases}.$$

15.5. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – измеримые на $[a, b]$ функции. Показать измеримость множества $\{t \in [a, b] \mid x(t) = y(t)\}$.

§ 16. Определение интеграла по Лебегу

Рассмотрим прежде случай ограниченной измеримой функции. Итак, дана функция $x(t)$, измеримая на $[a, b]$ и п.в. на $[a, b]$ для некоторых $m, M \in \mathbb{R}^1$ выполняется $m < x(t) < M$. Как известно (следствие 1 теоремы 7), такая функция $x(t)$ является суммируемой, то есть существует $(L)Ix$. Дадим определение интеграла от $x(t)$ по Лебегу.

Пусть P – разбиение $m = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = M$ отрезка $[m, M]$. Определим измеримые множества $A(i) = \{t \in [a, b] \mid x_i < x(t) \leq x_{i+1}\}$, где $i = \overline{0, k-1}$, и составим интегральную сумму

$$S_P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \mu \{t \in [a, b] \mid x_i < x(t) \leq x_{i+1}\} = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \mu A(i).$$

Предположим теперь, что задана последовательность разбиений $\{P_n\}$ отрезка $[m, M]$ такая, что длина наибольшего интервала в разбиении P_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Если для интегральных сумм $S_{P_n}(x) = S_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ существует единственный конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, независящий от m, M и способа разбиений отрезка $[m, M]$, то функция $x(t)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$ по Лебегу, а значение этого предела называется интегралом Лебега, который обозначим $(\Lambda)Ix$.

ТЕОРЕМА 16. *Всякая измеримая ограниченная на отрезке функция $x(t)$ интегрируема по Лебегу и $(\Lambda)Ix = (L)Ix$.*

Доказательство. По разбиению P отрезка $[m, M]$ определим измеримые множества $A(i) = \{t \in [a, b] \mid x_i < x(t) \leq x_{i+1}\}$, а также измеримые, и значит суммируемые, характеристические функции этих множеств $\chi_{A(i)}(t)$. Рассмотрим

рим суммируемую функцию $x_P(t) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \chi_{A(i)}(t)$. Вычислим

$$(L)Ix_P = \sum_{i=0}^{k-1} x_i I\chi_{A(i)} = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \mu A(i) = S_P(x).$$

Заметим также, что в точках, где функция $x(t)$ конечна, то есть п.в. на $[a, b]$,

$$|x(t) - x_P(t)| \leq \max_{0 \leq i \leq k-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Пусть теперь задана последовательность разбиений $\{P_n\}$ отрезка $[m, M]$ такая, что длина наибольшего интервала в разбиении P_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда получим последовательность суммируемых функций $x_n(t) = x_{P_n}(t)$ такую, что $|x_n(t)| \leq \max\{|m|, |M|\}$ и $|x(t) - x_n(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Из теоремы 7 следует, что

$$(L)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Последнее равенство означает, что $(\Lambda)Ix$ существует и при этом выполняется $(\Lambda)Ix = (L)Ix$. ♡

Перейдем к определению интеграла по Лебегу от неограниченной измеримой функции. Предположим сначала, что измеримая неограниченная функция $x(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$. Рассмотрим для $n \in \mathbb{N}$ измеримые, неотрицательные и ограниченные функции $x_n(t) = \min\{x(t), n\}$. Для этих функций интегралы $(\Lambda)Ix_n = (L)Ix_n$ существуют и неотрицательны. С ростом n последовательность $\{(\Lambda)Ix_n\}$ возрастает. Если существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda)Ix_n$, то говорят, что функция $x(t)$ *интегрируема* по Лебегу и $(\Lambda)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda)Ix_n$.

В общем случае измеримой неограниченной функции $x(t)$ она называется *интегрируемой* по Лебегу, если по Лебегу интегрируемы неотрицательные функции $x^+(t)$ и $x^-(t)$. В таком случае полагают $(\Lambda)Ix = (\Lambda)Ix^+ - (\Lambda)Ix^-$.

ТЕОРЕМА 17. *Множество функций, суммируемых на отрезке $[a, b]$, совпадает с множеством функций, интегрируемых на $[a, b]$ по Лебегу, и значения соответствующих интегралов равны.*

Доказательство. Для измеримых ограниченных функций утверждение установлено в теореме 16. Поэтому следует рассмотреть лишь случай неограниченных измеримых функций. Более того, из представления $x(t) = x^+(t) -$

$x^-(t)$ видно, что достаточно рассмотреть только случай неограниченных измеримых неотрицательных функций.

Итак, пусть неограниченная измеримая функция $x(t) \geq 0$ и суммируема на $[a, b]$. Для $n \in \mathbb{N}$ функции $x_n(t) = \min\{x(t), n\} \in L$ и $x_n(t) \leq x(t)$. Здесь $(\Lambda)Ix_n = (L)Ix_n \leq (L)Ix$. Отсюда следует существование конечного $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda)Ix_n = (\Lambda)Ix$. Кроме того, $x_n(t) \nearrow x(t)$. Тогда по следствию 1 из теоремы 5 получим $(L)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda)Ix_n = (\Lambda)Ix$.

Теперь пусть неограниченная измеримая функция $x(t) \geq 0$ и интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу. Вновь $x_n(t) \nearrow x(t)$ и $(L)Ix_n = (\Lambda)Ix_n \leq (\Lambda)Ix$. Как и выше, по следствию 1 из теоремы 5 получим, что функция $x \in L$, то есть суммируема на $[a, b]$. ♡

Далее равносильные интегралы $(\Lambda)Ix$ и $(L)Ix$ обозначаем просто Ix .

§ 17. Интегрирование по измеримому множеству

Пусть $E \subset [a, b]$ — измеримое множество и $\chi_E(t)$ — характеристическая функция этого множества. Определенная на E функция $x(t)$ называется *суммируемой на E* , если на $[a, b]$ суммируема функция

$$\chi_E(t) x(t) = \begin{cases} x(t), & t \in E \\ 0, & t \in [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

Множество всех функций, суммируемых на E , будем обозначать $L(E)$. Для функции $x \in L(E)$ определим интеграл по множеству E .

$$I_E x = \int_E x(t) dt = \int_a^b \chi_E(t) x(t) dt = I(\chi_E x).$$

Этот интеграл по измеримому множеству, как легко видеть, обладает всеми обычными свойствами интеграла по отрезку, включая теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Далее рассмотрим некоторые специфические свойства интеграла по измеримому множеству.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

1. Пусть множество $E \subset [a, b]$ и измеримо, а функция $x \in L[a, b]$. Тогда функция $x \in L(E)$.

