

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет

3180 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни “Фізика”
для студентів напрямів підготовки:
6.050801 “Мікро- та наноелектроніка”,
6.050802 “Електронні пристрої та системи”,
6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,
6.050201 “Системна інженерія” усіх форм навчання
ЧАСТИНА 1
Механіка

Суми
Сумський державний університет
2011

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни “Фізика” /укладачі: О. В. Лисенко, В. В. Коваль, Ю. М. Ромбовський. – Суми: Сумський державний університет, 2011. – Ч.1. – 175 с.

Кафедра загальної та теоретичної фізики

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП.....	4
ТЕМА 1 КІНЕМАТИКА	5
1.1 Приклади розв'язання задач.....	6
1.2 Задачі для самостійного розв'язання	28
ТЕМА 2 ДИНАМІКА ЧАСТИНОК	36
2.1 Приклади розв'язання задач.....	36
2.2 Задачі для самостійного розв'язання	55
ТЕМА 3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ, ЕНЕРГІЇ ТА МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ	61
3.1 Приклади розв'язання задач.....	62
3.2 Задачі для самостійного розв'язання	90
ТЕМА 4 ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА	98
4.1 Приклади розв'язання задач.....	99
4.2 Задачі для самостійного розв'язання	112
ТЕМА 5 МЕХАНІКА РІДИН.....	124
5.1 Приклади розв'язання задач.....	125
5.2 Задачі для самостійного розв'язання	137
ТЕМА 6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА.....	143
6.1 Приклади розв'язання задач.....	144
6.2 Задачі для самостійного розв'язання	154
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ.....	160
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	174

ВСТУП

У цих методичних вказівках подані розв'язки найбільш типових задач із розділу “Механіка”, а також подано задачі для самостійного розв'язання. Автори мають на меті сформувати у студентів методологію розв'язання задач, допомогти засвоїти фізичні закони, навчити деяких математичних прийомів, що широко використовуються у фізиці. Під час роботи над кожною темою варто дотримуватися таких рекомендацій:

- 1 Детально **опрацювати** теоретичний матеріал за підручником з курсу загальної фізики (наприклад, [1-2]).
- 2 Уважно **вивчити** розв'язки розібраних задач із даної теми. З'ясувати всі незрозумілі для себе моменти у розв'язанні задачі, записати розв'язки собі в зошит. За необхідності ще раз повернутися до підручника для більш глибокого опрацювання теоретичного матеріалу або ж звернутися за консультацією до викладача. **Пам'ятайте**, необхідно домогтися повного розуміння розв'язку наведених задач. Перехід до самостійного розв'язання задач варто проводити лише після повного розуміння розв'язків поданих у цій темі задач.
- 3 Перейти до самостійного розв'язку задач даної теми. При цьому варто **керуватися** загальною методологією розв'язку, що подана в розібраних задачах, а саме: а) зробити рисунок до задачі, якщо це необхідно; б) з'ясувати сутність процесів, про які йде мова в задачі; в) встановити закони, які слід використати для розв'язання задачі, записати відповідні рівняння; г) провести математичні перетворення, отримати розв'язання у загальному вигляді, шукана величина повинна бути виражена через величини, що наведені в умові задачі; д) виконати аналіз отриманого розв'язку щодо його відповідності фізичному змісту.

Пам'ятайте! Щоб зрозуміти, як розв'язується задача, від вас потрібні серйозні міркування. Бажаємо Вам успіху!

ТЕМА 1 КІНЕМАТИКА

Основні формули

Вектор середньої швидкості та середнього прискорення матеріальної точки

$$\langle \vec{v} \rangle = \Delta \vec{r} / \Delta t, \quad \langle \vec{a} \rangle = \Delta \vec{v} / \Delta t, \quad (1a)$$

де $\Delta \vec{r}$ та $\Delta \vec{v}$ є відповідно переміщенням та зміною швидкості матеріальної точки за час Δt .

Швидкість та прискорення матеріальної точки

$$\vec{v} = d\vec{r} / dt, \quad \vec{a} = d\vec{v} / dt. \quad (1б)$$

Зв'язок нормального a_n та тангенціального a_τ прискорення зі швидкістю

$$a_n = v^2 / R, \quad a_\tau = dv / dt, \quad (1в)$$

де R – радіус кривизни кривої, вздовж якої рухається матеріальна точка.

Шлях, пройдений точкою

$$s = \int v \cdot dt, \quad (1г)$$

де v – модуль швидкості точки.

Кутова швидкість та кутове прискорення твердого тіла

$$\vec{\omega} = d\vec{\varphi} / dt, \quad \vec{\beta} = d\vec{\omega} / dt, \quad (1д)$$

де $\vec{\varphi}$ – вектор кутового зміщення.

Зв'язок між лінійними та кутовими величинами

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad a_n = \omega^2 R, \quad a_\tau = \beta_z R, \quad (1е)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки відносно довільної точки на осі обертання; R – відстань від осі обертання.

За умови рівноприскореного руху $\vec{a} = \text{const}$ радіус-вектор $\vec{r}$ та швидкість $\vec{v}$ матеріальної точки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} t^2 / 2, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t. \quad (1ж)$$

За умови обертання зі сталим кутовим прискоренням $\beta_z = \text{const}$ кут повороту та кутова швидкість

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z}t + \beta_z t^2 / 2, \quad \omega_z = \omega_{0z} + \beta_z t. \quad (13)$$

Закон додавання швидкостей

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1i)$$

де $\vec{v}$ – швидкість тіла відносно нерухомої системи; $\vec{V}$ – швидкість рухомої системи відносно нерухомої; $\vec{v}'$ – швидкість тіла відносно рухомої системи.

1.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1

Кінематичне рівняння руху тіла, яке можна вважати матеріальною точкою, має вигляд $x = b + c \cdot t + d \cdot t^3$, де $b = 10$ м; $c = 1,5$ м/с; $d = -0,5$ м/с³. Знайти координату x , проекції швидкості v_x і прискорення a_x точки в момент часу $t_1 = 3$ с, а також модуль вектора середньої швидкості $|\langle \vec{v} \rangle|$ і середню шляхову швидкість $\langle v \rangle$ за інтервал часу від $t_0 = 0$ с до $t_1 = 3$ с.

Розв'язання

$x(t_1) - ?$ $v_x(t_1) - ?$ $a_x(t_1) - ?$ $ \langle \vec{v} \rangle - ?$ $\langle v \rangle - ?$	Для розв'язання завдань задачі використаємо визначення відповідних величин. Також візьмемо до уваги, що напрямок руху тіла упродовж досліджуваного інтервалу часу змінюється. Останнє розглянемо більш детально. У момент часу t_0 тіло знаходилось в точці A (координата x_0) і рухалось в додатному напрямку осі X (див. рис. 1.1). Далі його швидкість зменшується і в точці B (координата $x_{\text{зуп}}$) тіло зупиняється.
$x = b + c \cdot t + d \cdot t^3,$ $b = 10$ м, $c = 1,5$ м/с, $d = -0,5$ м/с ³ , $t_0 = 0$ с, $t_1 = 3$ с	

Потім тіло рухається у зворотному напрямку осі X і в момент часу t_1 знаходиться в точці C з координатою $x(t_1) = x_1$.

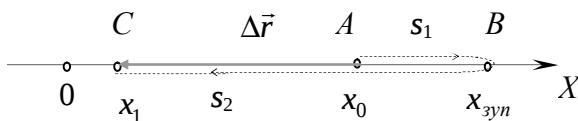


Рисунок 1.1

Перейдемо до розв'язання задачі. Координату $x(t_1) = x_1$ в момент часу t_1 знайдемо використовуючи кінематичне рівняння руху

$$x(t_1) = b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3. \quad (1)$$

Проекція миттєвої швидкості v_x на вісь X за визначенням (див. співвідношення (1б)) є першою похідною від координати x за часом. Тому

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(b + c \cdot t + d \cdot t^3)}{dt} = c + 3d \cdot t^2. \quad (2)$$

Швидкість в момент часу t_1 буде дорівнювати

$$v_x(t_1) = c + 3d \cdot t_1^2. \quad (2)$$

Проекція прискорення a_x на вісь X за визначенням (див. співвідношення (1б)) є першою похідною від проекції швидкості v_x за часом. Тому

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(c + 3d \cdot t^2)}{dt} = 6d \cdot t. \quad (3)$$

Прискорення в момент часу t_1 буде дорівнювати

$$a_x(t_1) = 6d \cdot t_1. \quad (3)$$

Середня швидкість $\langle \vec{v} \rangle$ за визначенням (див. співвідношення (1а)) чисельно дорівнює відношенню переміщення $\Delta \vec{r}$ до часу t :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

При прямолінійному русі вздовж осі X модуль вектора переміщення $|\Delta \vec{r}| = |\overrightarrow{AC}|$ (див. рис. 1.1) дорівнює модулю проекції вектора переміщення на вісь X $|\Delta r_x| = |\Delta x| = |x_1 - x_0|$ за час від $t_0 = 0$ с до t_1 . Тому модуль вектора середньої швидкості дорівнює

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{|x_1 - x_0|}{t_1 - t_0} = \frac{|b + ct_1 + d \cdot t_1^3 - b|}{t_1 - t_0} = |c + d \cdot t_1^2|. \quad (4)$$

Використаємо визначення середньої шляхової швидкості

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t}, \quad (5)$$

де s – шлях, який тіло пройшло за час t . Знайдемо шлях s за час від $t_0 = 0$ с до t_1 . Як було зазначено вище, під час руху в момент часу t_{zyn} у точці B (рис. 1.1) має місце зупинка ($v_x(t_{zyn}) = 0$) та зміна напрямку руху тіла (зміна напрямку вектора швидкості). Тому нам потрібно з'ясувати моменти часу зупинок t_{zyn} ($v_x(t_{zyn}) = 0$) за час руху ($t_0 < t_{zyn} < t_1$) та шляхи руху тіла в одному напрямку $s_1, s_2, \dots$. Загальний шлях буде дорівнювати $s = s_1 + s_2 + \dots$

Визначимо час зупинки, виходячи з того, що в цей момент часу t_{zyn} швидкість $v_x(t_{zyn})$ дорівнює нулю:

$$v_x(t_{zyn}) = c + 3d \cdot t_{zyn}^2 = 0.$$

Звідси знаходимо

$$t_{zyn1} = +\sqrt{c/(-3d)} = +1 \text{ с}, \quad t_{zyn2} = -\sqrt{c/(-3d)} = -1 \text{ с}. \quad (6)$$

Час $t_{zyn2} = -1$ с не входить до досліджуваного проміжку часу руху від $t_0 = 0$ с до $t_1 = 3$ с. Тому будемо розглядати зупинку лише

в момент часу $t_{zyn} = t_{zyn1} = 1$ с. Неважко переконатися, що швидкість в цей момент змінює знак. Тому шлях, який проходить тіло за час від t_0 до t_1 , дорівнює (див. рис. 1.1):

$$s = s_1 + s_2 . \quad (7)$$

Виходячи з рисунку 1.1 знаходимо, що

$$s_1 = |x_{zyn} - x_0|, \quad s_2 = |x_{zyn} - x_1|.$$

Координату x_{zyn} та x_0 знайдемо з кінематичного рівняння руху

$$x_{zyn} = b + ct_{zyn} + d \cdot t_{zyn}^3; \quad x_0 = b + ct_0 + d \cdot t_0^3. \quad (8)$$

Тоді, використовуючи співвідношення (5)-(8) знаходимо середню шляхову швидкість

$$\begin{aligned} < v > = s / (t_1 - t_0) = \left[(b + c \cdot t_{zyn} + d \cdot t_{zyn}^3) - (b + c \cdot t_0 + d \cdot t_0^3) + \right. \\ & \quad \left. + (b + ct_{zyn} + dt_{zyn}^3) - (b + ct_1 + dt_1^3) \right] / (t_1 - t_0) = \\ & = \left[2c \cdot t_{zyn} + 2d \cdot t_{zyn}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3 \right] / (t_1 - t_0). \quad (9) \end{aligned}$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (1)-(4), (9) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[x] = \text{м}$. З іншого боку,

$$[b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3] = [\text{м} + (\text{м} / \text{с})\text{с} + (\text{м} / \text{с}^3)\text{с}^3] = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (1) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v_x] = \text{м} / \text{с}$. З іншого боку,

$$[c + 3dt_1^2] = [\text{м} / \text{с} + (\text{м} / \text{с}^3)\text{с}^2] = \text{м} / \text{с}.$$

Тобто $\text{м} / \text{с} = \text{м} / \text{с}$. Таким чином, розрахункова формула (2) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[a_x] = \text{м} / \text{с}^2$. З іншого боку,

$$[6dt_1] = [(\text{м} / \text{с}^3) \cdot \text{с}] = \text{м} / \text{с}^2.$$

Тобто $m/c^2 = m/c^2$. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[|< \vec{v} >|] = m/c$. З іншого боку,

$$[c + dt_1^2] = [m/c + (m/c^3)c^2] = m/c.$$

Тобто $m/c = m/c$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[< v >] = m/c$. З іншого боку,

$$\left[\frac{2c \cdot t_{zyn} + 2d \cdot t_{zyn}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0} \right] = \left[\frac{(m/c)c + (m/c^3)c^3}{c} \right] = m/c.$$

Тобто $m/c = m/c$. Таким чином, розрахункова формула (9) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять у розрахункові формули (1)-(4) та (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$x(t_1) = b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3 = (10 + 1,5 \cdot 3 - 0,5 \cdot 3^3) \text{ м} = 1 \text{ м},$$

$$v_x(t_1) = c + 3 \cdot d \cdot t_1^2 = (1,5 - 3 \cdot 0,5 \cdot 3^2) \text{ м/с} = -12 \text{ м/с},$$

$$a_x(t_1) = 6 \cdot d \cdot t_1 = 6 \cdot (-0,5) \cdot 3 \text{ м/с}^2 = -9 \text{ м/с}^2,$$

$$|< \vec{v} >| = |c + d \cdot t_1^2| = |1,5 + (-0,5) \cdot 3^2| \text{ м/с} = 3 \text{ м/с},$$

$$\begin{aligned} < v > = \frac{2c \cdot t_{zyn} + 2d \cdot t_{zyn}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0} = \\ &= \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0^3 - 1,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0,5 \cdot 1^3 - 1,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 3^3}{3 - 0} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 3,67 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

В останньому співвідношенні використали, що відповідно до (6) $t_{zyn} = 1 \text{ с}$.

3 Співвідношення для середньої шляхової швидкості можна отримати, використовуючи співвідношення (1г).

$$< v > = \frac{s}{t_1 - t_0} = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}| dt / (t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} |c + 3d \cdot t^2| dt / (t_1 - t_0) =$$

$$= \left[\int_{t_0}^{t_{zyn}} (c + 3d \cdot t^2) dt + \int_{t_{zyn}}^{t_1} (-1)(c + 3d \cdot t^2) dt \right] / (t_1 - t_0) =$$

$$= \frac{2c \cdot t_{zyn} + 2d \cdot t_{zyn}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0}. \quad (10)$$

У цій формулі $t_{zyn} = +\sqrt{c/(-3d)} = 1$ с (див. співвідношення (6)).

