

1. В каждую клетку таблицы с несколькими строками и 100 столбцами поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся три столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими столбцами стоят только единицы?

2. а) Докажите, что если степень каждой вершины графа равна d и диаметр графа равен 2, то число вершин в графе не превосходит $d^2 + 1$.

б) Докажите, что если указанная оценка достигается, то $d + 1$ не кратно пяти.

3. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ можно разбить на два равномошных множества A и B так, что для любого $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ существует одинаковое количество решений уравнения $x = a + b$, $a \in A, b \in B$.

4. Даны целые числа $n \geq k \geq r \geq 1$. Для разбиения множества $[n] := \{1, \dots, n\}$ на r частей $A_1, \dots, A_r$ обозначим через $m_k(A_1, A_2, \dots, A_r)$ число k -элементных подмножеств $[n]$, имеющих непустое пересечение с каждой из частей. Для какого разбиения $[n]$ на r частей $A_1, \dots, A_r$ достигается максимальное значение $m_k(A_1, A_2, \dots, A_r)$?

5. Дано счетное множество событий, каждое имеет вероятность 0.1. Докажите, что существует пять событий таких, что они происходят одновременно с вероятностью больше $0.99 \cdot 10^{-5}$.

6. На плоскости отмечено n точек так, что никакие три не лежат на одной прямой, и некоторые из них соединили отрезками. Оказалось, что любой отрезок пересекает все остальные отрезки за исключением, возможно, одного. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено?

7. Найдите наибольшее c_n такое, что для любых векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ с суммой, равной нулевому вектору, существуют $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \dots, \varepsilon_{n+1} = \pm 1$ такие, что

$$|\varepsilon_1 \mathbf{v}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \varepsilon_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}|^2 \geq c_n (|\mathbf{v}_1|^2 + \dots + |\mathbf{v}_{n+1}|^2).$$

8. Пусть множество $K \subseteq \mathbb{R}^2$ таково, что $K \cap (\mathbf{a} + K) = \emptyset$ для некоторого вектора $\mathbf{a}$. Докажите, что тогда два замкнутых круга диаметра $|\mathbf{a}|$ не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K , при котором круги не будут иметь общую точку.

9. Для графа G назовем кликовым хроматическим числом графа $\chi(G)$ минимальное число цветов для такой покраски вершин G , что каждая максимальная по включению неоднo-вершинная клика (полный подграф) содержит хотя бы два разных цвета. Рассмотрим граф $G(n, r, s)$: его вершинами являются r -элементные подмножества n -элементного множества, ребра проведены между парами подмножеств с пересечением мощности ровно s .

а) Докажите, что $\chi(G(n, r, 0)) = 2$ при $n > N(r)$ для некоторого $N(r)$.

б) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(G(n, r, s)) = \infty$ для любого $r > s > 0$.

10. Дан связный недвудольный k -регулярный граф на n вершинах. Матрица $A^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})_{i,j=1}^n$ состоит из чисел, определяемых комбинаторно: $a_{ij}^{(r)}$ — число путей длины r из вершины i в вершину j без возвратов, т.е. число путей $i = x_0, x_1, \dots, x_r = j$, где x_{i-1} и x_i для $1 \leq i \leq r$ — соседние вершины, при этом $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ для $1 \leq i \leq r-1$. Найдите $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{tr} A^{(r)}}{(k-1)^r}$.