Доказательство. Функция $\chi_E(t) x(t)$ измерима как произведение измеримых функций. Кроме того, $|\chi_E(t) x(t)| \leq |x(t)| \in L$. По следствию 1 теоремы 7 функция $\chi_E(t) x(t) \in L$. Следовательно, $x(t) \in L(E)$. ♡

2. Пусть E и E_1 — измеримые на $[a, b]$ множества и $E_1 \subset E$. Пусть функция $x \in L(E)$. Тогда $x \in L(E_1)$.

Доказательство. Заметим, что $\chi_{E_1}(t) x(t) = \chi_{E_1}(t) [\chi_E(t) x(t)]$. Здесь по условию функция $\chi_E(t) x(t) \in L$. Тогда по первому свойству $\chi_{E_1}(t) x(t) \in L$. Следовательно, $x(t) \in L(E_1)$. ♡

3. Пусть E_1 и E_2 — измеримые на $[a, b]$ множества такие, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и $E = E_1 \cup E_2$. Пусть на E задана функция $x(t)$ такая, что $x \in L(E_1)$ и $x \in L(E_2)$. Тогда $x \in L(E)$ и $I_E x = I_{E_1} x + I_{E_2} x$.

Доказательство. Характеристическая функция $\chi_E(t) = \chi_{E_1}(t) + \chi_{E_2}(t)$. Следовательно, функция $\chi_E(t) x(t) = \chi_{E_1}(t) x(t) + \chi_{E_2}(t) x(t) \in L$, то есть функция $x(t) \in L(E)$. Кроме того, $I_E x = I(\chi_E x) = I(\chi_{E_1} x) + I(\chi_{E_2} x) = I_{E_1} x + I_{E_2} x$. ♡

ТЕОРЕМА 18. Пусть множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где все множества E_n измеримы на $[a, b]$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Пусть функция $x \in L(E)$. Тогда

$$I_E x = \int_E x(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} x(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} I_{E_n} x.$$

Доказательство. По свойству 2 получим, что $(\forall n \in \mathbb{N}) [x \in L(E_n)]$. Заметим, что $\chi_E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t)$. Поэтому

$$\chi_E(t) x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t) x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(t) x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t),$$

где $y_n(t) = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(t) x(t) \in L$. Кроме того, $|y_n(t)| \leq |\chi_E(t) x(t)| \in L$. Из теоремы 7 следует, что

$$I(\chi_E x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I(\chi_{E_k} x) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\chi_{E_k} x).$$

Таким образом, $I_E x = \sum_{n=1}^{\infty} I_{E_n} x$. ♡

Замечание. Пусть множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где множества E_n измеримы на $[a, b]$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Если предположить, что на E задана

функция $x(t)$ такая, что $(\forall n \in \mathbb{N}) [x \in L(E_n)]$, то отсюда не следует, что функция $x \in L(E)$.

В качестве такого примера рассмотрим на $(0, 1]$ функцию $x(t)$, которая для всех $n \in \mathbb{N}$ на $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] = E_n$ задается формулой

$$x(t) = \begin{cases} -n, & \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ n, & \frac{2n+1}{2n(n+1)} < t \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Заметим, что $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. На E_n функция $x(t)$ ступенчатая, следовательно, $x \in L(E_n)$. Очевидно, $(\forall n \in \mathbb{N}) [I_{E_n} x = 0]$.

Предположим, что функция $x \in L(0, 1]$. Тогда и $|x| \in L(0, 1]$, где для $t \in E_n$ функция $|x(t)| = n$. Из теоремы 18 тогда следует, что

$$I_E |x| = \int_0^1 |x(t)| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |x(t)| dt = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Получили, что функция $|x| \notin L(0, 1]$, но тогда и $x \notin L(0, 1]$. ♡

ТЕОРЕМА 19. Пусть множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где множества E_n измеримы на $[a, b]$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Пусть на E задана функция $x(t) \geq 0$ и $(\forall n \in \mathbb{N}) [x \in L(E_n)]$. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} I_{E_n} x < \infty$. Тогда $x \in L(E)$.

Доказательство. Здесь, как и в теореме 18,

$$\chi_E(t) x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t) x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(t) x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t),$$

где $y_n(t) = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}(t) x(t) \in L$. Последовательность $y_n(t) \nearrow \chi_E(t) x(t)$. Кроме того,

$$I y_n = \sum_{k=1}^n I(\chi_{E_k} x) = \sum_{k=1}^n I_{E_k} x \leq \sum_{k=1}^{\infty} I_{E_k} x < \infty.$$

По следствию 1 теоремы 5 получим, что $\chi_E(t) x(t) \in L$, то есть $x \in L(E)$. ♡

ЛЕММА 21. Пусть дано измеримое множество $E \subset [a, b]$ и функция $x \in L(E)$. Пусть также $|x(t)| \leq c$ п.в. на E . Тогда $I_E |x| \leq c \mu E$.

Доказательство следует из оценки

$$I_E |x| = I(\chi_E |x|) \leq I(c \chi_E) = c I \chi_E = c \mu E. \quad \heartsuit$$

ТЕОРЕМА 20. Пусть функция $x \in L[a, b]$. Тогда

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall E \subset [a, b]) [(\mu E < \delta) \rightarrow (I_E |x| < \varepsilon)].$$

Доказательство. Рассмотрим представление $x(t) = f(t) - g(t)$, где функции $f, g \in C^+$. Возьмем соответствующие последовательности ступенчатых функций $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$, что $h_n(t) \nearrow f(t)$ и $k_n(t) \nearrow g(t)$. Зададим $\varepsilon > 0$. По определению интеграла в C^+

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) [(0 \leq I(f - h_n) < \varepsilon/4) \wedge (0 \leq I(g - k_n) < \varepsilon/4)].$$

Фиксируем $n \geq N$ и определим ступенчатую функцию $H_n(t) = h_n(t) - k_n(t)$. Получим оценку

$$I|x - H_n| = I|f - g - h_n + k_n| \leq I(f - h_n) + I(g - k_n) < \varepsilon/2.$$

Существует $c = c(n) \in \mathbb{R}^1$, что $|H_n(t)| \leq c$ п.в. на $[a, b]$. Пусть измеримое множество $E \subset [a, b]$ такое, что $\mu E < \varepsilon/2c = \delta$. Тогда, учитывая лемму 21, получим

$$I_E |x| = I_E |x - H_n + H_n| \leq I_E |x - H_n| + I_E |H_n| \leq \varepsilon/2 + c \mu E < \varepsilon. \quad \heartsuit$$

Установленное в теореме 20 свойство называется *абсолютной непрерывностью интеграла по множеству*.