Отже, отримали такий самий результат, як і в (9). Тому розрахункова формула (9) є правильною.

Відповідь: $x(t_1) = b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3 = 1$ м, $v_x(t_1) = c + 3d \cdot t_1^2 = -12$ м/с,

$$a_x(t_1) = 6d \cdot t_1 = -9 \text{ м/с}^2, \quad |\vec{v}| = |c + dt_1^2| = 3 \text{ м/с},$$

$$\langle v \rangle = \frac{2c \cdot t_{zyn} + 2d \cdot t_{zyn}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0} \approx 3,67 \text{ м/с},$$

$$t_{zyn} = \sqrt{c/(-3d)} = 1 \text{ с}.$$

Приклад 1.2

Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти координати снаряда у момент часу t . Через скільки часу та на якій відстані від гармати снаряд впаде на землю? Яка найбільша висота підйому цього снаряда?

Розв'язання

$x(t) - ?$	Вважаємо, що снаряд рухається лише під дією сили тяжіння. Такий рух, як відомо, називають вільним падінням. Його особливість полягає у тому, що <i>прискорення цього руху є сталою і однаковою величиною для будь-якого тіла</i> (різної маси, форми і т. п.) і дорівнює прискоренню вільного падіння
$y(t) - ?$	
$t_{пад} - ?$	
$x_{пад} - ?$	
$y_{max} - ?$	
v_0, α	

$$\vec{a} = \vec{g} = -g \cdot \vec{e}_y. \quad (1)$$

Вісь Y спрямована так, як показано на рис. 1.2.

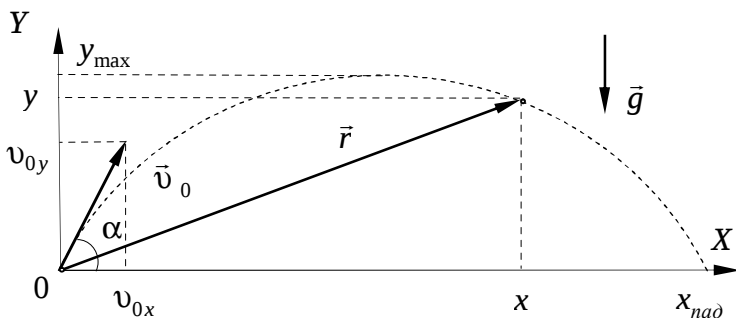


Рисунок 1.2

Таким чином, рух снаряда є рівноприскореним рухом, і тому для розв'язання задачі використаємо відомі формули рівноприскореного руху (1ж):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} t^2 / 2. \quad (1)$$

Перейдемо до безпосереднього розв'язання задачі. Координатні осі вибираємо так, щоб рух відбувався лише в площині XY (див. рис. 1.2). Запишемо співвідношення (1) для снаряда через проекції на осі X та Y відповідних векторів:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}. \quad (2)$$

Тут використали те, що радіус-вектор тіла $\vec{r}$ визначається співвідношенням $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. З геометричних міркувань неважко знайти проекції векторів швидкості та прискорення (див. рис. 1.2):

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha, \quad a_x = 0, \quad a_y = -g. \quad (3)$$

Початок системи координати вибираємо так, щоб у момент часу вильоту снаряда з гармати $t_0 = 0$, він мав координати $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Далі підставляємо співвідношення (3) в (2) і отримуємо шукані координати снаряда в момент часу t

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - g \cdot t^2 / 2. \quad (4)$$

Використаємо результат (4) для знаходження часу t_{nad} , коли снаряд впаде на землю. Зрозуміло, що в момент падіння $t = t_{nad}$ у-координата снаряда буде дорівнювати нулю. Тобто

$$y(t_{nad}) = 0 \text{ або } v_0 \sin \alpha \cdot t_{nad} - g \cdot (t_{nad})^2 / 2 = 0.$$

Звідси знаходимо два розв'язки: $t_{nad} = 0$, $t_{nad} = 2v_0 \sin \alpha / g$. Перший з них відповідає моменту вильоту снаряду з гармати. Дійсно, в цей момент часу снаряд мав вертикальну координату, що дорівнювала нулю $y(0) = 0$. Другий розв'язок відповідає саме часу падіння

$$t_{nad} = 2v_0 \sin \alpha / g. \quad (5)$$

Для знаходження відстані від гармати до точки падіння (вздовж осі X) у формулу (4) для координати $x(t)$ підставимо час падіння (5):

$$\begin{aligned} x_{nad} = x(t_{nad}) &= v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha / g = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot v_0^2 / g = \\ &= \sin 2\alpha \cdot v_0^2 / g. \end{aligned} \quad (6)$$

Для знаходження максимальної висоти підйому проведемо дослідження у-координати $y = y(t)$ на екстремум (див. співвідношення (4)). Для цього знайдемо похідну від у-координати за часом та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ або } \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - g \cdot t_1 = 0. \quad (7)$$

Звідси знаходимо точку екстремуму

$$t_1 = v_0 \sin \alpha / g. \quad (8)$$

Неважко впевнитись, що коли $t < t_1$, то $dy/dt > 0$, а коли $t > t_1$, то $dy/dt < 0$. Це означає, що в момент часу t_1 координата y набуває максимального значення. Максимальне значення легко можна знайти, підставивши t_1 з (8) у співвідношення (4):

$$y_{\max} = y(t_1) = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{g \cdot t_1^2}{2} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}. \quad (9)$$

Можна дати співвідношенню (7) фізичну інтерпретацію. Відповідно до визначення проекція швидкості на вісь Y має вигляд $v_y = \frac{dy}{dt}$. Це означає, що в найвищій точці траєкторії вертикальна складова швидкості дорівнює нулю $v_y = 0$. Тобто рух снаряду вертикально вгору в цій точці припиняється, а далі тіло починає опускатись вниз.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (4) – (6) та (9) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[x] = \text{м}$, $[y] = \text{м}$. З іншого боку,

$$[v_0 \cos \alpha \cdot t] = [(\text{м/с})\text{с}] = \text{м},$$

$$[v_0 \sin \alpha \cdot t - g \cdot t^2 / 2] = [(\text{м/с})\text{с}] = [(\text{м/с}^2)\text{с}^2] = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункові формули (4) дають правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[t_{\text{над}}] = \text{с}$. З іншого боку,

$$[2v_0 \sin \alpha / g] = [\text{м/с}/(\text{м/с}^2)] = \text{с}.$$

Тобто $\text{с} = \text{с}$. Таким чином, розрахункова формула (5) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[x_{\text{над}}] = \text{м}$. З іншого боку,

$$[\sin 2\alpha \cdot v_0^2 / g] = [(\text{м/с})^2 / (\text{м/с}^2)] = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (6) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[y_{\max}] = \text{м}$. З іншого боку,

$$[(v_0 \sin \alpha)^2 / (2g)] = [(\text{м/с})^2 / (\text{м/с}^2)] = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (9) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули (6), що характеризує відстань від гармати до точки падіння на землю снаряда у граничних випадках.

З фізичних міркувань випливає, що коли снаряд із гармати буде вилітати вертикально вгору, тобто під кутом $\alpha = 90^\circ$, то на землю він впаде у точці вильоту. Тобто $x_{nad} = 0$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\alpha = 90^\circ$, то $x_{nad} = \sin 2\alpha \cdot v_0^2 / g = \sin(2 \cdot 90^\circ) \cdot v_0^2 / g = \sin(180^\circ) \cdot v_0^2 / g = 0$.

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

Проведемо дослідження розрахункової формули (9), що характеризує найбільшу висоту підйому снаряда у граничних випадках.

З фізичних міркувань випливає, що коли снаряд з гармати буде вилітати горизонтально, тобто під кутом $\alpha = 0^\circ$, то максимальна висота підйому буде дорівнювати початковій висоті снаряда (підйому в цьому випадку не буде). Тобто $y_{max} = 0$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\alpha = 0^\circ$, то $y_{max} = (v_0 \sin \alpha)^2 / (2g) = (v_0 \sin 0^\circ)^2 / (2g) = 0$.

Отже, розрахункова формула (9) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2 / 2$,
 $t_{nad} = 2v_0 \sin \alpha / g$, $x_{nad} = \sin 2\alpha \cdot v_0^2 / g$, $y_{max} = (v_0 \sin \alpha)^2 / (2g)$.

Приклад 1.3

Матеріальна точка починає рухатися вздовж осі X з прискоренням, величина якого змінюється з часом за законом $a_x = \alpha \sqrt{t}$, де $\alpha = 0,5 \text{ (м/с}^{5/2}\text{)}$. Визначити середню швидкість матеріальної точки в інтервалі часу від $t_1 = 4 \text{ с}$ до $t_2 = 9 \text{ с}$ від початку руху.

Розв'язання

$\langle v_x \rangle = ?$ $a_x = \alpha \sqrt{t},$ $\alpha = 0,5 \text{ (м/с}^{5/2}\text{)},$ $t_1 = 4 \text{ с}, t_2 = 9 \text{ с},$ $t_0 = 0, v_{0x} = 0$	Як впливає з умови задачі, рух матеріальної точки відбувається з прискоренням, що змінюється з часом (не рівноприскорений рух). Тому для розв'язання задачі використаємо визначення прискорення, швидкості, середньої швидкості (формули (1а), (1б)).
---	---

Виходячи з означення середньої швидкості (1а), можемо записати:

$$\langle v_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad (1)$$

де $x_2 - x_1$ – проекція переміщення матеріальної точки на вісь X за час $t_2 - t_1$. Цю різницю координат неважко знайти, використовуючи визначення швидкості (1б):

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v_x dt, \quad x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt. \quad (2)$$

Проекцію швидкості $v_x = v_x(t)$ у довільний момент часу t знайдемо використовуючи визначення прискорення (1б):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad dv_x = a_x dt, \quad v_x - v_{0x} = \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^t a_x dt$$

або

$$v_x = \int_{t_0}^t \alpha \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \alpha \cdot t^{3/2}. \quad (3)$$

Для отримання співвідношення (3) використали, що згідно з умовою задачі в момент часу $t_0 = 0$ швидкість тіла дорівнювала нулю $v_{0x} = 0$.

Далі підставляємо (3) в (2), а потім в (1) і знаходимо шукану середню швидкість

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \alpha \cdot t^{3/2} dt = \frac{4}{15} \alpha \cdot (t_2^{5/2} - t_1^{5/2}),$$

$$< v_x > = \frac{4}{15} \alpha \cdot (t_2^{5/2} - t_1^{5/2}) / (t_2 - t_1). \quad (4)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (4) правильні одиниці вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цієї формули замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[< v_x >] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{4\alpha}{15} \frac{t_2^{5/2} - t_1^{5/2}}{t_2 - t_1} \right] = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^{5/2}} \cdot \text{с}^{5/2} \cdot \frac{1}{\text{с}} \right] = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять у розрахункову формулу (4), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$< v_x > = \frac{4\alpha}{15} \frac{t_2^{5/2} - t_1^{5/2}}{t_2 - t_1} = \frac{4 \cdot 0,5}{15} \cdot \frac{9^{5/2} - 4^{5/2}}{9 - 4} \text{ м/с} \approx 5,63 \text{ м/с}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули (4) у граничних випадках.

3 фізичних міркувань впливає, що коли у співвідношенні $a_x = \alpha \sqrt{t}$ коефіцієнт α дорівнював би нулю, то прискорення теж дорівнювало б нулю. Це означає, що швидкість матеріальної точки не змінювалася б і дорівнювала б початковій, тобто $v_0 = 0$. Отже, і середня швидкість дорівнювала б нулю. З розрахункової формули впливає такий самий результат. Коли $\alpha = 0$, то

$$< v_x > = \frac{4}{15} \alpha (t_2^{5/2} - t_1^{5/2}) / (t_2 - t_1) = 0.$$

Отже, розрахункова формула (4) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\langle v_x \rangle = \frac{4}{15} \alpha (t_2^{5/2} - t_1^{5/2}) / (t_2 - t_1) \approx 5,63 \text{ м/с.}$

Приклад 1.4

Повітряна куля починає підніматися з поверхні землі. Швидкість її підйому постійна і дорівнює v_0 . Завдяки вітру куля одержує горизонтальну компоненту швидкості $v_x = \alpha y$, де α – стала; y – висота підйому. Знайти, як залежить від висоти підйому: а) величина зносу кулі $x(y)$; б) повне, тангенціальне і нормальне прискорення кулі.