• ЗАДАЧИ:

17.1. Пусть суммируемая на $[a, b]$ функция $x(t) \geq 0$. Пусть $\mu\{t \in [a, b] \mid x(t) \geq c\} = a$. Доказать, что $Ix \geq ac$.

17.2. Доказать суммируемость на $[0, 2\pi]$ функции $t^{-3/2} \sin t$.

17.3. Доказать суммируемость на $[-1, 1]$ функции $(1 - |t|)^{-1/2} \cos t$.

17.4. Доказать суммируемость на $[-1, 1]$ функции $(1 - |t|)^{-1/2} \sin t$.

§ 18. Случай бесконечного промежутка

Все рассмотренные выше факты относились к функциям и множествам на конечном отрезке $[a, b]$. Покажем теперь, как полученные результаты переносятся на случай бесконечных промежутков: $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ и $(-\infty, \infty)$.

Определение *множества меры нуль* на бесконечном промежутке остается таким же, как на конечном промежутке.

Ступенчатой функцией на бесконечном промежутке будем называть функцию $h(t)$, принимающую постоянные значения в конечном числе конечных попарно непересекающихся интервалов $\Delta_j = (t_j, t_{j+1})$; в остальной же части бесконечного промежутка функция $h(t)$ предполагается равной нулю.

Интеграл от ступенчатой функции $h(t)$, принимающей значение b_j на интервале Δ_j ($j = \overline{1, k}$), определяется формулой $Ih = \sum_{j=1}^k b_j |\Delta_j|$.

Множество измеримых функций, множества C^+ и L определяются формально, как и в случае ограниченного промежутка.

Все факты теории интегрирования, установленные ранее, сохраняются и на бесконечном промежутке за одним исключением. На бесконечном промежутке *ограниченные измеримые функции, вообще говоря, не являются суммируемыми.*

В качестве примера рассмотрим на $[0, \infty)$ функцию $x(t) \equiv 1$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим ступенчатые функции $h_n(t)$, равные 1 для $t \in (0, n)$ и 0 в остальных точках $[0, \infty)$. Очевидно, что $h_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[0, \infty)$. Следовательно, функция $x(t)$ измеримая. Предположим, что $x(t)$ суммируемая на $[0, \infty)$ функция. В таком случае, из неравенства $h_n(t) \leq x(t)$ следует $n = Ih_n \leq Ix < \infty$. Однако, для всех $n \in \mathbb{N}$ это невозможно. Полученное противоречие означает, что $x \notin L[0, \infty)$.

Тем не менее, для измеримой функции $x(t)$ условие $|x(t)| \leq x_0(t) \in L$ позволяет утверждать (следствие 1 теоремы 7) суммируемость функции $x(t)$ и на бесконечном промежутке.

В этой связи для бесконечного промежутка потребуется немного изменить доказательство следствия 2 теоремы 7.

СЛЕДСТВИЕ 2 (Т.7). Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность измеримых на бесконечном промежутке функций такая, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ п.в. при $n \rightarrow \infty$ и функция $x(t)$ на бесконечном промежутке конечна п.в.. Тогда функция $x(t)$ измерима.

Доказательство. Возьмем на рассматриваемом бесконечном промежутке функцию $h \in L$ такую, что п.в. $h(t) > 0$. Например, можно положить $h(t) = (1 + t^2)^{-1}$. Определим для $n \in \mathbb{N}$ функции $y_n(t) = h(t) x_n(t) (h(t) + |x_n(t)|)^{-1}$. Функции $y_n(t)$ измеримы и $|y_n(t)| < h(t)$. Тогда по следствию 1 теоремы 7

функции $y_n \in L$. При $n \rightarrow \infty$ получим $y_n(t) \rightarrow h(t) x(t) (h(t) + |x(t)|)^{-1} = y(t)$. Из теоремы 7 следует, что $y(t) \in L$, в частности, функция $y(t)$ измерима. Так как функция $x(t)$ п.в. конечна, то п.в. $|y(t)| < h(t)$. Тогда п.в. функция $x(t) = h(t) y(t) (h(t) - |y(t)|)^{-1}$ и, следовательно, измерима. $\heartsuit$

Перейдем к понятию измеримых на бесконечном промежутке множеств. Если множество A на бесконечном промежутке такое, что его характеристическая функция $\chi_A(t)$ измерима, то множество A называется *измеримым*. Если дополнительно функция $\chi_A(t)$ суммируема, то множество A называется *суммируемым*, а число $I\chi_A = \mu A$ называется *мерой* суммируемого множества. Мера измеримых, но не суммируемых множеств по определению полагается равной ∞ .

Так, имея в виду рассмотренный выше пример, можно утверждать, что множество $[0, \infty)$ измеримо, но не суммируемо.

При сделанных определениях операции объединения и пересечения, если они производятся конечное или счетное число раз, а также операция дополнения (разности) не выводят из класса измеримых множеств. Все ранее доказанные утверждения об измеримых множествах переносятся на случай бесконечного промежутка за исключением следствия из теоремы 10, которое нуждается в некотором уточнении.

СЛЕДСТВИЕ (Т.10). Пусть на бесконечном промежутке задана последовательность измеримых множеств $\{A_n\}$ таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Пусть $(\exists t \in \mathbb{N}) [\mu A_m < \infty]$. Тогда множество $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ суммируемо и $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Заметим, что $A = \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$. Множества A , A_m , A_{m+1} , ... не только измеримы, но и суммируемы, так как все они являются подмножествами суммируемого множества A_m . Рассмотрим дополнения этих множеств до множества A_m : $CA = A_m \setminus A$, $CA_n = A_m \setminus A_n$, где $n = m, m+1, \dots$. Рассмотрим множество

$$CA = C \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=m}^{\infty} CA_n.$$

Суммируемые множества CA_n такие, что $CA_m \subset CA_{m+1} \subset \dots \subset CA_n \subset \dots$

Следовательно, по теореме 10

$$\mu(CA) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(CA_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_m \setminus A_n) = \mu A_m - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

С другой стороны, $\mu(CA) = \mu A_m - \mu A$, то есть $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$. ♡

Обратим внимание, что условие $(\exists m \in \mathbb{N}) [\mu A_m < \infty]$ в доказанном утверждении является существенным. В связи с этим рассмотрим в качестве примера на промежутке $[0, \infty)$ измеримые множества $A_n = (n, \infty)$. Заметим, что выполнено условие $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Тогда $\mu A = 0$. С другой стороны, $(\forall n \in \mathbb{N}) [\mu A_n = \infty]$. Таким образом, $0 = \mu A \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n = \infty$.

• ЗАДАЧИ:

18.1. Показать, что:

а) $\varphi_1(t) = e^{-t} \in C^+[0, \infty)$, б) $\varphi_2(t) = t^{-3} \in C^+[1, \infty)$.

Вычислить соответствующие $(C^+)I\varphi_i$ ($i = 1, 2$).

18.2. Показать, что:

а) $\varphi_1(t) = (1 + t^2)^{-1} \in L(-\infty, \infty)$, б) $\varphi_2(t) = (1 + t^2)^{-1} \operatorname{sgn} t \in L(-\infty, \infty)$.

Вычислить соответствующие $(L)I\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$).

18.3. Показать, что функция $h(t) = -5$ измерима, но не является суммируемой на $(-\infty, +\infty)$.

§ 19. Случай функции нескольких переменных

Ограничимся рассмотрением функций $x(t, s)$, определенных в прямоугольнике $D = \{(t, s) \mid (a_1 \leq t \leq b_1) \wedge (a_2 \leq s \leq b_2)\} \subset \mathbb{R}^2$. Все конструкции и доказательства соответствующих утверждений повторяют одномерный случай на ограниченном отрезке.

Множество $A \subset D$ называется плоским *множеством меры нуль*, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \{D_j\} \text{ — конечная или счетная система прямоугольников})$$

$$\left[\left(A \subset \bigcup_j D_j \right) \wedge \left(\sum_j |D_j| < \varepsilon \right) \right],$$

где для прямоугольника $D_j = \{(t, s) \mid (a_1^j \leq t \leq b_1^j) \wedge (a_2^j \leq s \leq b_2^j)\}$ его площадь $|D_j| = (b_1^j - a_1^j)(b_2^j - a_2^j)$.

• ЗАДАЧИ:

19.1. Доказать, что любая ограниченная конечнозвенная ломаная на плоскости есть плоское множество меры нуль.

19.2. Пусть A – ММН на $[a, b]$ оси OX , а множество $B \subset [c, d]$ – произвольное на оси OY . Доказать, что множество $A \times B$ – ММН на плоскости.

Из задач 19.1, 19.2 следует, что стороны прямоугольников D_j являются плоскими ММН. Поэтому в определении плоского ММН замкнутые прямоугольники D_j можно заменить, например, открытыми.

Предположим, что прямоугольник D разбит на конечное число прямоугольников $D_j = \{(t, s) \mid (a_1^j \leq t \leq b_1^j) \wedge (a_2^j \leq s \leq b_2^j)\}$, где $j = \overline{1, m}$, то есть $D = \cup_{j=1}^m D_j$ и прямоугольники D_j могут пересекаться только по сторонам. Функция $h(t, s)$, принимающая постоянные значения на каждом из прямоугольников D_j , называется *ступенчатой* на D . Заметим, что значениями $h(t, s)$ на сторонах прямоугольников D_j можно пренебрегать, так как множество точек на сторонах прямоугольников образуют ММН. Интегралом от ступенчатой функции $h(t, s)$ называется число $Ih = \sum_{j=1}^m b_j |D_j|$, где b_j – значение функции $h(t, s)$ в прямоугольнике D_j .

Далее определяются измеримые функции двух переменных, множество функций C^+ и интеграл в этом множестве, суммируемые на D функции $x(t, s)$ и интеграл $I_D x$ для них и т.д.. Все утверждения, касающиеся схемы Ф.Рисса-Даниэля построения интеграла, понятия измеримого множества, в том числе интегрирования по измеримому множеству, переносятся на функции двух независимых переменных без всяких изменений.

• ЗАДАЧА.

19.3. Привести пример ограниченного измеримого множества на плоскости, проекции которого на координатные оси неизмеримы.

Рассмотрим для функций двух независимых переменных новую задачу, связанную с двойным и повторными интегралами.

ТЕОРЕМА (ФУБИНИ) 21. Пусть $x(t, s)$ – функция, суммируемая в прямоугольнике $D = \{(t, s) \mid (a_1 \leq t \leq b_1) \wedge (a_2 \leq s \leq b_2)\}$. Тогда:

1) рассматриваемая как функция аргумента t при фиксированном s , эта функция является суммируемой функцией по t при п.в. значениях s ;

2) ее интеграл по $[a_1, b_1]$, который обозначим $I_t x(t, s)$, как функция от s является суммируемой функцией на $[a_2, b_2]$;

3) имеет место равенство $I_s\{I_t x(t, s)\} = I_D x$.

Поменяв переменные t и s ролями получим

$$I_t\{I_s x(t, s)\} = I_D x = I_s\{I_t x(t, s)\}.$$

Доказательство теоремы весьма громоздко (см. напр. [5]) и здесь не приводится.

Продemonстрируем возможности этой теоремы на двух задачах.

• ЗАДАЧА.

19.4. В квадрате $0 \leq t, s \leq 1$ задана функция

$$x(t, s) = \begin{cases} 0, & (t, s) = (0, 0) \\ \frac{t^2 - s^2}{(t^2 + s^2)^2}, & (t, s) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Доказать, что функция $x(t, s)$ в квадрате $D = [0, 1] \times [0, 1]$ не суммируема.