Розв'язання

а) $x(y) - ?$	Для розв'язання завдання (а) використаємо визначення для проекцій швидкості	$\frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad (1)$
б) $a - ?$ $a_t - ?$		
$a_n - ?$		
$v_y = v_0 = \text{const},$ $v_x = \alpha y$		

а також відомості про ці величини з умови задачі. Розв'язуючи отримані рівняння, знаходимо шукану залежність $x(y)$.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання. Використовуючи умову задачі та перше рівняння (1), знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 = \text{const}. \quad (2)$$

Звідси

$$dy = v_0 dt, \quad \int_{y_0}^y dy = \int_{t_0}^t v_0 dt, \quad y - y_0 = v_0(t - t_0). \quad (3)$$

За умовою відомо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ тіло знаходилося на поверхні землі (за умовою задачі «повітряна куля починає підніматися з поверхні землі»), тобто $y_0 = 0$. Підставляємо $t_0 = 0$ та $y_0 = 0$ в (3) і отримуємо

$$y = v_0 t. \quad (4)$$

Далі використаємо друге рівняння (3) та умову задачі $v_x = \alpha \cdot y$, знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \alpha y = \alpha v_0 t. \quad (5)$$

У цьому рівнянні використали (4). Далі проводимо інтегрування

$$dx = \alpha v_0 t dt, \quad \int_0^x dx = \int_0^t \alpha v_0 t dt, \quad x - 0 = \frac{\alpha v_0}{2} (t^2 - 0^2), \quad x = \frac{\alpha v_0 t^2}{2} \quad (6).$$

Тепер у (6) заміняємо час t відповідно до співвідношення (4) і знаходимо шукану залежність $x(y)$:

$$x = \alpha v_0 t^2 / 2 = \alpha v_0 (y / v_0)^2 / 2 = (\alpha / (2v_0)) y^2. \quad (7)$$

Для розв'язання завдання (б) використаємо відомі формули для тангенціального та повного прискорень (1в):

$$a_\tau = dv / dt, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (8)$$

Зазначимо, що повне прискорення пов'язане з проекціями прискорення на координатні осі так:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (a_z = 0 \text{ за умовою задачі}). \quad (9)$$

Проекції прискорень неважко знайти:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(\alpha v_0 t)}{dt} = \alpha v_0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(v_0)}{dt} = 0. \quad (10)$$

У формулах (10) використали співвідношення (1), (5). Тепер відповідно до рівняння (9) знаходимо повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\alpha v_0)^2 + 0^2} = \alpha v_0. \quad (11)$$

Тангенціальне прискорення знайдемо, використовуючи перше рівняння у (8):

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\sqrt{v_x^2 + v_y^2})}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{(\alpha v_0 t)^2 + v_0^2}\right)}{dt} = \frac{(\alpha v_0)^2 t}{\sqrt{(\alpha v_0 t)^2 + v_0^2}}. \quad (12)$$

Тепер у (12) заміняємо час t відповідно до співвідношення (4) і знаходимо шукану залежність $a_{\tau}(y)$:

$$a_{\tau} = \frac{(\alpha v_0)^2 (y/v_0)}{\sqrt{(\alpha v_0 (y/v_0))^2 + v_0^2}} = \frac{\alpha^2 y}{\sqrt{(\alpha y/v_0)^2 + 1}}. \quad (13)$$

Щоб знайти нормальне прискорення, використаємо друге рівняння в (8) та (11)

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2} = \sqrt{(\alpha v_0)^2 - \left(\frac{\alpha^2 y}{\sqrt{1 + (\alpha y/v_0)^2}}\right)^2} = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{1 + (\alpha y/v_0)^2}}. \quad (14)$$

Таким чином, отримали формули (7), (11), (13) та (14), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (7), (11), (13) та (14) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього у праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[x] = \text{м}$. З іншого боку,

$$\left[(\alpha/(2v_0))y^2\right] = \frac{(1/c) \cdot \text{м}^2}{\text{м/с}} = \text{м}. \text{ Використали, що } \alpha = v_x/y, \text{ тобто } [\alpha] = (\text{м/с})/\text{м} = 1/\text{с}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[a] = \text{м/с}^2$. З іншого боку,

$$[\alpha v_0] = (1/\text{с}) \cdot \text{м/с} = \text{м/с}^2.$$

Тобто $m/c^2 = m/c^2$. Таким чином, розрахункова формула (11) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[a_\tau] = m/c^2$. З іншого боку,

$$\left[\frac{\alpha^2 y}{\sqrt{(\alpha y / v_0)^2 + 1}} \right] = \frac{(1/c)^2 \cdot m}{\sqrt{((1/c)m/(m/c))^2 + 1}} = m/c^2.$$

Тобто $m/c^2 = m/c^2$. Таким чином, розрахункова формула (13) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[a_n] = m/c^2$. З іншого боку,

$$\left[\frac{\alpha v_0}{\sqrt{1 + (\alpha y / v_0)^2}} \right] = \frac{(1/c) \cdot m/c}{\sqrt{((1/c)m/(m/c))^2 + 1}} = m/c^2.$$

Тобто $m/c^2 = m/c^2$. Таким чином, розрахункова формула (14) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли величина α ($v_x = \alpha y$) дорівнює нулю. Це означає, що проекція швидкості на вісь X також дорівнює нулю. Отже рух кулі вздовж горизонтального напрямку відсутній і $x = 0$. Куля буде рухатися лише вертикально вгору зі сталою у часі швидкістю v_0 . Таким чином, повне, тангенціальне і нормальне прискорення кулі будуть дорівнювати нулю. З розрахункових формул випливає такий самий результат. Коли $\alpha = 0$, то $x = (\alpha/(2v_0))y^2 = 0$, $a = \alpha v_0 = 0$, $a_\tau = \alpha^2 y / \sqrt{(\alpha y / v_0)^2 + 1} = 0$, $a_n = \alpha v_0 / \sqrt{1 + (\alpha y / v_0)^2} = 0$.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $x = (\alpha/(2v_0))y^2$; б) $a = \alpha v_0$,

$$a_\tau = \alpha^2 y / \sqrt{1 + (\alpha y / v_0)^2}, \quad a_n = \alpha v_0 / \sqrt{1 + (\alpha y / v_0)^2}.$$

Приклад 1.5

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Z за законом $\varphi_z = at - bt^3$, де $a = 6,0$ рад/с; $b = 2,0$ рад/с³. Знайти: а) середні значення кутової швидкості і кутового прискорення за проміжок часу від $t_1 = 0$ с до часу t_2 зупинки; б) кутове прискорення в момент зупинки тіла.

Розв'язання

а) $\langle \beta_z \rangle - ?$	Для розв'язання задачі використаємо визначення кутової швидкості, кутового прискорення, середньої кутової швидкості, середнього кутового прискорення:
$\langle \omega_z \rangle - ?$	
б) $\beta_z(t_2) - ?$	
$\varphi_z = at - bt^3$, $a = 6,0$ рад/с, $b = 2,0$ рад/с ³ , $t_1 = 0$ с	
	$\omega_z = d\varphi_z / dt, \quad \beta_z = d\omega_z / dt, \quad (1)$ $\langle \omega_z \rangle = \frac{\varphi_{z2} - \varphi_{z1}}{t_2 - t_1}, \quad \langle \beta_z \rangle = \frac{\omega_{z2} - \omega_{z1}}{t_2 - t_1}. \quad (2)$ Час зупинки t_2 знайдемо використовуючи умову

$$\omega(t_2) = 0. \quad (3)$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. З формул (1) знайдемо залежності від часу кутової швидкості та кутового прискорення

$$\omega_z = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d(at - bt^3)}{dt} = a - 3bt^2, \quad (4)$$

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d(a - 3bt^2)}{dt} = -6bt. \quad (5)$$

Використовуючи умову (3) та формулу (4), знайдемо час t_2 зупинки твердого тіла:

$$\omega_{z2} = a - 3bt_2^2 = 0, \quad t_2 = \sqrt{a/(3b)}. \quad (6)$$

Тоді шукані середня кутова швидкість і середнє кутове прискорення знаходимо з формул (2):

$$\begin{aligned} \langle \omega_z \rangle &= \frac{\varphi_{z2} - \varphi_{z1}}{t_2 - t_1} = \frac{\varphi_z(t_2) - \varphi_z(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{at_2 - bt_2^3 - (at_1 - bt_1^3)}{t_2 - t_1} = \\ &= a - bt_2^2 = a - b \cdot a / (3b) = 2a / 3. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle \beta_z \rangle &= \frac{\omega_{z2} - \omega_{z1}}{t_2 - t_1} = \frac{\omega_z(t_2) - \omega_z(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{a - 3bt_2^2 - (a - 3bt_1^2)}{t_2 - t_1} = \\ &= -3bt_2 = -3b\sqrt{a/(3b)} = -\sqrt{3ba}. \end{aligned} \quad (8)$$

У формулах (7) та (8) використали, що за умовою $t_1 = 0$, а $t_2 = \sqrt{a/(3b)}$ з (6).

Значення кутового прискорення в момент t_2 зупинки твердого тіла знайдемо, підставивши (6) в (5):

$$\beta_z(t_2) = -6bt_2 = -2\sqrt{3ba}. \quad (9)$$

Таким чином, отримали формули (7), (8) та (9), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (7), (8) та (9) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього у праві та ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\langle \omega_z \rangle] = \text{рад/с}$.

З іншого боку, $[2a/3] = \text{рад/с}$.

Тобто $\text{рад/с} = \text{рад/с}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\langle \beta_z \rangle] = \text{рад/с}^2$.

З іншого боку, $[-\sqrt{3ba}] = \sqrt{(\text{рад/с}^3) \cdot (\text{рад/с})} = \text{рад/с}^2$.

Тобто $\text{рад/с}^2 = \text{рад/с}^2$. Таким чином, розрахункова формула (8) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\beta_z(t_2)] = \text{рад/с}^2$.

З іншого боку, $[-2\sqrt{3ba}] = \sqrt{(\text{рад/с}^3) \cdot (\text{рад/с})} = \text{рад/с}^2$.

Тобто $\text{рад/с}^2 = \text{рад/с}^2$. Таким чином, розрахункова формула (9) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункові формули (7), (8) та (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\begin{aligned} <\omega_z> = \frac{2a}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad <\beta_z> = -\sqrt{3ba} = -\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 2} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \\ = -6 \text{ рад/с}^2, \quad \beta_z(t_2) = -2\sqrt{3ba} = -2\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 2} \text{ рад/с}^2 = -12 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

3 Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт a дорівнює нулю. У цьому разі кутова швидкість і кутове прискорення дорівнюють відповідно

$$\omega_z = d\varphi_z / dt = d(-bt^3) / dt = -3bt^2, \quad (9)$$

$$\beta_z = d\omega_z / dt = d(a - 3bt^2) / dt = -6bt. \quad (10)$$

Зрозуміло, що час зупинки, який визначається умовою $\omega_z = 0$ та (9), буде дорівнювати нулю ($t_2 = 0$). Це означає, що середні швидкість і прискорення за інтервал часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 0$ будуть дорівнювати значенню цих величин у момент часу $t = 0$, а саме $<\omega_z> = 0$, $<\beta_z> = 0$ (див. (9) та (10)). Також зрозуміло, що кутове прискорення в момент зупинки $t_2 = 0$ також дорівнює нулю $\beta_z(t_2) = 0$. З розрахункових формул випливає такий самий результат. Коли $a = 0$, то

$$<\omega_z> = 2a/3 = 0, \quad <\beta_z> = -\sqrt{3ba} = 0, \quad \beta_z(t_2) = -2\sqrt{3ba} = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $<\omega> = 2a/3 = 4 \text{ рад/с}$, $<\beta> = -\sqrt{3ab} = -6 \text{ рад/с}^2$;

б) $\beta = -2\sqrt{3ab} = -12 \text{ рад/с}^2$.

Приклад 1.6

Від бакена, що знаходиться на середині широкої ріки (точка O рис. 1.3), відійшли два човни A й B . Обидва човни почали рухатися по взаємно перпендикулярних прямих: човен A – уздовж ріки, а човен B – поперек. Віддалившись на однакову відстань від бакена, човни повернулися потім назад. Знайти відношення часів руху човнів τ_A/τ_B , якщо швидкість кожного човна відносно води в $\eta=1,2$ рази більше швидкості течії.

Розв’язання

$\tau_A/\tau_B - ?$
$\eta=1,2$

 Щоб знайти час руху човнів A та B , необхідно визначити їх швидкості. Для їх знаходження використаємо закон додавання швидкостей у ньютонівській механіці (співвідношення (1i))

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1)$$

де $\vec{v}$ – швидкість човна відносно нерухомої системи (берега); $\vec{V}$ – швидкість рухомої системи (швидкість течії ріки); $\vec{v}'$ – швидкість човна відносно рухомої системи (відносно води). Потім, використовуючи відомі формули для рівномірного руху, знайдемо час руху човнів та їх відношення.

Реалізуємо вищевикладений план розв’язання задачі. Зобразимо на рис. 1.3 напрямки векторів, що входять до співвідношення (1) для човна A , коли він рухається за течією (рис. 1.3а) та коли він повертається назад (рис. 1.3б). Також зобразимо напрямки векторів, що входять до співвідношення (1) для човна B , коли він рухається перпендикулярно до течії (рис. 1.3в) та коли він повертається назад (рис. 1.3г). Зазначимо, що при цьому саме швидкість човна B відносно нерухомої системи відліку є перпендикулярною до швидкості течії ріки ($\vec{v}_{B1} \perp \vec{V}$, $\vec{v}_{B2} \perp \vec{V}$).

Слід зазначити, що швидкості для випадків а), б), в) та г) пов’язані між собою співвідношенням (1), а саме:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A1} &= \vec{v}'_{A1} + \vec{V}, \quad \vec{v}_{A2} = \vec{v}'_{A2} + \vec{V}, \\ \vec{v}_{B1} &= \vec{v}'_{B1} + \vec{V}, \quad \vec{v}_{B2} = \vec{v}'_{B2} + \vec{V}. \end{aligned} \quad (2)$$

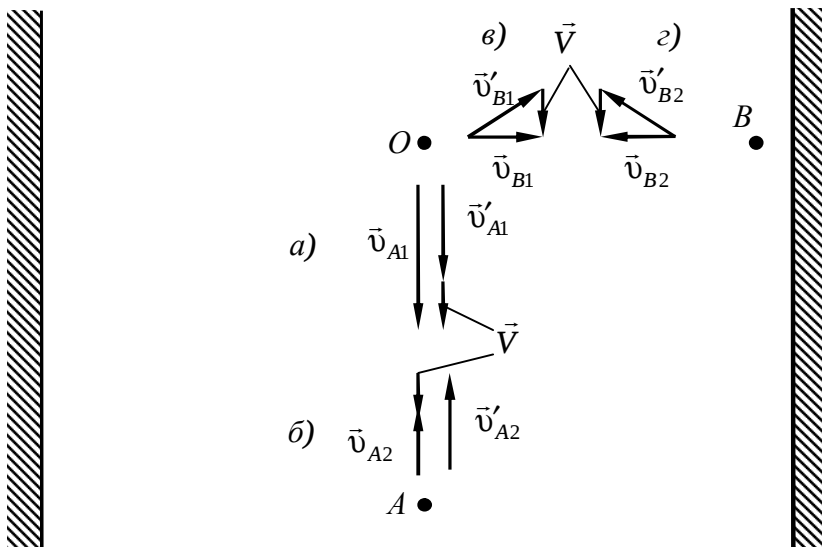


Рисунок 1.3

З геометричних міркувань (див. рис. 1.3) неважко знайти модулі швидкостей човнів відносно нерухомої системи відліку (відносно берега):

$$\begin{aligned}
 v_{A1} &= v'_{A1} + V = v_0 + V, \quad v_{A2} = v'_{A2} - V = v_0 - V, \\
 v_{B1} &= \sqrt{(v'_{B1})^2 - V^2} = \sqrt{(v_0)^2 - V^2}, \\
 v_{B2} &= \sqrt{(v'_{B2})^2 - V^2} = \sqrt{(v_0)^2 - V^2}.
 \end{aligned} \quad (3)$$

У співвідношеннях (3) взяли до уваги, що модулі швидкостей човнів відносно води у всіх випадках однакові і дорівнюють v_0 .