Решение. Функция $x(t, s)$ при $t \neq 0$ непрерывна по $s \in [0, 1]$. Следовательно, $x(t, s)$ суммируема по $s \in [0, 1]$, причем, $I_s x(t, s) = (R)I_s x(t, s)$. Заметим, что при $t \neq 0$

$$x(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s}{t^2 + s^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{t^2 + s^2} \right).$$

Поэтому при всех $t \neq 0$

$$I_s x(t, s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s}{t^2 + s^2} \right) ds = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Полученный $I_s x$ является суммируемой функцией по $t \in [0, 1]$ и, следовательно, определен

$$I_t\{I_s x(t, s)\} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично устанавливается, что определен $I_s\{I_t x(t, s)\} = -\pi/4$.

Таким образом, $I_t\{I_s x(t, s)\} \neq I_s\{I_t x(t, s)\}$. Отсюда в силу теоремы 21 следует, что функция $x \notin L(D)$. ♡

• ЗАДАЧА.

19.5. В квадрате $-1 \leq t, s \leq 1$ задана функция

$$x(t, s) = \begin{cases} 0, & (t, s) = (0, 0) \\ \frac{ts}{(t^2 + s^2)^2}, & (t, s) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Доказать, что функция $x(t, s)$ в квадрате $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ не суммируема.

Решение. Заметим, что при любом фиксированном значении одного переменного функция $x(t, s)$ будет непрерывной функцией другого переменного. Следовательно, $x(t, s) \in L_t$ и $x(t, s) \in L_s$. Кроме того,

$$I_t x(t, s) = \int_{-1}^1 \frac{ts}{(t^2 + s^2)^2} dt = 0$$

и тогда определен $I_s\{I_t x(t, s)\} = 0$. Аналогично получим $I_t\{I_s x(t, s)\} = 0$.

Итак, $I_s\{I_t x(t, s)\} = 0 = I_t\{I_s x(t, s)\}$, что пока не позволяет сделать вывод о несуммируемости функции $x(t, s)$.

Предположим, что функция $x \in L(D)$. Обозначим $D' = [0, 1] \times [0, 1] \subset D$. Квадрат D' является измеримым множеством, так как его характеристическая функция п.в. равна ступенчатой. Поэтому функция $x \in L(D')$. В силу теоремы 21 для $s \in [0, 1]$ определен $I_s x(t, s) \in L_t$, где $t \in (0, 1]$. Вычислим

$$\begin{aligned} I_s x(t, s) &= (R)I_s x(t, s) = \int_0^1 \frac{ts}{(t^2 + s^2)^2} ds = \\ &= \frac{t}{2} \int_0^1 \frac{d_s(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2)^2} = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2(1 + t^2)} \notin L[0, 1]. \end{aligned}$$

Получили, что функция $I_s x(t, s)$ не суммируема по $t \in [0, 1]$. Из теоремы 21 тогда следует, что $x(t, s) \notin L(D')$ и, тем более, $x(t, s) \notin L(D)$. ♡

ТЕОРЕМА 22. Пусть на прямоугольнике D функция $x(t, s)$ измерима и $x(t, s) \geq 0$ п.в. на D . Тогда из существования одного из интегралов

$$(I_t\{I_s x(t, s)\}) \vee (I_s\{I_t x(t, s)\})$$

следует суммируемость функции $x(t, s)$ на прямоугольнике D .

Доказательство. Пусть существует, например, $I_s\{I_t x(t, s)\} = K$, то есть функция $x(t, s) \in L_t$ при п.в. s и $I_t x(t, s) \in L_s$.

Определим на D для $n \in \mathbb{N}$ функцию $x_n(t, s) = \min\{x(t, s), n\}$. Функции $x_n(t, s)$ измеримы и ограничены, следовательно, суммируемы на D . По теореме 21 получим $I_D x_n = I_s\{I_t x_n\}$. Заметим, что $x_n(t, s) \leq x(t, s)$ п.в. на D . Поэтому $I_D x_n = I_s\{I_t x_n\} \leq I_s\{I_t x\} = K$. Заметим, что $x_n(t, s) \nearrow x(t, s)$. Тогда по следствию 1 из теоремы 5 получим, что $x(t, s) \in L(D)$. ♡

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $x(t) \in L[a_1, b_1]$ и функция $y(s) \in L[a_2, b_2]$. Тогда функция $x(t) \cdot y(s) \in L(D)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и $I_D(x \cdot y) = I_t x \cdot I_s y$.

Доказательство. Можно считать, что функции $x(t)$ и $y(s)$ заданы на прямоугольнике D . Тогда, очевидно, эти функции измеримы на D . Следовательно, измерима на D и функция $|x(t) \cdot y(s)| \geq 0$. Существует

$$I_s \{ I_t |x(t) \cdot y(s)| \} = I_s \{ |y(s)| I_t |x(t)| \} = I_t |x(t)| \cdot I_s |y(s)|.$$

Из теоремы 22 получим, что функция $|x(t) \cdot y(s)| \in L(D)$. Следовательно, и функция $x(t) \cdot y(s) \in L(D)$, так как она измерима и ограничена суммируемой функцией $|x(t) \cdot y(s)|$.

Из теоремы 22 теперь получим $I_D(x \cdot y) = I_s \{ I_t (x \cdot y) \} = I_t x \cdot I_s y$. ♡

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A \subset [a_1, b_1]$ — измеримое множество на оси t —ов, а $B \subset [a_2, b_2]$ — измеримое множество на оси s —ов. Тогда множество $A \times B$ измеримо на прямоугольнике $D = \{(t, s) \mid (a_1 \leq t \leq b_1) \wedge (a_2 \leq s \leq b_2)\}$ и $\mu_2(A \times B) = \mu_1 A \cdot \mu_1 B$, где μ_2 — плоская мера, а μ_1 — линейная мера.

Доказательство. Очевидно, что для множества $A \times B$ характеристическая функция $\chi_{A \times B}(t, s) = \chi_A(t) \cdot \chi_B(s)$. Заметим, что функция $\chi_A(t) \in L_t$ и функция $\chi_B(s) \in L_s$. По следствию 1 теоремы 22 получим, что $\chi_{A \times B}(t, s) \in L(D)$, что означает измеримость множества $A \times B$, кроме того, получим $I_D \chi_{A \times B} = I_t \chi_A \cdot I_s \chi_B$, то есть $\mu_2(A \times B) = \mu_1 A \cdot \mu_1 B$. ♡

§ 20. Пространства суммируемых функций

Пусть p — фиксированное положительное число, то есть $0 < p < \infty$. Множество $L_p[a, b]$ (или просто L_p) состоит по определению из всех измеримых на $[a, b]$ функций $x(t)$, для которых функция $|x(t)|^p \in L$. Будем такие функции $x(t)$ называть суммируемыми на $[a, b]$ с p -ой степенью. Заметим, что $L_1 = L_1[a, b] = L[a, b] = L$.