Далі врахуємо, що віддаляються човни до точок A і B на однакову відстань, яку позначимо l . Тоді час руху човна A до точки A і назад буде дорівнювати

$$\tau_A = \frac{l}{v_{A1}} + \frac{l}{v_{A2}} = \frac{l}{v_0 + V} + \frac{l}{v_0 - V} = \frac{2l \cdot v_0}{v_0^2 - V^2}. \quad (4)$$

Аналогічно знаходимо час руху човна B до точки B і назад:

$$\tau_B = \frac{l}{v_{B1}} + \frac{l}{v_{B2}} = \frac{l}{\sqrt{(v_0)^2 - V^2}} + \frac{l}{\sqrt{(v_0)^2 - V^2}} = \frac{2l}{\sqrt{(v_0)^2 - V^2}}. (5)$$

У формулах (4) та (5) використали співвідношення (3). Далі знаходимо шукане відношення

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{\tau_B} &= \left(\frac{2l \cdot v_0}{v_0^2 - V^2} \right) \Bigg/ \left(\frac{2l}{\sqrt{(v_0)^2 - V^2}} \right) = \frac{v_0}{\sqrt{(v_0)^2 - V^2}} = \\ &= \frac{v_0 / V}{\sqrt{(v_0 / V)^2 - (V / V)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

У формулі (6) використали, що згідно з умовою задачі швидкість кожного човна відносно води в $\eta = v_0 / V$ рази більше швидкості течії.

Аналіз отриманого результату

1 Виконаємо обчислення: $\tau_A / \tau_B = 1,2 / \sqrt{1,2^2 - 1} \approx 1,8$.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість течії дорівнює нулю. У цьому разі час руху човнів вздовж взаємно перпендикулярних напрямків буде однаковим, тобто шукане відношення часів руху човнів буде дорівнювати одиниці ($\tau_A / \tau_B = 1$). З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли швидкість ріки V наближається до нуля, то відношення швидкості човна до швидкості течії буде прямувати до нескінченності $\eta = v_0 / V \rightarrow \infty$. Якщо це відношення підставити у розрахункову формулу (6), то отримаємо $\tau_A / \tau_B = \eta / \sqrt{\eta^2 - 1} = 1 / \sqrt{1 - 1 / \eta^2} \rightarrow \rightarrow 1 / \sqrt{1 - 1 / \infty} = 1$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\tau_A / \tau_B = \eta / \sqrt{\eta^2 - 1} = 1,8$.

1.2 Задачі для самостійного розв'язання

1.1 Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = \alpha t^2 \vec{e}_x - \beta \vec{e}_y$, де $\alpha = 3 \text{ м/с}^4$, $\beta = 3 \text{ м/с}^2$. Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде знаходитися в момент часу $t = 1 \text{ с}$, коли для $t = 0$ швидкість і радіус-вектор дорівнюють $\vec{v}_0 = 0$ та $\vec{r}_0 = 0$.

1.2 Матеріальна точка рухається в площині XU відповідно до рівняння $x = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ та $y = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де $B_1 = 7 \text{ м/с}$, $C_1 = -2 \text{ м/с}^2$, $B_2 = -1 \text{ м/с}$, $C_2 = 0,2 \text{ м/с}^2$. Знайти модулі швидкості та прискорення точки в момент часу $t = 5 \text{ с}$.

1.3 Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по прямій (вісь X) має вигляд $x = A + Bt + Ct^2$, де $A = 5 \text{ м}$, $B = 4 \text{ м/с}$, $C = -1 \text{ м/с}^2$. Побудувати графік залежності координати x та шляху s від часу. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ за інтервал часу від $t_1 = 1 \text{ с}$ до $t_2 = 6 \text{ с}$.

1.4 Першу половину часу тіло рухалося зі швидкістю $v_1 = 20 \text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 60^\circ$ до заданого напрямку, а другу половину часу зі швидкістю $v_2 = 40 \text{ м/с}$ під кутом $\beta = 120^\circ$ до того самого напрямку. Знайти модуль середньої швидкості руху тіла.

1.5 Модуль швидкості матеріальної точки змінюється з часом за законом $v = \alpha t^2$, де $\alpha = 1 \text{ м/с}^3$. Знайти шлях, який точка пройшла за перші 10 с руху.

1.6 Краплі дощу, які падають вертикально, утворюють на склі рухомого трамвая смуги під кутом $\alpha = 30^\circ$ до вертикалі. Швидкість трамвая $v_1 = 5 \text{ м/с}$. Яку швидкість мають краплі відносно землі?

1.7 Тіло, що мало початкову швидкість $v_0 = 20 \text{ м/с}$, рухалося прямолінійно зі сталим прискоренням і через час 10 с зупинилося. Знайти шлях, пройдений тілом.

1.8 Знайти переміщення та шлях, які матеріальна точка пройде за 5 с , якщо її рух описується рівнянням $x = 6 - 4t + t^2$.

1.9 Два автомобілі, відстань між якими 250 м, починають одночасно рухатися назустріч один одному з прискореннями $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$ та $a_2 = 3 \text{ м/с}^2$. Побудувати графік руху автомобілів і за графіком знайти час їх зустрічі та відстань від місця зустрічі до пункту, з якого виїхав перший автомобіль.

1.10 Велосипедист подорожує з одного міста в інше. Першу третину шляху він рухався зі швидкістю $v_1 = 5 \text{ м/с}$. Далі половину часу, що залишився, він їхав зі швидкістю $v_2 = 6,11 \text{ м/с}$, після чого до кінцевого пункту він йшов пішки зі швидкістю $v_3 = 1,39 \text{ м/с}$. Визначити середню швидкість руху велосипедиста.

1.11 Компоненти швидкості матеріальної точки визначаються рівняннями $v_x = t$, $v_y = 2t$, $v_z = 3t$. Знайти модуль повного прискорення точки.

1.12 Літак, маючи швидкість 900 км/год, входить у «мертву петлю». При якому мінімальному радіусі кривизни траєкторії доцентрове прискорення пілота літака дорівнюватиме $5g$?

1.13 Тіло кинуте під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Які значення будуть мати нормальне a_n і тангенціальне a_t прискорення тіла через $t = 1,5 \text{ с}$ після початку руху? В яких точках ці прискорення будуть найбільшими і чому дорівнюватимуть?

1.14 Тіло кинули з вежі у горизонтальному напрямку зі швидкістю $v_0 = 30 \text{ м/с}$. Визначити швидкість, тангенціальне і нормальне прискорення тіла через дві секунди після початку руху.

1.15 Два тіла кинули одночасно з однієї точки: одно – вертикально вгору, інше – під кутом $\theta = 60^\circ$ до горизонту. Початкова швидкість кожного тіла $v_0 = 25 \text{ м/с}$. Нехтуючи опором повітря, знайти відстань між тілами через $t = 1,70 \text{ с}$.

1.16 Точка рухається по колу радіусом 30 см зі сталим кутовим прискоренням β . Визначити тангенціальне прискорення точки, якщо відомо, що за час $t = 4 \text{ с}$ вона зробила

три оберти і наприкінці третього оберту її нормальне прискорення $a_n = 2,7 \text{ м/с}^2$.

1.17 Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Скільки обертів за секунду роблять його колеса, якщо вони котяться по шосе без ковзання, а зовнішній діаметр покришок коліс дорівнює 60 см? Знайти доцентрове прискорення зовнішнього шару гуми на покриттях коліс автомобіля.

1.18 Визначити лінійну і кутову швидкості руху супутника та його доцентрове прискорення, якщо висота його орбіти над Землею 1200 км, а період обертання 105 хв. Радіус Землі 6370 км.

1.19 Чи можна надіти на вал, який робить 2000 об/хв, циркулярну пилку діаметром 500 мм, якщо за вимогами техніки безпеки лінійна швидкість зубів пилки не повинна перевищувати 40 м/с?

1.20 Для якісного шліфування деталей швидкість крайніх точок абразивного круга не повинна перевищувати 94,2 м/с. Визначити найбільшу кількість обертів за хвилину для абразивного круга діаметром 30 см.

1.21 Вал діаметром 40 см з насадженням на нього шківом діаметром 2 м обертається рівномірно. У скільки разів лінійна швидкість і доцентрове прискорення на ободі шківа більші, ніж на зовнішній межі вала?

1.22 Матеріальна точка рухається по колу зі сталою кутовою швидкістю $\omega = \pi/6 \text{ рад/с}$. У скільки разів шлях, пройдений точкою за 4 с, буде більше модуля її переміщення?

1.23 Визначити глибину колодязя, якщо вільно падаючий у нього камінь досягає поверхні води за 4 с. Яку швидкість має камінь у момент удару об поверхню води?

1.24 Електрозварник випустив недопалок електрода. В момент удару об землю недопалок мав швидкість $v = 28 \text{ м/с}$. На якій висоті працює електрозварник?

1.25 Сигнальна ракета, запущена вертикально вгору, спалахнула через 6 с після запуску в найвищій точці траєкторії. На яку висоту піднялася ракета, яка її початкова швидкість?

1.26 Тіло кинути вертикально вгору з деякою початковою швидкістю v_0 . Коли воно піднялося на максимальну висоту $H=100$ м від поверхні Землі, з того самого місця і з тією самою початковою швидкістю кинути друге тіло. З якою початковою швидкістю кинуто тіла? На якій висоті h вони зустрінуться? Які вони матимуть швидкості в момент зустрічі? Опором повітря знехтувати.

1.27 Яку початкову швидкість v_0 повинна мати сигнальна ракета, випущена з ракетниці вертикально вгору, щоб вона спалахнула в найвищій точці своєї траєкторії (спалах відбувається через 6 с після запуску)? Опором повітря знехтувати.

1.28 Пілот літака, що летить горизонтально на висоті $h=500$ м зі швидкістю $v=99$ м/с, має скинути пакет із поштою для геологів. На якій відстані по горизонталі від табору геологів він це має зробити, щоб пакет упав у таборі?

1.29 З крутого берега річки заввишки 20 м кидають горизонтально камінь зі швидкістю 15 м/с. Через який час камінь досягне поверхні води? З якою швидкістю і під яким кутом він упаде на воду? Прискорення вільного падіння взяти $g=10$ м/с².

1.30 Хлопчик зросту $h=1,5$ м, який знаходиться на відстані $L=15$ м від паркану висотою $H=5$ м кидає під кутом $\alpha=45^\circ$ горизонту камінь. З якою мінімальною швидкістю v_0 необхідно кинути камінь, щоб він перелетів паркан?

1.31 Обруч котиться по горизонтальній площині без проковзування. Швидкість центра обруча дорівнює v . Визначити миттєві швидкості нижньої і верхньої точок обруча.

1.32 У деякий момент часу проекції швидкості частинки на осі X , Y та Z мають відповідно значення 1 м/с, 2 м/с та (-3 м/с), а проекції прискорення – (-3 м/с²), 2 м/с² та 1 м/с². Знайти радіус кривизни траєкторії в цей момент часу.

1.33 Матеріальна точка рухається за законом $\vec{r} = \alpha \sin(5t)\vec{e}_x + \beta \cos^2(5t)\vec{e}_y$, де $\alpha=2$ м, $\beta=3$ м. Визначити вектор

швидкості, вектор прискорення та траєкторію руху матеріальної точки.

1.34 Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $\vec{v} = (2t^3 - 1)\vec{e}_x - \sin(2\pi t/3)\vec{e}_y$. Визначити радіус-вектор частинки в довільний момент часу, якщо в початковий момент її радіус-вектор дорівнював нулю.

1.35 Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = 3t^2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде знаходитися через 1 с, якщо в початковий момент часу $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{v}_0 = 0$.

1.36 Поїзд рухається прямолінійно зі швидкістю $v_0 = 180$ км/год. Після того як було ввімкнено гальмівний механізм, швидкість поїзда почала змінюватися за законом $v = v_0 - \alpha t^2$, де $\alpha = 1$ м/с³. Знайти гальмівний шлях поїзда. Через який час після початку гальмування він зупиниться?

1.37 Ракета стартує із Землі вертикально вгору без початкової швидкості з прискоренням $a = \kappa t^2$, де $\kappa = 1$ м/с⁴. Яку швидкість буде мати ракета на висоті $h_0 = 100$ км від поверхні Землі?

1.38 З башти одночасно кинули два тіла з однаковою початковою швидкістю v_0 : одне – вертикально вгору, друге – вертикально вниз. Як з часом змінюватиметься відстань s між цими тілами? Опір повітря рухові тіл не враховувати.

1.39 Із точок A і B , які знаходяться на висоті 2 м і 6 м відповідно одночасно кидають назустріч одне одному два тіла: перше – горизонтально зі швидкістю 8 м/с, друге – вниз під кутом 45° до горизонту з такою початковою швидкістю, щоб обидва тіла зіткнулися у польоті. Відстань між точками A та B по горизонталі дорівнює 8 м. Траєкторії тіл лежать в одній площині. Обчислити початкову швидкість першого тіла, координати x та y точки зіткнення, час руху тіл до зіткнення та швидкості тіл у момент зіткнення.

1.40 З однієї точки кинуті два тіла під кутами α_1 та α_2 до горизонту з початковими швидкостями v_1 та v_2 відповідно. На якій відстані будуть знаходитися тіла через час t ? Розглянути два випадки: 1) траєкторії тіл лежать в одній площині, тіла кинуті у різні боки; 2) траєкторії тіл лежать у взаємно перпендикулярних площинах.

1.41 Тіло падає з висоти H без початкової швидкості. На висоті h воно пружно стикається із закріпленою площадкою, яка розміщена під кутом $\alpha=30^\circ$ до горизонту. Знайти час падіння тіла та дальність польоту.

1.42 Два однакових тіла падають з висоти H без початкової швидкості. Одно з них зустрічає на своєму шляху закріплену на висоті h площадку, яка нахилена під кутом 45° до горизонту. Внаслідок зіткнення з площадкою напрямок швидкості тіла стає горизонтальним. Порівняти час падіння тіл. При якому відношенні висот h/H час падіння другого тіла буде максимальним.

1.43 Невеличкий м'яч кидають під кутом $\alpha=30^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0=14$ м/с. На відстані $l=11$ м від точки кидання м'яч пружно вдаряється об вертикальну стіну. На якій відстані від стіни м'яч впаде на землю?

1.44 Тіло кинуте під кутом α до похилої площини, яка становить з горизонтом кут β . Початкова швидкість тіла дорівнювала v_0 . Знайти відстань від точки кидання до точки падіння тіла на похилу площину.

1.45 З двох пунктів A та B , відстань між якими l , одночасно починають рухатися два кораблі зі швидкостями v_1 та v_2 . Вектори швидкостей утворюють з відрізком AB однакові кути $\alpha=45^\circ$. Вважаючи рух кораблів рівномірним і прямолінійним, визначити найменшу відстань між ними.

1.46 Точка рухається відповідно до рівняння $y=6t-t^3/8$ (довжина у цій формулі вимірюється в метрах, а час – в

секундах). Знайти середню швидкість руху точки за проміжок часу від $t_1=2$ м/с до $t_2=6$ м/с.

1.47 Маховик обертається рівноприскорено. Знайти кут α , який утворює вектор повного прискорення довільної точки маховика з радіусом у той момент, коли маховик здійснить перші $N=2$ оберти.