Покажем, что $L_p[a, b]$ можно считать вещественным линейным пространством. Действительно, если $x \in L_p$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$, то функция $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ измерима на $[a, b]$ и $|\alpha x(t)|^p = |\alpha|^p |x(t)|^p \in L$. Для двух функций $x, y \in L_p$ функция $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ измерима на $[a, b]$. В силу леммы 4 функция $|x(t) + y(t)|^p$ также измерима на $[a, b]$. Справедлива оценка

$$|x(t) + y(t)|^p \leq (|x(t)| + |y(t)|)^p \leq (2 \max\{|x(t)|, |y(t)|\})^p = \\ 2^p \max\{|x(t)|^p, |y(t)|^p\} \leq 2^p (|x(t)|^p + |y(t)|^p),$$

из которой и следствия 1 теоремы 7 получим, что функция $|x(t) + y(t)|^p \in L$. Таким образом, функция $(x + y)(t) \in L_p$.

Для однозначного определения нуля в пространстве $L_p[a, b]$ проведем в этом множестве факторизацию. Назовем функции $x, y \in L_p$ эквивалентными, если $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$. Получим на множестве L_p отношение эквивалентности, которое порождает разбиение L_p на классы эквивалентных элементов. За множеством классов эквивалентных элементов сохраним прежнее обозначение $L_p[a, b]$ (или просто L_p). Таким образом, $x \in L_p[a, b]$ означает, что $x(t)$ — класс эквивалентности функций, измеримых на $[a, b]$, суммируемых на $[a, b]$ с p -ой степенью, и которые п.в. равны между собой. В таком случае, нулевым элементом в $L_p[a, b]$ будет класс функций, равных нулю п.в. на $[a, b]$. Заметим, что теперь в $L_p[a, b]$ все аксиомы линейного пространства выполняются очевидным образом.

Далее считаем, что $1 \leq p < \infty$. Превратим линейное пространство $L_p[a, b]$ в нормированное пространство. Определим для $x \in L_p$ норму

$$\|x\|_p = [I(|x|^p)]^{1/p} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Проверим аксиомы нормы. Пусть $x \in L_p$.

1. $\|x\|_p \geq 0$ и $(\|x\|_p = 0) \longleftrightarrow (x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0)$ очевидно выполняется.
2. Если $\alpha \in \mathbb{R}^1$ и $x \in L_p$, то справедливо равенство

$$\|\alpha x\|_p = \left(\int_a^b |\alpha x(t)|^p dt \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p.$$

3. Для $x, y \in L_p$ неравенство треугольника $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ при $p = 1$ очевидно. Обоснуем это неравенство в случае $p > 1$.

НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА. Пусть заданы две функции $x \in L_p[a, b]$ с $p > 1$ и $y \in L_q[a, b]$, где $1/p + 1/q = 1$. Тогда функция $x \cdot y \in L_1[a, b]$ и

$$\int_a^b |x(t) y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q},$$

или $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Доказательство. Суммируемость функции $x(t) \cdot y(t)$ следует из неравенства Юнга

$$|x(t) \cdot y(t)| \leq \frac{|x(t)|^p}{p} + \frac{|y(t)|^q}{q}.$$

Считаем далее, что $\|x\|_p \neq 0$ и $\|y\|_q \neq 0$, так как в противном случае неравенство Гельдера очевидно. Вновь воспользуемся неравенством Юнга

$$\left| \frac{x(t)}{\|x\|_p} \right| \cdot \left| \frac{y(t)}{\|y\|_q} \right| \leq \frac{|x(t)|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y(t)|^q}{q \|y\|_q^q}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получим оценку

$$\int_a^b \frac{|x(t) \cdot y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} dt \leq \frac{\int_a^b |x(t)|^p dt}{p \|x\|_p^p} + \frac{\int_a^b |y(t)|^q dt}{q \|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

из которой неравенство Гельдера следует непосредственно. ♡

ТРЕТЬЯ АКСИОМА НОРМЫ для случая $p > 1$.

Для функций $x, y \in L_p[a, b]$ получим оценку

$$|x + y|^p = |x + y| |x + y|^{p-1} \leq |x| |x + y|^{p-1} + |y| |x + y|^{p-1},$$

где $|x|, |y| \in L_p$. Так как $|x + y|^p \in L_1$, то $|x + y|^{p-1} = |x + y|^{p/q} \in L_q$. Последнее неравенство интегрируем и затем воспользуемся неравенством Гельдера.

$$\begin{aligned} \int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt &\leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/q} + \\ &\quad \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Считаем далее, что $x(t) + y(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\neq} 0$, в противном случае неравенство треугольника очевидно. Тогда из последней оценки получим неравенство

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1-1/q} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

из которого, учитывая $1 - 1/q = 1/p$, непосредственно следует третья аксиома нормы. ♡

Итак, $L_p[a, b]$ в случае $1 \leq p < \infty$ является линейным нормированным пространством.

ТЕОРЕМА 23. *Пространство $L_p[a, b]$ для $1 \leq p < \infty$ является банаховым, то есть полным линейным нормированным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset L_p[a, b]$ — фундаментальная последовательность, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)[\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon].$$

Покажем, что эта последовательность сходится в $L_p[a, b]$.