1.48 Під час повороту автомобіля його колесо радіусом $r=0,75$ м котиться по колу радіусом $R=6$ м у горизонтальній площині. При цьому центр колеса рухається зі сталою швидкістю $v=1,5$ м/с. Визначити: 1) кутову швидкість та кутове прискорення колеса; 2) кут, що утворює вектор кутової швидкості з вертикаллю.

1.49 Автоматична куля діаметром $d=5,68$ мм має швидкість $v=700$ м/с і обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega=1,8 \cdot 10^4$ рад/с. Знайти максимальну швидкість точок кулі.

1.50 Через який час після початку руху вектор швидкості тіла, яке кинуто під кутом $\alpha=45^\circ$ до горизонту і початковою швидкістю $v_0=10$ м/с, буде утворювати з горизонтом кут $\beta=30^\circ$? Тіло рухається вільно.

1.51 Дві частинки рухаються з прискоренням g в однорідному гравітаційному полі. У початковий момент частинки знаходилися в одній точці і мали швидкості $v_1=3,0$ м/с і $v_2=4,0$ м/с, спрямовані горизонтально і в протилежні боки. Знайти відстань між частинками в момент, коли вектори їх швидкостей виявляться взаємно перпендикулярними.

1.52 Три точки знаходяться у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a . Вони починають одночасно рухатися зі сталою за модулем швидкістю v , причому перша точка весь час тримає курс на другу, друга – на третю, третя – на першу. Через скільки часу точки зіштовхнуться?

1.53 Дві частинки, 1 і 2, рухаються зі сталими швидкостями v_1 і v_2 по двох взаємно перпендикулярних прямих до точки їх перетину O . У момент $t=0$ частинки знаходилися на відстанях

l_1 і l_2 від точки O . Через скільки часу після цього відстань між частинками стане найменшою? Чому вона дорівнює?

1.54 За проміжок часу $\tau=10,0$ с точка пройшла половину кола радіусом $R=160$ см. Обчислити за цей час:

а) середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$; б) модуль середнього вектора швидкості $|\langle \vec{v} \rangle|$; в) модуль середнього вектора повного прискорення $|\langle \vec{a} \rangle|$, якщо точка рухалася зі сталим тангенціальним прискоренням.

1.55 Радіус-вектор частинки змінюється з часом t згідно із законом $\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t)$, де $\vec{b}$ – сталий вектор; α – додатна стала. Знайти: а) швидкість $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки залежно від часу; б) проміжок часу Δt , після закінчення якого частинка повернеться в початкову точку, а також шлях s , який вона пройде при цьому.

1.56 Кабіна ліфта, у якій відстань від підлоги до стелі дорівнює 2,7 м, почала підніматися зі сталим прискоренням $1,2 \text{ м/с}^2$. Через 2,0 с після початку підйому зі стелі кабінки почав падати болт. Знайти: а) час вільного падіння болта; б) переміщення і шлях болта за час вільного падіння в системі відліку, зв'язаної із шахтою ліфта.

1.57 Частинка рухається вздовж осі X так, що її швидкість змінюється за законом $v_x = \alpha\sqrt{x}$, де α – додатна стала. Маючи на увазі, що в момент $t=0$ вона знаходилася в точці $x=0$, знайти: а) залежність від часу швидкості й прискорення частинки; б) середню швидкість частинки за час, упродовж якого вона пройде перші s метрів шляху.

1.58 Радіус-вектор точки A відносно початку координат змінюється з часом t за законом $\vec{r} = \alpha \cdot t \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot t^2 \cdot \vec{e}_y$, де α і β – сталі; $\vec{e}_x$ і $\vec{e}_y$ – орти осей X і Y . Знайти: а) рівняння траєкторії точки $y(x)$; б) залежності від часу швидкості $\vec{v}$, прискорення $\vec{a}$ та модулів цих величин; в) залежність від часу кута ϕ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{v}$.

ТЕМА 2 ДИНАМІКА ЧАСТИНОК

Основні формули

Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона)

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (2a)$$

де $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку (рівнодійна сила); m – маса; $\vec{a}$ – прискорення; $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс, $\vec{v}$ – швидкість, N – число сил, що діють на точку.

Сила пружності

$$F_{np,x} = -kx, \quad (2б)$$

де k – коефіцієнт пружності; x – абсолютна деформація.

Сила гравітаційної взаємодії

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2в)$$

де G – гравітаційна стала; m_1 та m_2 – маси тіл, які розглядаються як матеріальні точки; r – відстань між ними.

Сила тертя ковзання

$$F_{тер} = \mu N, \quad (2г)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – нормальна складова сили реакції опори.

2.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1

Аеростат масою $m = 250$ кг почав опускатися вниз з прискоренням $a = 0,20$ м/с². Визначити масу баласту, який потрібно скинути за борт, щоб аеростат набув такого самого за

модулем прискорення у зворотному напрямку. Опором повітря знехтувати.

Розв'язання

$\Delta m - ?$	Запишемо рівняння другого закону Ньютона як для випадку руху аеростата вниз, так і для випадку його руху вгору. З отриманих рівнянь знайдемо шукану масу баласту Δm .
$m = 250 \text{ кг},$	
$a = 0,20 \text{ м/с}^2$	

В обох випадках аеростат рухається під дією сили тяжіння та сили Архімеда $\vec{F}_A$ (див. рис. 2.1). Викидання баласту приводить до зміни маси аеростату від m до $(m - \Delta m)$, а отже, і сили тяжіння від $m\vec{g}$ до $(m - \Delta m)\vec{g}$, де $\vec{g}$ – вектор прискорення вільного падіння. Сила ж Архімеда при цьому не змінюється. Тоді рівняння другого закону Ньютона, коли аеростат рухається вниз (рис. 2.1а), має вигляд

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_A + m\vec{g}. \quad (1)$$

Коли ж маса аеростата зменшується на масу баласту Δm і аеростат рухається вгору (рис. 2.1б), то рівняння руху набирає вигляду

$$(m - \Delta m)\vec{a}_2 = \vec{F}_A + (m - \Delta m)\vec{g}. \quad (2)$$

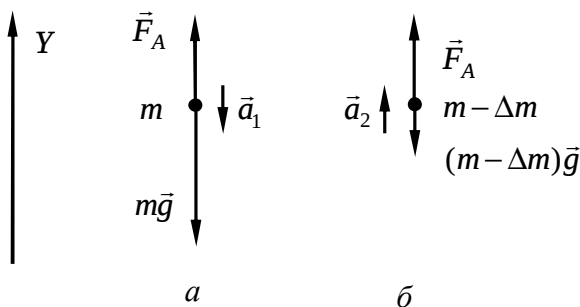


Рисунок 2.1

Проектуємо векторні рівняння (1) та (2) на вісь Y , візьмемо до уваги, що модулі прискорень в обох випадках однакові $a_1 = a_2 = a$, і отримуємо

$$\begin{aligned} -ma &= F_A - mg, \\ (m - \Delta m)a &= F_A - (m - \Delta m)g. \end{aligned} \quad (3)$$

Система рівнянь (3) є системою двох лінійних рівнянь відносно двох невідомих F_A та Δm . Розв'язуємо цю систему, наприклад, методом послідовного виключення невідомих і знаходимо шукану масу баласту

$$\Delta m = 2ma / (g + a). \quad (4)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (4) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\Delta m] = \text{кг}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{2ma}{g + a} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\text{м/с}^2} = \text{кг}.$$

Тобто $\text{кг} = \text{кг}$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\Delta m = 2ma / (g + a) = 2 \cdot 250 \cdot 0,2 / (9,81 + 0,2) \text{ кг} = 10 \text{ кг}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли прискорення аеростата прямує до нуля $a = 0$. Тоді за умовою задачі прискорення у протилежному напрямку теж повинно дорівнювати нулю. Тобто прискорення залишається таким самим і тому маса аеростата залишається незмінною. Звідси випливає, що маса баласту, який потрібно скинути за борт, щоб аеростат набув такого самого за модулем прискорення у зворотному напрямку, дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $a = 0$, то $\Delta m = 2ma / (g + a) = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta t = 2ma / (g + a) = 10$ кг.

Приклад 2.2

В установці, яка показана на рис. 2.2, маси тіл дорівнюють m_0 , m_1 , m_2 , масою блока та нитки можна знехтувати, тертя у блоці відсутнє. Знайти прискорення a , з яким опускається тіло m_0 , та силу натягу нитки між тілами m_1 та m_2 . Взяти, що коефіцієнт тертя між тілами m_1 , m_2 та горизонтальною поверхнею дорівнює μ .

Розв'язання

$a = ?$	У задачі розглядається рух системи, що складається з трьох тіл. З'ясуємо, які сили діють на кожне тіло, і запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла. З отриманих рівнянь знайдемо шукані величини.
$T_2 = ?$	
m_0 ,	
m_1 ,	
m_2 , μ	

Розглянемо сили, що діють на тіла системи (див. рис. 2.2). На кожне тіло діє сила тяжіння, відповідно $m_0\vec{g}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$. На тіла 1 та 2 діють сили реакції опори $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, та сили тертя $\vec{F}_{тер1}$, $\vec{F}_{тер2}$. Також на тіла діють сили натягу ниток, на тіло 2 – $\vec{T}_2$; на тіло 1 – $\vec{T}_2'$ та $\vec{T}_1$; на тіло 0 – $\vec{T}_1'$. Зазначимо, модулі сил натягу, що діють у межах однієї нитки, є однаковими. Тобто $T_2 = T_2'$, $T_1 = T_1'$. Також візьмемо до уваги, що усі тіла рухаються з однаковими за модулем прискоренням $a_0 = a_1 = a_2 = a$ (нитка не розтягується).

Запишемо для кожного тіла системи рівняння руху:

$$\begin{aligned} m_0\vec{a}_0 &= m_0\vec{g} + \vec{T}_1', \\ m_1\vec{a}_1 &= m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2' + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тер1}, \\ m_2\vec{a}_2 &= m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тер2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Спроектуємо це рівняння на вертикальну та горизонтальну осі:

$$\begin{aligned}
m_0 a &= m_0 g - T_1, \\
m_1 a &= T_1 - T_2 - F_{\text{тер}1}, \\
m_2 a &= T_2 - F_{\text{тер}2}, \\
0 &= -m_1 g + N_1, \\
0 &= -m_2 g + N_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Також використаємо зв'язок між силою тертя та нормальною складовою сили реакції опори:

$$F_{\text{тер}1} = \mu \cdot N_1, \quad F_{\text{тер}2} = \mu \cdot N_2. \tag{3}$$

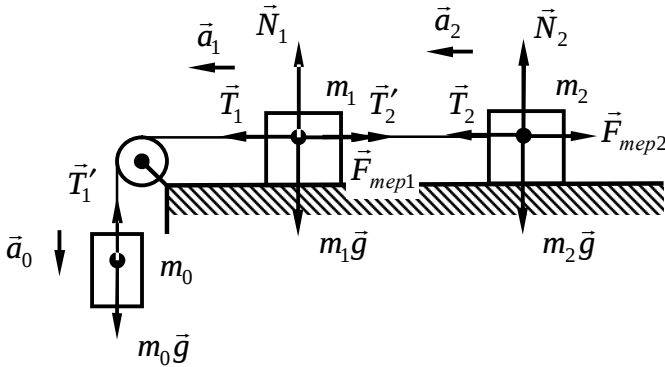


Рисунок 2.2

Проаналізуємо систему рівнянь (2) та (3). Бачимо, що в 7 незалежних рівнянь входить 7 невідомих величин. Це означає, що ця система має однозначний розв'язок, який можна знайти, наприклад, методом послідовного виключення змінних. У результаті достатньо простих перетворень з рівнянь (2) та (3) знаходимо шукані величини:

$$a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g, \quad T_2 = \frac{(1 + \mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g. \tag{4}$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (4) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини.

Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[a] = \text{м/с}^2$. З іншого боку,

$$\left[\frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тобто $\text{м/с}^2 = \text{м/с}^2$.

Зрозуміло, що $[T] = \text{Н}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{(1+\mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g \right] = \frac{\text{кг}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Тобто $\text{Н} = \text{Н}$.

Таким чином, розрахункові формули (4) дають правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

а) Розглянемо випадок, коли маса тіла 2 (див. рис. 2.2) дорівнює нулю, тобто $m_2 = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що сили, які діють на це тіло, будуть дорівнювати нулю. З цього випливає, що і сила натягу нитки T_2 теж буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли

$$m_2 = 0, \text{ то } T_2 = \frac{(1+\mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g = 0.$$

б) Розглянемо випадок, коли маси тіла 2 та 1 (див. рис. 2.2) дорівнюють нулю, тобто $m_2 = 0$, $m_1 = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, всі сили, що діють на ці тіла, дорівнюють нулю, в тому числі і сила T_1 . Це приводить до того, що тіло 0 буде рухатись виключно під дією сили тяжіння і його прискорення буде дорівнювати прискоренню вільного падіння. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли

$$m_2 = 0, m_1 = 0, \text{ то } a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g = \frac{m_0 - 0}{m_0 + 0} g = g.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g$, $T_2 = \frac{(1 + \mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g$.

Приклад 2.3

Невелике тіло пустили знизу вгору по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 15^\circ$ з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час підйому тіла виявився в $\eta = 2,0$ рази менше часу спуску.