Из фундаментальности $\{x_n\}$ следует, что

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n(k) \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n(k))[\|x_n - x_m\|_p < 1/2^k].$$

Без ограничения общности можно считать, что $n(1) < n(2) < \dots < n(k) < \dots$. Таким образом,

$$(\forall k, q \in \mathbb{N})[\|x_{n(k+q)} - x_{n(k)}\|_p < 1/2^k].$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n(k+1)}(t) - x_{n(k)}(t)|$ и покажем, что он сходится п.в. на $[a, b]$. Определим для $N \in \mathbb{N}$ последовательность функций $y_N(t) = (\sum_{k=1}^N |x_{n(k+1)}(t) - x_{n(k)}(t)|)^p \in L$. Заметим, что $y_N(t) \leq y_{N+1}(t)$ и

$$\begin{aligned} Iy_N &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^N |x_{n(k+1)}(t) - x_{n(k)}(t)| \right)^p dt = \left\| \sum_{k=1}^N |x_{n(k+1)} - x_{n(k)}| \right\|_p^p \leq \\ & \left(\sum_{k=1}^N \|x_{n(k+1)} - x_{n(k)}\|_p \right)^p < \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k} \right)^p \leq 1^p = 1. \end{aligned}$$

Из следствия 1 теоремы 5 получим, что $y_N(t) \nearrow y(t) \in L$. Таким образом, п.в. сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n(k+1)}(t) - x_{n(k)}(t)| = y^{1/p}(t) \in L_p.$$

Теперь рассмотрим функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n(k+1)}(t) - x_{n(k)}(t))$. Так как этот ряд п.в. сходится абсолютно, то он п.в. сходится. Из равенства

$$\sum_{k=1}^N (x_{n(k+1)}(t) - x_{n(k)}(t)) = x_{n(N+1)}(t) - x_{n(1)}(t)$$

следует, что последовательность измеримых функций $\{x_{n(k)}(t)\}$ сходится п.в. при $k \rightarrow \infty$ к конечной п.в. функции $x(t)$. Из следствия 2 теоремы 7 получим, что функция $x(t)$ измерима.

Напомним, что последовательность $\{x_{n(k)}(t)\}$ была выбрана так, что

$$\left(\int_a^b |x_{n(k+q)}(t) - x_{n(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p} < \frac{1}{2^k}.$$

В последней оценке фиксируем k и $q \rightarrow \infty$. Для обоснования предельного перехода под знаком интеграла используем теорему 8. Итак, суммируемые функции $|x_{n(k+q)}(t) - x_{n(k)}(t)|^p \geq 0$ и

$$|x_{n(k+q)}(t) - x_{n(k)}(t)|^p \rightarrow |x(t) - x_{n(k)}(t)|^p$$

при $q \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Кроме того,

$$I(|x_{n(k+q)}(t) - x_{n(k)}(t)|^p) < 1/2^{kp}.$$

Получим, что функция $|x(t) - x_{n(k)}(t)|^p \in L$, то есть $x(t) - x_{n(k)}(t) \in L_p$. Следовательно, функция $x(t) \in L_p$. Из теоремы 8 следует также справедливость оценки

$$I(|x(t) - x_{n(k)}(t)|^p) \leq 1/2^{kp}.$$

Таким образом, $\|x - x_{n(k)}\|_p \leq 1/2^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Осталось показать, что $\|x - x_n\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальна, то

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) [\|x_m - x_n\|_p < \varepsilon/2].$$

Возьмем $n \geq N$ и выберем k таким, что $n(k) \geq N$ и $1/2^k < \varepsilon/2$. Тогда

$$\|x - x_n\|_p \leq \|x - x_{n(k)}\|_p + \|x_{n(k)} - x_n\|_p \leq 1/2^k + \|x_{n(k)} - x_n\|_p < \varepsilon. \quad \heartsuit$$

Замечание о пространстве $L_2[a, b]$. Возьмем две функции $x, y \in L_2$. Из неравенства Гельдера следует, что их произведение $x \cdot y \in L_1$. Следовательно, определено выражение $(x, y) = \int_a^b x(t)y(t) dt$, которое, в силу выполнения соответствующих аксиом, является скалярным произведением в $L_2[a, b]$. Заметим, что норма, порождаемая этим скалярным произведением, $\|x\| = (x, x)^{1/2} = (\int_a^b |x(t)|^2 dt)^{1/2} = \|x\|_2$. Получили, что $L_2[a, b]$ является вещественным гильбертовым пространством.

§ 21. Пространство ограниченных почти всюду функций

Введем в рассмотрение множество множеств $\mathcal{M} = \{A \subset [a, b] \mid A - \text{ММН}\}$.

Через $L_\infty[a, b]$ (или просто L_∞) обозначим множество измеримых на $[a, b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$(\forall x \in L_\infty[a, b])(\exists A \in \mathcal{M})(\exists C \geq 0)(\forall t \in [a, b] \setminus A) [|x(t)| \leq C].$$

Другими словами, множество $L_\infty[a, b]$ состоит из измеримых ограниченных п.в. на $[a, b]$ функций.

Превратим $L_\infty[a, b]$ в линейное пространство. Если функция $x \in L_\infty[a, b]$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$, то $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$ – измеримая и ограниченная п.в. функция. Если еще $y \in L_\infty[a, b]$, то функция $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ – измеримая на $[a, b]$. Пусть $A, B \in \mathcal{M}$ такие множества, что $(\forall t \in [a, b] \setminus A) [|x(t)| \leq C_1]$ и также $(\forall t \in [a, b] \setminus B) [|y(t)| \leq C_2]$. Тогда множество $A \cup B$ – ММН и выполняется $(\forall t \in [a, b] \setminus (A \cup B)) [|x(t) + y(t)| \leq C_1 + C_2]$. Следовательно, и функция $(x + y)(t) \in L_\infty[a, b]$.

Для однозначного определения нуля в $L_\infty[a, b]$ проведем в этом множестве факторизацию подобно тому, как это было сделано в $L_p[a, b]$. Назовем функции $x, y \in L_\infty$ эквивалентными, если $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$. Сохраняя обозначение, под $L_\infty[a, b]$ теперь будем понимать пространство классов эквивалентных функций. Принадлежность $x \in L_\infty[a, b]$ означает, что $x(t)$ – класс п.в. ограниченных и п.в. равных между собой функций. Таким образом, считаем далее, что $L_\infty[a, b]$ – линейное пространство.

Определим в пространстве $L_\infty[a, b]$ норму. Для $x \in L_\infty$ положим

$$\|x\|_\infty = \inf_{A \in \mathcal{M}} \sup_{t \in [a, b] \setminus A} |x(t)|.$$

Значение $\|x\|_\infty$ называют также существенным максимумом функции $x(t)$ на $[a, b]$. Покажем, что точная нижняя граница по $A \in \mathcal{M}$ в определении $\|x\|_\infty$ достигается.