Розв'язання

$\mu - ?$ $\eta = 2,0$, $\alpha = 15^\circ$	Розглянемо рух тіла по похилій площині у двох випадках: тіло рухається вгору (рис. 2.3а) та тіло рухається вниз (рис. 2.3б). В обох випадках тіло рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$, сили реакції опору $\vec{N}$ та сили тертя $\vec{F}_{тер}$. Відмінність цих випадків полягає у тому, що вектори сил тертя спрямовані протилежно (див. рис. 2.3) тому, що напрямки швидкості руху тут теж протилежні.
--	--

Для розв'язання задачі запишемо рівняння другого закону Ньютона для двох вищеописаних випадків, з яких знайдемо відповідні прискорення. Далі використаємо кінематичні співвідношення між шляхом, прискоренням та часом. Звідси знаходимо рівняння для відношення часу підйому тіла до часу його спуску η , з якого і визначимо коефіцієнт тертя.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. Спочатку запишемо рівняння другого закону Ньютона, коли тіло масою m рухається вгору (рис. 2.3а):

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_{тер1} + \vec{N} + m\vec{g}, \quad (1)$$

та коли тіло рухається вниз (рис. 2.3б)

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{тер2} + \vec{N} + m\vec{g}. \quad (2)$$

Спроектуємо ці рівняння на осі X та Y (див. рис. 2.3). У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} ma_1 &= +F_{тер1} + mg \sin \alpha, \\ 0 &= N - mg \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ma_2 &= -F_{\text{тер}2} + mg \sin \alpha, \\ 0 &= N - mg \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Також використаємо зв'язок між силою тертя та силою реакції опори

$$F_{\text{тер}1} = F_{\text{тер}2} = \mu N. \quad (4)$$

З рівнянь (3) та (4) легко знайти прискорення тіла a_1 , коли воно рухається вгору, та a_2 , коли воно спускається вниз. Тобто

$$a_1 = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g, \quad a_2 = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g. \quad (5)$$

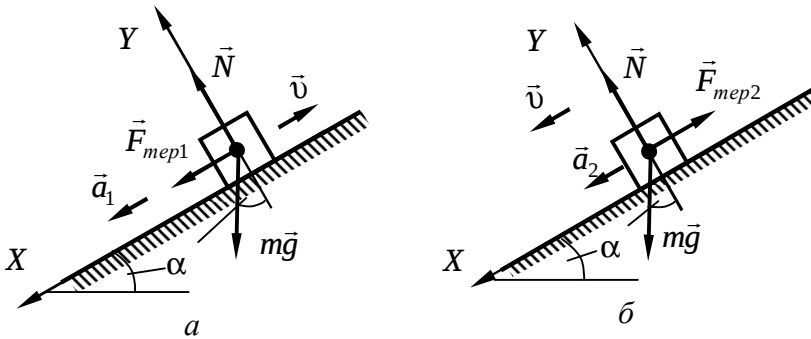


Рисунок 2.3

Позначимо через v_0 – модуль початкової швидкості тіла, яка спрямована протилежно до осі X (див. рис. 2.3); t_1 – час, через який тіло, рухаючись вгору з прискоренням a_1 , зупиниться. Зрозуміло, що за цей час тіло пройде шлях l . Використовуючи відомі формули для рівносповільненого руху, можемо записати

$$0 = v_0 - a_1 t_1, \quad l = v_0 t_1 - a_1 t_1^2 / 2. \quad (6)$$

Звідси неважко знайти

$$l = a_1 t_1^2 / 2 \quad \text{або} \quad t_1 = \sqrt{2 \cdot l / a_1}. \quad (7)$$

Коли тіло починає спускатися, то його початкова швидкість дорівнює нулю. Воно, спускаючись, проходить таку саму

відстань l , що і під час підйому. Тому, використовуючи відоме співвідношення для рівноприскореного руху, можемо записати

$$l = 0 + a_2 t_2^2 / 2 \text{ або } t_2 = \sqrt{2 \cdot l / a_2} . \quad (8)$$

З рівнянь (7) та (8) знаходимо

$$\eta = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{2 \cdot l / a_2}}{\sqrt{2 \cdot l / a_1}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}} . \quad (9)$$

Розв'язуючи рівняння (9) відносно невідомої величини k , знаходимо шуканий коефіцієнт тертя

$$\mu = [(\eta^2 - 1) / (\eta^2 + 1)] \operatorname{tg} \alpha . \quad (10)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (10) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\mu] = 1$, тобто коефіцієнт тертя є безрозмірним. З іншого боку, $[(\eta^2 - 1) \operatorname{tg} \alpha / (\eta^2 + 1)] = 1$.

Таким чином, розрахункова формула (10) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\mu = [(2^2 - 1) / (2^2 + 1)] \operatorname{tg} 15^\circ = 0,16 .$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Припустимо, що сила тертя відсутня, $\mu = 0$. У цьому випадку, як впливає з фізичних міркувань, час підйому повинен дорівнювати часу спуску. Тобто відношення цих проміжків часу біде дорівнювати одиниці, а саме $\eta = 1$. Коли ми підставимо це відношення до розрахункової формули, то отримаємо такий самий результат:

$$\mu = [(\eta^2 - 1) / (\eta^2 + 1)] \operatorname{tg} \alpha = [(1^2 - 1) / (1^2 + 1)] \operatorname{tg} \alpha = 0 .$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\mu = [(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)] \operatorname{tg} \alpha = 0,16$.

Приклад 2.4

Брусок масою m тягнуть за нитку так, що він рухається зі сталою швидкістю по горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя μ (див. рис. 2.4). Знайти кут α , при якому натяг нитки буде найменшим. Чому дорівнює сила натягу нитки?

Розв'язання

$\alpha - ?$	Особливість досліджуваного випадку полягає у тому, що за умовою задачі рух відбувається зі сталою як за модулем, так і за напрямком швидкістю. Це означає, що прискорення тіла дорівнює нулю. Використаємо рівняння другого закону Ньютона, з якого і знайдемо шукані величини.
$F_{\min} - ?$	
m, μ	

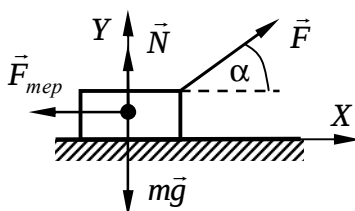


Рисунок 2.4

Зобразимо на рис. 2.4 сили, що діють на тіло. Це $\vec{F}$ – сила натягу нитки; $m\vec{g}$ – сила тяжіння; $\vec{N}$ – сила реакції опори; $\vec{F}_{\text{тер}}$ – сила тертя. Як було зазначено вище, прискорення тіла дорівнює нулю $\vec{a} = 0$. Тоді рівняння другого закону Ньютона набере вигляду

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} = m\vec{a} = 0. \quad (1)$$

Спроекуємо це рівняння на вертикальну та горизонтальні осі:

$$\begin{aligned} F \cdot \sin \alpha - mg + N &= 0 \\ F \cdot \cos \alpha - F_{\text{тер}} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Також візьмемо до уваги зв'язок між силою тертя та силою реакції опори

$$F_{\text{тер}} = \mu \cdot N. \quad (3)$$

Будемо вважати кут α відомим. Тоді рівняння (2) та (3) є системою трьох рівнянь відносно трьох невідомих (F , $F_{\text{тер}}$, N). З цієї системи неважко знайти силу натягу нитки

$$F = \mu mg / (\cos \alpha + \mu \sin \alpha). \quad (4)$$

Отримане співвідношення (4) є функцією сили натягу нитки F від кута α . Дослідимо цю функцію на екстремум залежно від кута α . Для цього знайдемо похідну сили натягу нитки F від кута α і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{-\mu mg}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2} (-\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 0. \quad (5)$$

Звідси випливає, що точки екстремуму визначаються співвідношенням

$$-\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0 \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = \mu. \quad (6)$$

Неважко впевнитись, що похідна $dF / d\alpha$ під час переходу кута α через точку $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ змінює знак з від'ємного на додатний. Це означає, що вираз (6) визначає кут, коли сила є мінімальною.

Щоб знайти величину сили для цього кута (мінімальну силу), підставимо значення кута (6) у формулу (4):

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\cos \alpha (1 + \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{\mu mg \sqrt{1 + \mu^2}}{(1 + \mu \cdot \mu)} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (7)$$

Тут використали відоме з математики співвідношення

$$1 + (\operatorname{tg} \alpha)^2 = 1 / (\cos \alpha)^2, \text{ тобто } \cos \alpha = 1 / \sqrt{1 + \mu^2} \quad (\operatorname{tg} \alpha = \mu).$$

Таким чином, формули (6) та (7) розв'язують вищепоставлене завдання.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (7) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[F_{\min}] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.

З іншого боку, $\left[\mu mg \sqrt{1 + \mu^2} \right] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.

Тобто $\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт тертя дорівнює нулю ($\mu = 0$). Тоді, для того щоб брусок рухався зі сталою швидкістю по горизонтальній площині (прискорення дорівнює нулю), достатньо сили, що дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\mu = 0$, то

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\tan \alpha = \mu$, $F_{\min} = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2}$.

Приклад 2.5

Катер масою m рухається по озеру зі швидкістю v_0 . У момент $t = 0$ виключили його двигун. Вважаючи силу опору пропорційною швидкості катера, $\vec{F}_{on} = -r\vec{v}$, знайти: а) залежності швидкості та шляху після вимкнення двигуна від часу t ; б) повний шлях катера до зупинки.

Розв'язання

$v = v(t) - ?$
$s = s(t) - ?$
$s_{повн} - ?$
$m, v_0,$
$\vec{F}_{on} = -r\vec{v}$

Для розв'язання задачі використаємо рівняння другого закону Ньютона, з якого знайдемо прискорення катера після відключення двигуна. Далі, використовуючи визначення прискорення та швидкості, знайдемо шукані величини.

Після відключення двигуна на катер діють такі сили (див. рис. 2.5): $\vec{F}_{on} = -r\vec{v}$ – сила опору руху; $\vec{N}$ – нормальна складова сили реакції опори; $m\vec{g}$ – сила тяжіння. З фізичних міркувань зрозуміло, що нормальна складова сили реакції опори $\vec{N}$ та сила тяжіння $m\vec{g}$ урівноважують одна одну ($\vec{N} + m\vec{g} = 0$), і катер у вертикальному напрямі не рухається. Тому рівнодіяна цих сил визначається лише силою опору руху і рівняння другого закону Ньютона набирає вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F}_{on} + \vec{N} + m\vec{g} = -r\vec{v} + \vec{N} + m\vec{g} \text{ або } m\vec{a} = -r\vec{v}. \quad (1)$$

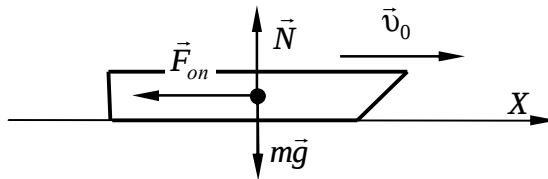


Рисунок 2.5

Спроектуємо це рівняння на вісь X :

$$ma_x = -rv_x \text{ або } a_x = -rv_x / m. \quad (2)$$

З фізичних міркувань зрозуміло, що швидкість v_x катера з часом буде змінюватися, і тому, виходячи зі співвідношення (2), буде змінюватися і прискорення a_x . Це означає, що рух човна не буде рівноприскореним і застосовувати формули рівноприскореного руху до цього випадку не можна. Тому швидкість та координати човна будемо знаходити, використовуючи визначення прискорення та швидкості.

Відповідно до визначення прискорення a_x запишемо:

$$a_x = dv_x / dt . \quad (3)$$

Використовуючи співвідношення (2) та (3), отримаємо рівність

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{rv_x}{m} . \quad (4)$$

Розглядаючи похідну як відношення нескінченно малих величин, можемо записати так:

$$\frac{dv_x}{v_x} = -(r/m)dt . \quad (5)$$

Проведемо інтегрування правої та лівої частин співвідношення (5) і знаходимо

$$\int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t (r/m)dt \text{ або } \ln(v_x)|_{v_0}^{v_x} = -(r/m)(t-0) ,$$

тобто

$$\ln(v_x / v_0) = -(r/m)t . \quad (6)$$

З останньої формули знаходимо

$$v_x = v(t) = v_0 \cdot \exp(-rt/m) . \quad (7)$$

Для знаходження шляху використаємо визначення швидкості

$$v_x = dx / dt . \quad (8)$$

Із співвідношень (7) та (8) знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \exp(-rt/m) . \quad (9)$$

Розглядаючи похідну як відношення нескінченно малих величин, запишемо

$$dx = v_0 \cdot \exp(-rt/m)dt . \quad (10)$$

Проведемо інтегрування правої та лівої частин формули (10) і отримуємо

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cdot \exp(-rt/m) dt$$

або

$$x - 0 = v_0 \cdot \exp(-rt/m) / (-r/m) \Big|_0^t = mv_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt/m)].$$

Зрозуміло, що шлях і координата катера x збігаються. Тому

$$s(t) = mv_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt/m)]. \quad (11)$$

З формули (7) випливає, що зупиниться катер (швидкість буде дорівнювати нулю), коли $t = +\infty$. Тому для визначення повного шляху $s_{повн}$ підставимо це значення часу у співвідношення (11) і отримаємо

$$s_{повн} = mv_0 / r. \quad (12)$$

Таким чином, формули (7), (11) та (12) розв'язують вищепоставлене завдання.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (7), (11) та (12) правильні одиниці вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v(t)] = \text{м/с}$.

З іншого боку, $[v_0 \cdot \exp(-rt/m)] = \text{м/с}$ (показник експоненти

$$\left[-\frac{rt}{m} \right] = \frac{(\text{Н/м/с}) \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м/с}} = 1).$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[s(t)] = \text{м}$.

$$\text{З іншого боку, } \left[\frac{mv_0}{r} [1 - \exp(-rt/m)] \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{(\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) / (\text{м/с})} = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (11) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[s_{повн}] = \text{м}$.

$$\text{З іншого боку, } [mv_0 / r] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{(\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) / (\text{м/с})} = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (12) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт опору r дорівнює нулю. Це означає, що сила опору дорівнює нулю і після відключення двигуна результуюча сила теж буде дорівнювати нулю. Отже катер буде рухатися рівномірно зі сталою швидкістю v_0 . Тобто $v(t) = v_0$, $s(t) = v_0 t$, $s_{повн} = v_0 \cdot \infty = \infty$. З розрахункових формул випливає такий самий результат. Коли $r \rightarrow 0$, то

$$v(t) = v_0 \cdot \exp(-rt / m) = v_0 \cdot \exp(-0 \cdot t / m) = v_0,$$

$$\begin{aligned} s(t) &= mv_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt / m)] = mv_0 / r \cdot [1 - (1 - rt / m)] = \\ &= (mv_0 / r) \cdot rt / m = v_0 t, \end{aligned}$$

$$s_{повн} = mv_0 / r = mv_0 / 0 = \infty.$$

У цих співвідношеннях використали формулу, що коли $\alpha \ll 1$, то $\exp(\alpha) \approx 1 + \alpha$.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $v(t) = v_0 \cdot \exp(-rt / m)$, $s(t) = mv_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt / m)]$,
 $s_{повн} = mv_0 / r$.

Приклад 2.6

Невелику кульку масою m , що підвішена на нитці, відвели убік так, що нитка утворила прямий кут з вертикаллю, а потім відпустили. Знайти: модуль повного прискорення кульки і силу натягу нитки залежно від θ – кута відхилення нитки від вертикалі.

Розв'язання

$$\begin{array}{l} a = a(\theta) - ? \\ T = T(\theta) - ? \\ m, \theta_0 = 90^\circ \end{array}$$

Для розв'язання задачі використаємо рівняння другого закону Ньютона у проєкціях на дотичну та нормаль до траєкторії. З отриманої системи рівнянь знайдемо шукані

величини.