ЛЕММА 22. Пусть функция $x \in L_\infty[a, b]$. Тогда

$$(\exists A(x) \in \mathcal{M}) [\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a, b] \setminus A(x)} |x(t)|].$$

Доказательство. По определению точной нижней границы

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists A_n \in \mathcal{M}) \left[\|x\|_\infty \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A_n} |x(t)| < \|x\|_\infty + \frac{1}{n} \right].$$

Положим $A(x) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$. Заметим, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|x\|_\infty \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A(x)} |x(t)| \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A_n} |x(t)| < \|x\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ получим утверждение леммы. $\heartsuit$

АКСИОМЫ НОРМЫ. С учетом леммы 22 первая и вторая аксиомы очевидны. Докажем третью аксиому. Пусть $x, y \in L_\infty$ и множества $A(x), A(y) \in \mathcal{M}$ такие, что

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a, b] \setminus A(x)} |x(t)|, \quad \|y\|_\infty = \sup_{t \in [a, b] \setminus A(y)} |y(t)|.$$

Определим множество $A(x, y) = A(x) \cup A(y) \in \mathcal{M}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &\leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A(x, y)} |x(t) + y(t)| \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A(x, y)} |x(t)| + \sup_{t \in [a, b] \setminus A(x, y)} |y(t)| \leq \\ &\sup_{t \in [a, b] \setminus A(x)} |x(t)| + \sup_{t \in [a, b] \setminus A(y)} |y(t)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \quad \heartsuit \end{aligned}$$

Таким образом, $L_\infty[a, b]$ – линейное нормированное пространство. Сходимость последовательности функций по норме пространства $L_\infty[a, b]$ называют также равномерной сходимостью п.в. на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 24. Пространство $L_\infty[a, b]$ является банаховым, то есть полным линейным нормированным пространством.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset L_\infty[a, b]$ – фундаментальная последовательность. Пусть множество $A(n, m) \in \mathcal{M}$ такое, что

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{t \in [a, b] \setminus A(n, m)} |x_n(t) - x_m(t)|.$$

Обозначим $A = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A(n, m) \in \mathcal{M}$. Заметим, что для $t \in [a, b] \setminus A$ и всех $n, m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A} |x_n(t) - x_m(t)| \leq$$

$$\sup_{t \in [a, b] \setminus A(n, m)} |x_n(t) - x_m(t)| = \|x_n - x_m\|_{\infty}.$$

Теперь из свойства фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ следует, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n, m \geq N)(\forall t \in [a, b] \setminus A)[|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\|_{\infty} < \varepsilon].$$

Итак, для $t \in [a, b] \setminus A$ числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальна. Тогда в точках $t \in [a, b] \setminus A$ существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$. Функция $x(t)$ по следствию 2 теоремы 7 является измеримой, как конечный почти всюду предел измеримых функций $x_n(t)$.

Покажем, что функция $x \in L_{\infty}[a, b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В оценке $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$, где $t \in [a, b] \setminus A$ и $n, m \geq N$, устремим $n \rightarrow \infty$. Получим

$$(\forall t \in [a, b] \setminus A)(\forall m \geq N)[|x(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon].$$

Следовательно, в точках $t \in [a, b] \setminus A$ и фиксированном $m \geq N$ выполняется оценка

$$|x(t)| \leq |x(t) - x_m(t)| + |x_m(t)| \leq \varepsilon + \|x_m\|_{\infty} = c(m) < \infty.$$

Таким образом, измеримая функция $x(t)$ почти всюду ограничена, то есть $x \in L_{\infty}[a, b]$.

Теперь для всех $n \geq N$ отметим очевидную оценку

$$\|x - x_n\|_{\infty} \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus A} |x(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon,$$

из которой следует сходимость $\|x - x_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что завершает доказательство полноты пространства $L_{\infty}[a, b]$. ♡

• ЗАДАЧИ:

21.1. Для каких $\alpha \in \mathbb{R}^1$ функция $x(t) = t^{\alpha}$ принадлежит пространству $L_p[0, 1]$, где $1 \leq p \leq \infty$?

21.2. Показать, что всякая последовательность функций $\{x_n(t)\}$, сходящаяся в пространстве $C[a, b]$, сходится и в пространствах $L_p[a, b]$, где $1 \leq p \leq \infty$, причем к той же функции.

21.3. Привести пример последовательности функций $\{x_n\} \subset C[0, 1]$, сходящейся в пространствах $L_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$), но не сходящейся в пространстве $C[0, 1]$.

21.4. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L_1$ и $\|x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следует ли отсюда при $n \rightarrow \infty$, что $x_n(t) \xrightarrow{п.в.} 0$?

21.5. Показать, что последовательность функций на $[0, 1]$

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & t \in (0, 1/n) \\ 0, & t \in \{0\} \cup [1/n, 1] \end{cases}$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится к нулю для всех $t \in [0, 1]$ и не сходится в пространстве $L_1[0, 1]$.

21.6. Показать, что для $1 \leq s < p \leq \infty$ всякая функция $x \in L_p[a, b]$ принадлежит и пространству $L_s[a, b]$, причем $\|x\|_s \leq c(a, b, s, p) \|x\|_p$.

21.7. Пусть функции $x_k \in L_{p_k}[a, b]$, где $1 < p_k < \infty$, $k = 1, 2$ и $p_1^{-1} + p_2^{-1} = p_3^{-1}$, где $1 \leq p_3 < \infty$. Доказать, что произведение $x_1 x_2 \in L_{p_3}[a, b]$ и

$$\|x_1 x_2\|_{p_3} \leq \|x_1\|_{p_1} \|x_2\|_{p_2}.$$

21.8. Пусть функции $x_k \in L_{p_k}[a, b]$, где $1 < p_k < \infty$, $k = 1, 2, 3$ и $p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1} = 1$. Доказать, что произведение $x_1 x_2 x_3 \in L_1[a, b]$ и

$$\|x_1 x_2 x_3\|_1 \leq \|x_1\|_{p_1} \|x_2\|_{p_2} \|x_3\|_{p_3}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Физматлит, 2004. — 570 с.
2. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
3. *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. — М.: Мир, 1979. — 589 с.
4. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс / Г.Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1960. — 388 с.
5. *Шилов Г.Е.* Интеграл, мера и производная / Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич. — М.: Наука, 1967. — 220 с.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: Высшая школа. 1988. — Т.1. — 712 с.