Кулька рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ та сили натягу нитки $\vec{T}$ (див. рис. 2.6). Тоді рівняння другого закону Ньютона набере вигляду

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}. \quad (1)$$

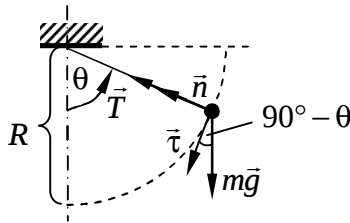


Рисунок 2.6

Спроектуємо рівняння (1) на дотичну та нормаль до траєкторії руху (див. рис. 2.6; $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, який паралельний дотичній до траєкторії руху; $\vec{n}$ – одиничний вектор, який перпендикулярний до дотичної траєкторії руху).

$$\begin{aligned} ma_n &= T - mg \sin(90^\circ - \theta), \\ ma_\tau &= mg \cos(90^\circ - \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Візьмемо до уваги, що нормальне та тангенціальне прискорення дорівнюють відповідно

$$a_\tau = dv/dt, \quad a_n = v^2/R, \quad (3)$$

де v – модуль швидкості тіла; R – радіус кривизни траєкторії (довжина нитки). Тоді з (2) та (3) отримуємо

$$m \cdot v^2/R = T - mg \cos \theta, \quad (4)$$

$$m \cdot dv/dt = mg \sin \theta. \quad (5)$$

Виходячи із зв'язку між лінійною та кутовою швидкістю, можемо записати

$$v = -Rd\theta/dt, \quad (6)$$

де знак «-» пов'язаний з тією обставиною, що $d\theta/dt < 0$, а v є модуль вектора і від'ємним бути не може (див. рис. 2.6).

Рівняння (3)-(6) дозволяють знайти шукані в задачі силу натягу T та повне прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (7)$$

Для цього помножимо рівняння (5) на рівняння (6) та проведемо деякі перетворення

$$m \cdot v dv/dt = -mgR \sin \theta d\theta/dt.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{dv^2}{dt} = mgR \frac{d \cos \theta}{dt},$$

або

$$\frac{mv^2}{2} = mgR \cos \theta + C. \quad (8)$$

Щоб визначити константу C , використаємо умову задачі: тіло мало швидкість, що дорівнює нулю $v=0$, коли кут з вертикаллю дорівнював 90° ($\theta = 0$). Підставляємо ці значення в (8) і отримуємо

$$\frac{m0^2}{2} = mgR \cos 90^\circ + C \text{ або } C = 0.$$

Тоді рівняння (8) набере вигляду

$$\frac{mv^2}{2} = mgR \cos \theta. \quad (9)$$

Зазначимо, що співвідношення (9) відображає закон збереження повної механічної енергії для випадку задачі. Застосування закону збереження повної механічної енергії до розв'язку задач розглянемо в наступному розділі.

Підставляємо v^2 з (9) в (4) і знаходимо силу натягу нитки:

$$\frac{2mgR \cos \theta}{R} = T - mg \cos \theta \text{ або } T = 3mg \cos \theta. \quad (10)$$

З рівнянь (5) та (3) знаходимо тангенціальне прискорення

$$a_\tau = dv/dt = g \sin \theta. \quad (11)$$

З рівнянь (3) та (9) знаходимо нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2gR \cos \theta}{R} = 2g \cos \theta. \quad (12)$$

Тоді повне прискорення (7) буде дорівнювати

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(2g \cos \theta)^2 + (g \sin \theta)^2} = g\sqrt{3\cos^2 \theta + 1}. \quad (13)$$

Таким чином, формули (10) та (13) є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (10) та (13) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[T] = H = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.

З іншого боку, $[3mg \cos \theta] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.

Тобто $\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$. Таким чином, розрахункова формула (10) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[a] = \text{м} / \text{с}^2$.

З іншого боку, $\left[g\sqrt{3\cos^2 \theta + 1} \right] = \text{м} / \text{с}^2$.

Тобто $\text{м} / \text{с}^2 = \text{м} / \text{с}^2$. Таким чином, розрахункова формула (13) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли θ дорівнює 90° . Ця ситуація відповідає початковому стану кульки, швидкість її дорівнює нулю, сила натягу нитки також дорівнює нулю. Повне прискорення визначається лише силою тяжіння і дорівнює

прискоренню вільного падіння g . З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\theta = 0$, то

$$T = 3mg \cos \theta = 3mg \cos(90^\circ) = 0,$$

$$a = g\sqrt{3\cos^2 \theta + 1} = g\sqrt{3\cos^2(90^\circ) + 1} = g\sqrt{3 \cdot 0 + 1} = g.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $a = g\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$, $T = 3mg \cos \theta$.

2.2 Задачі для самостійного розв'язання

2.1 Рибалка відштовхує веслом другий човен зі силою $F = 50$ Н. Які відстані пройдуть човни за 4 с, якщо маса човна з рибалкою $m_1 = 250$ кг, а другого човна – $m_2 = 200$ кг? Опір води руху човнів не враховувати.

2.2 З баркаса тягнуть канат, поданий на човен, який перебуває на відстані 10 м. Визначити відстані, пройдені човном і баркасом до їх зустрічі, якщо маса човна 300 кг, а маса баркаса 1200 кг.

2.3 Невелике тіло рівномірно обертається на нитці, що утворює кут α з вертикаллю, по колу в горизонтальній площині. Визначити відношення сил натягу нитки та кутових швидкостей для значень кута $\alpha = 30^\circ$ та $\alpha = 45^\circ$.

2.4 До сталюого контейнера масою 600 кг, який стоїть на бетонній підлозі, приклали у горизонтальному напрямі силу 1000 Н. Чи рухатиметься під дією цієї сили контейнер? Якщо так, то як – рівномірно чи з прискоренням? Коефіцієнт тертя сталі по бетону вважати таким, що дорівнює 0,3.

2.5 Хлопчик може тягнути санчата з силою 200 Н. Який максимальний вантаж він може везти на санчатах по горизонтальній дорозі, коли коефіцієнт тертя полозків санчат об сніг дорівнює 0,05? Маса санчат 30 кг. Вважати, що сила прикладається до санчат паралельно дорозі.

2.6 З якою мінімальною силою, спрямованою горизонтально, слід притискати плоский брусок до стіни, щоб він не вислизнув униз? Маса бруска 5 кг, коефіцієнт тертя між стіною і бруском $\mu = 0,1$.

2.7 Маневровий тепловоз масою 100 т тягне два вагони масами по 60 т кожен з прискоренням $0,2 \text{ м/с}^2$. Визначити силу тяги тепловоза і силу натягу зчеплень, якщо коефіцієнт опору рухові дорівнює 0,005.

2.8 Санчата масою m тягнуть із силою F , що прикладена до мотузки, яка утворює з горизонтом кут α . Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ . Знайти силу тертя ковзання.

2.9 Чому дорівнює сила тертя, коли тіло масою m перебуває у стані спокою на похилій площині з кутом α .

2.10 Тіло масою m лежить на тілі масою M . Максимальне значення сили тертя спокою між цими тілами характеризується коефіцієнтом μ_0 . Між тілом M та іншою поверхнею тертя відсутнє. Знайти мінімальну силу F , при дії якої на тіло M відбувається зсув верхнього тіла відносно нижнього.

2.11 Як відносяться одна до одної сили, з якими тіло тисне на середину опуклого та випуклого моста? Радіус кривизни в обох випадках дорівнює $R = 40 \text{ м}$, а швидкість руху тіла $v = 45 \text{ км/год}$.

2.12 Тіло може рухатися по колу в вертикальній площині на нитці довжиною $l = 1 \text{ м}$. Яку горизонтальну швидкість необхідно надати тілу у верхньому положенні, щоб сила натягу нитки в нижньому положенні була в $n = 10$ разів більшою сили тяжіння тіла?

2.13 По двох нахилених площинах однакової висоти H , але з різними кутами нахилу α_1 та α_2 , без тертя ковзають тіла. Початкові швидкості тіл дорівнюють нулю. Обчислити відношення швидкостей тіл наприкінці шляху.

2.14 Тіло спочатку ковзає по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$, а потім по горизонтальній поверхні і зупиняється. Відстані, що проходить тіло по похилій площині та

по горизонтальній поверхні, є однаковими. Визначити коефіцієнт тертя.

2.15 Хлопчик, спираючись на бар'єр, кинув камінь з горизонтальною швидкістю $v_0 = 14$ м/с. Яку швидкість відносно Землі він надасть каменю, якщо буде кидати його з тією самою силою стоячи на ковзунах на гладкому льоді? Яку відстань при цьому пройде хлопчик до зупинки, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,02$? Маса каменя $m = 1$ кг, хлопчика $M = 36$ кг.

2.16 По похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, рухається вгору вантаж масою m під дією сили F , яка спрямована під кутом β до площини. Коефіцієнт тертя ковзання μ . Знайти прискорення тіла.

2.17 Тіло починає ковзати з вершини похилої площини без початкової швидкості. Висота площини h , кут нахилу α . Знайти швидкість тіла наприкінці площини, якщо коефіцієнт тертя μ .

2.18 До тіла масою $m = 10$ кг, що знаходиться на горизонтальній площині, прикладена сила $F_1 = 10$ Н, яка утворює кут з площиною $\alpha = 60^\circ$, та горизонтальна сила $F_2 = 20$ Н. Визначити прискорення, з яким тіло почне рухатися, якщо відомо, що коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0,1$.

2.19 У вагоні, який рухається горизонтально зі сталим прискоренням $a = 3$ м/с², висить на шнурі вантаж масою $m = 2$ кг. Визначити силу натягу шнура та кут α її відхилення від вертикалі, якщо вантаж нерухомий відносно вагона.

2.20 Тіло масою m , яке знаходиться на вершині похилої площини, утримується силою тертя. За який час тіло спуститься з похилої площини, якщо вона почне рухатися в горизонтальному напрямку з прискоренням $a_0 = 1$ м/с²? Довжина площини $l = 1$ м, кут нахилу до горизонту $\alpha = 30^\circ$, коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0,6$.

2.21 Вага тіла, яке занурене у рідину з густиною ρ_1 , дорівнює P_1 , а зануреного в рідину з густиною ρ_2 дорівнює P_2 . Визначити густину тіла.

2.22 Деяке тіло вагою P , яке занурене в рідину з густиною ρ_1 , має вагу P_1 , а занурене в рідину невідомої густини – P_2 . Визначити густину ρ_2 другої рідини.

2.23 Якою повинна була б бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі не мали ваги? Взяти радіус Землі $R = 6400$ км.

2.24 Обчислити першу космічну швидкість для планети, маса і радіус якої у n разів більше, ніж у Землі.

2.25 Два супутники рухаються навколо Землі по колових орбітах на висотах h_1 та h_2 від її поверхні. Знайти відношення швидкостей руху та періодів обертання цих супутників, вважаючи радіус Землі відомим.

2.26 Тіло масою m кинуте під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . На нього діє зі сталою силою F попутний горизонтальний вітер. Знайти максимальну висоту підняття, час та дальність польоту тіла.

2.27 Під яким кутом α до горизонту необхідно кинути тіло масою m , щоб максимальна висота підйому тіла дорівнювала дальності його польоту, якщо на тіло діє зі сталою силою F горизонтальний попутний вітер.

2.28 По горизонтальній площині рухається тіло масою $M = 5$ кг під дією сили $F = 3$ Н, прикладену під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0,2$. Обчислити швидкість тіла через $t = 10$ с після початку дії сили.

2.29 Людина везе з силою $F = 12$ Н двоє послідовно зв'язаних між собою санчат, тягнучи за мотузку, що утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. Маси санчат однакові і дорівнюють $m = 15$ кг. Коефіцієнт тертя $\mu = 0,02$. Знайти: 1) прискорення санчат; 2) силу натягу мотузки між санчатами; 3) силу, з якою людина повинна тягнути за мотузку, щоб санчата рухалися рівномірно.

2.30 Тіло масою m ковзає без тертя і без початкової швидкості з вершини вертикально поставленого обруча радіусом R . З якою силою воно буде давити на обруч, коли проходитиме точку, висота якої менша за висоту вершини обруча на величину h ? Знайти, на якій висоті тіло відірветься від обруча.

2.31 Кулька підвішена на нитці довжиною l . На відстані $l/2$ по вертикалі від точки підвісу вбитий цвях. Кульку відводять так, що нитка займає горизонтальне положення і відпускають. Визначити висоту h , до якої підніметься кулька (відносно положення рівноваги).

2.32 Гумовий шнур, кінці якого поєднані, вільно насаджено на диск, який обертається в горизонтальній площині навколо вертикальної осі з частотою $n = 20$ Гц. Беручи до уваги, що шнур має форму кола, визначити силу натягу шнура. Маса шнура $m = 15$ г, довжина $l = 60$ см.

2.33 На пружині, довжина якої в недеформованому стані l_0 , підвішений нерухомий блок. Через нього перекинута нитка, до кінців якої прикріплені вантажі m_1 та $m_2 > m_1$. Нехтуючи тертям та вважаючи блок невагомим, а нитку невагомою та нерозтяжною, визначити прискорення, з якими будуть рухатися вантажі, силу натягу нитки, а також довжину пружини, якщо відомо, що її жорсткість k .

2.34 Порожниста стальна кулька піднімається з глибини води ($h = 500$ м) на поверхню. Швидкість усталеного руху кульки $v = 10$ м/с. На яку відстань і в якому напрямку відносно вертикалі відхилиться кулька внаслідок дії сили Коріоліса. Широта місцевості $\varphi = 30^\circ$.

2.35 Цистерна з рідиною рухається горизонтально з прискоренням $a = 1$ м/с². Під яким кутом до горизонту повітряна бульбашка підніматиметься в рідині?

2.36 Обчислити густину ρ речовини кулеподібної планети, якщо супутник рухається навколо неї по коловій орбіті з

періодом T на відстані від поверхні планети, яка дорівнює половині її радіусу.

2.37 Обчислити густину ρ речовини кулеподібної планети, доба якої дорівнює $T=10$ год, якщо відомо, що на екваторі планети тіла невагомі.

2.38 Кулька масою m об'єму V падає в воду з висоти H , занурюється на глибину h , а потім вискакує з води (густина кульки менша за густину води). Знайти силу опору води, вважаючи, що вона стала, а також висоту h_1 , на яку підніметься кулька, коли вискочить з води. Опором повітря знехтувати.

ТЕМА 3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ, ЕНЕРГІЇ ТА МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

Основні формули

Зміна імпульсу незамкненої системи:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{зовн}} dt. \quad (3a)$$

Координати центра мас системи матеріальних точок

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}, \quad (3б)$$

де m_i – маса i -ї матеріальної точки; x_i , y_i , z_i – її координати, $M = \sum m_i$ – маса всієї системи.

Рівняння динаміки тіла змінної маси

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн}} + \frac{dm}{dt} \vec{u}, \quad (3в)$$

де $\vec{u}$ – швидкість відокремлюваної речовини відносно тіла; $\vec{F}_{\text{зовн}}$ – зовнішня сила, що діє на тіло.

Робота й потужність сили

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F_s ds, \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3г)$$

Кінетична енергія частинки

$$E_k = mv^2 / 2. \quad (3д)$$

Теорема про кінетичну енергію

$$A = E_{k,2} - E_{k,1}. \quad (3е)$$

Зв'язок між потенціальною енергією та силою

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z \right). \quad (3ж)$$

Потенціальна енергія частинки масою m , яка знаходиться в однорідному полі тяжіння Землі,

$$E_p = mgy, \quad (33)$$

де y – висота тіла над рівнем, який прийнято за нульовий для відліку потенціальної енергії; g – прискорення вільного падіння.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла (стиснутої або розтягнутої пружини)

$$E_p = kx^2 / 2, \quad (3i)$$

де k – коефіцієнт пружності; x – абсолютна деформація тіла.

Закон збереження повної механічної енергії в механіці

$$E_k + E_p = \text{const}, \quad (3к)$$

де E_k – кінетична енергія системи частинок; E_p – повна потенціальна енергія системи.

Момент імпульсу та момент сили відносно точки

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad (3л)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, що визначає положення частинки відносно точки; $\vec{p}$ – імпульс частинки; $\vec{F}$ – сила, що діє на частинку.

Коли результуючий момент сил, які діють на систему, дорівнює нулю, то має місце закон збереження моменту імпульсу системи матеріальних точок

$$\sum_i \vec{L}_i = \vec{\text{const}}. \quad (3м)$$

3.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 3.1

Снаряд масою $m = 10$ кг мав початкову швидкість $v_0 = 800$ м/с, яка спрямована під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Через $t_0 = 20$ с після пострілу снаряд розірвався на два осколки.

Один осколок мав масу $m_1 = 4$ кг і швидкість $v_1 = 1$ км/с. Вектор швидкості v_1 утворював з горизонтом кут $\beta = 46^\circ$. Визначити швидкість другого осколка, якщо всі тіла рухались вільно і в одній площині.

Розв'язання

$v_2 = ?$

$m = 10$ кг,
 $v_0 = 800$ м/с,
 $t_0 = 20$ с,
 $\alpha = 30^\circ$,
 $m_1 = 4$ кг,
 $v_1 = 1$ км/с,
 $\beta = 46^\circ$

Снаряд та осколки в умовах задачі рухаються під дією зовнішньої сили тяжіння $m\vec{g}$. Тому зміну імпульсу, а отже, і швидкості будемо визначати з другого закону Ньютона (За).

Розглядаємо три моменти руху снаряда (рис. 3.1): A – вихідний стан, який характеризується початковою швидкістю $\vec{v}_0$; B – стан снаряда через $t_0 = 20$ с після пострілу до розриву, який характеризується швидкістю $\vec{v}_B$; C – стан відразу після розриву снаряда на осколки масами m_1 й m_2 та швидкостями відповідно $\vec{v}_1$ й $\vec{v}_2$. Саме модуль швидкості v_2 потрібно знайти у задачі.

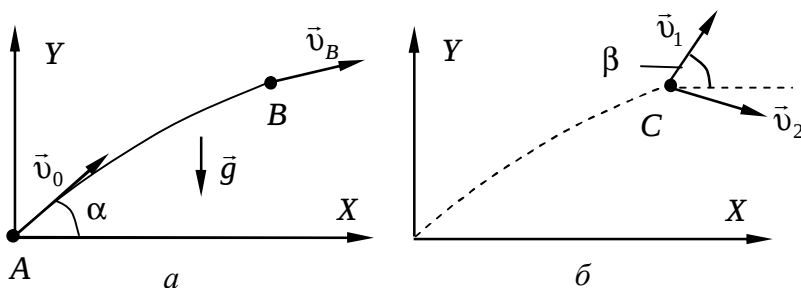


Рисунок 3.1

З'ясуємо зміну швидкості снаряда під час переходу із стану A в стан B (рис. 3.1а). Відповідно до другого закону Ньютона (За) можемо записати

$$\vec{p}_B - \vec{p}_0 = \int_0^{t_0} m\vec{g}dt \quad \text{або} \quad m\vec{v}_B - m\vec{v}_0 = m\vec{g} \cdot t_0, \quad (1)$$

де $\vec{p}_B = m\vec{v}_B$, $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ імпульси снаряда відповідно у стані B та стані A . Тут взято до уваги, що снаряд рухається із точки A до точки B за час t_0 . Спроектуємо рівняння (1) на осі X та Y :

$$\begin{aligned} m v_{B,x} - m v_0 \cos \alpha &= 0 \\ m v_{B,y} - m v_0 \sin \alpha &= -mg \cdot t_0. \end{aligned} \quad (2)$$

У рівнянні (2) врахували, що, як випливає з рис. 3.1 *a*, $v_{0,x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0,y} = v_0 \sin \alpha$. Рівняння (2) дозволяють знайти швидкість снаряда в точці B .

Тепер знайдемо зміну швидкості снаряда під час переходу із стану B у стан C (рис. 3.1*б*). Відповідно до співвідношення (3а) можемо записати

$$\vec{p}_C - \vec{p}_B = \int_{t_0}^{t_0} m \vec{g} dt \text{ або } m\vec{v}_C - m\vec{v}_B = m\vec{g} \cdot 0 = 0. \quad (3)$$

Тут враховано, що розрив снаряда відбувається практично миттєво, тобто $t_1 = t_2 = t_0$. Як бачимо, завдяки цьому імпульс системи не змінюється. Це означає, що під час розриву снаряда імпульс системи зберігається. Слід також зазначити, що

$$m\vec{v}_C = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad (4)$$

є повним імпульсом системи після розриву снаряда. Спроектуємо рівняння (3) з урахуванням (4) на осі X та Y

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,x} + m_2 v_{2,x} &= m v_{B,x}, \\ m_1 v_{1,y} + m_2 v_{2,y} &= m v_{B,y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Неважко знайти з рис. 3.1 *б* проекції $v_{1,x} = v_1 \cos \beta$ та $v_{1,y} = v_1 \sin \beta$. Тоді, також використовуючи, що маса другого осколка дорівнює $m_2 = m - m_1$, з рівнянь (5) та (2) знаходимо проекції швидкості другого осколка на осі X та Y :

$$\begin{aligned} m_2 v_{2,x} &= m v_{B,x} - m_1 v_{1,x} = m v_0 \cos \alpha - m_1 v_1 \cos \beta, \\ m_2 v_{2,y} &= m v_{B,y} - m_1 v_{1,y} = m(v_0 \sin \alpha - g t_0) - m_1 v_1 \sin \beta. \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді модуль шуканої швидкості v_2 буде дорівнювати

$$v_2 = \sqrt{(v_{2,x})^2 + (v_{2,y})^2} = \frac{1}{m - m_1} \times \\ \times \sqrt{(mv_0 \cos \alpha - m_1 v_1 \cos \beta)^2 + (m(v_0 \sin \alpha - gt_0) - m_1 v_1 \sin \beta)^2} . \quad (7)$$

Таким чином, отримали формулу (7), яка визначає розв'язок задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (7) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v_2] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{\sqrt{(mv_0 \cos \alpha - m_1 v_1 \cos \beta)^2 + (m(v_0 \sin \alpha - gt_0) - m_1 v_1 \sin \beta)^2}}{m - m_1} \right] = \\ = \frac{\sqrt{(кг \cdot м/с)^2}}{кг} = \text{м/с} .$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$v_2 \approx 706 \text{ м/с} .$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли $m_1 = 0$ та $t_0 = 0$. Це означає, що снаряд розривається зразу. Через те що маса першого осколка дорівнює нулю, другий осколок додаткового впливу з боку першого осколка не отримує (фактично розрив відсутній). Тому другий осколок збігається зі снарядом, і його швидкість дорівнює швидкості снаряду у вихідному положенні, тобто v_0 .

З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $m_1 = 0$ та $t_0 = 0$, то

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\sqrt{(mv_0 \cos \alpha - m_1 v_1 \cos \beta)^2 + (m(v_0 \sin \alpha - gt_0) - m_1 v_1 \sin \beta)^2}}{m - m_1} = \\ &= \frac{\sqrt{(mv_0 \cos \alpha - 0)^2 + (m(v_0 \sin \alpha - 0) - 0)^2}}{m - 0} = \\ &= \frac{mv_0 \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2}}{m} = v_0. \end{aligned}$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $v_2 = 1/(m - m_1) \times$

$$\times \sqrt{(mv_0 \cos \alpha - m_1 v_1 \cos \beta)^2 + (m(v_0 \sin \alpha - gt_0) - m_1 v_1 \sin \beta)^2} \approx \approx 706 \text{ м/с.}$$

Приклад 3.2

На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки з легкими колесами. На одному кінці дошки знаходиться людина. Маса людини $m_1 = 60$ кг, маса дошки $m_2 = 20$ кг. З якою швидкістю v_2 (відносно підлоги) буде рухатися візок, коли людина піде уздовж дошки зі швидкістю (відносно дошки) $u = 1$ м/с? На яку відстань d переміститься візок, коли людина перейде на інший кінець дошки? Довжина l дошки дорівнює 2 м. Масою коліс знехтувати. Тертя у втулках не враховувати.

Розв'язання

$v_2 - ?$	Для розв'язання задачі використаємо закон збереження імпульсу та закон додавання швидкостей у ньютонівській механіці (1і). На систему, що складається з людини та дошки, діють зовнішні сила тяжіння та сила реакції опори. Ці сили паралельні вертикальній осі. Людина та дошка у вертикальному напрямку
$d - ?$	
$m_1 = 60$ кг,	
$m_2 = 20$ кг,	
$u = 1$ м/с,	
$l = 2$ м	

не рухаються. Це означає, що зовнішня сила тяжіння повністю компенсується зовнішньою силою реакції опори. Тобто результуюча зовнішніх сил дорівнює нулю. Тому для системи, що складається з людини та дошки, можемо застосувати закон збереження імпульсу

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0. \quad (1)$$

У формулі (1) враховано, що до початку руху як людина, так і дошка не рухались відносно підлоги (тому права частина рівності дорівнює нулю), $\vec{v}_1$ є швидкістю людини відносно підлоги.

Згідно із законом додавання швидкостей можемо записати, що швидкість людини відносно підлоги $\vec{v}_1$ (відносно нерухомої системи відліку) дорівнює сумі швидкості людини відносно дошки $\vec{u}$ (відносно рухомої системи відліку) та швидкості дошки відносно підлоги $\vec{v}_2$ (швидкості рухомої системи відліку відносно нерухомої):

$$\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}_2. \quad (2)$$

Система рівнянь (1)-(2) є системою двох рівнянь відносно двох невідомих $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$, яка має такий розв'язок:

$$\vec{v}_2 = -m_1 \vec{u} / (m_1 + m_2); \quad \vec{v}_1 = +m_2 \vec{u} / (m_1 + m_2). \quad (3)$$

З формул (3) знаходимо, що шуканий модуль швидкості візка відносно підлоги дорівнює

$$v_2 = m_1 u / (m_1 + m_2). \quad (4)$$

Для того щоб визначити відстань d , на яку пересунеться візок, коли людина перейде на інший кінець дошки, визначимо час руху людини (й візка) t як відношення довжини дошки до швидкості людини відносно дошки

$$t = l / u. \quad (5)$$

За цей час візок відносно підлоги переміститься на відстань

$$d = v_2 \cdot t = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{u} = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

У цьому співвідношенні використали формули (4) та (5).

Таким чином, отримали формули (4) та (6), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (4) та (6) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві та ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v_2] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{m_1 u}{m_1 + m_2} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг}} = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[d] = \text{м}$. З іншого боку, $\left[\frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \text{м}.$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (6) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункові формули (4) та (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$v_2 = 60 \cdot 1 / (60 + 20) \text{ м/с} = 0,75 \text{ м/с};$$

$$d = 60 \cdot 2 / (60 + 20) \text{ м} = 1,5 \text{ м}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса дошки є нескінченно великою ($m_2 = \infty$). Із фізичних міркувань випливає, що у цьому випадку дошка рухатися не буде, тобто її швидкість дорівнює нулю. Відстань, на яку дошка зміститься, теж буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $m_2 = \infty$, то

$$v_2 = m_1 u / (m_1 + m_2) = m_1 u / (m_1 + \infty) = 0,$$

$$d = m_1 l / (m_1 + m_2) = m_1 l / (m_1 + \infty) = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $v_2 = m_1 u / (m_1 + m_2) = 0,75 \text{ м/с};$
 $d = m_1 l / (m_1 + m_2) = 1,5 \text{ м.}$

Приклад 3.3

З ракети масою m_0 починає витікати газ зі швидкістю u відносно ракети. Маса газу, що витікає за одну секунду, дорівнює μ . Знайти рівняння руху ракети. Чому дорівнює швидкість ракети через t секунд після початку руху?

Розв'язання

$v - ?$	Рівнянням руху тіла називають рівняння, яке пов'язує прискорення тіла з силами, що діють на це тіло. Знайдемо це рівняння для ракети.
$m_0, \quad u,$	
μ	

Ракета рухається завдяки реактивній силі. З'ясуємо сутність цієї сили. Розглянемо малий проміжок часу dt . За цей час маса ракети зменшиться від m до $m + dm$ (dm – від'ємна величина) завдяки тому, що частина пального ракети ($-dm$) перетворюється у газ і вилітає з ракети. В момент часу $t = 0$ швидкість пального ракети ($-dm$) дорівнювала швидкості ракети $\vec{v}$, а через проміжок часу dt дорівнює $(\vec{v} + \vec{u})$, де $\vec{u}$ є швидкістю газу відносно ракети. Тоді зміна імпульсу газу масою ($-dm$) буде дорівнювати

$$dp_z = (-dm)(\vec{v} + \vec{u}) - (-dm)\vec{v} = (-dm)\vec{u}. \quad (1)$$

Сила, яка діє на газ з боку ракети, відповідно до другого закону Ньютона (2а) має вигляд

$$\vec{F}_z = \frac{d\vec{p}_z}{dt} = -\frac{dm}{dt} \vec{u}. \quad (2)$$

Згідно з третім законом Ньютона сила $\vec{F}_p$, яка діє на ракету з боку газів, дорівнює за модулем та протилежна за напрямком силі, що діє на газ з боку ракети:

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_z = +\frac{dm}{dt} \vec{u}. \quad (3)$$

Сила $\vec{F}_r$ і є реактивною силою. Візьмемо до уваги, що на ракету, крім реактивної сили, також діє сила тяжіння. Тоді рівняння другого закону Ньютона для ракети набере вигляду

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \frac{dm}{dt} \vec{u}. \quad (4)$$

Рівняння (4) є рівнянням руху для ракети. Використовуючи, що початкова маса ракети m_0 і щосекунди з ракети витікає газ масою μ , можемо записати закон зміни маси ракети з часом

$$m = m_0 - \mu t. \quad (5)$$

Підставимо формулу (5) у (4) і отримаємо шукане рівняння руху ракети у вигляді

$$(m_0 - \mu t) \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{g} \right) = -\mu \vec{u}. \quad (6)$$

Порівнюючи рівняння (4) зі співвідношенням (Зв), бачимо, що рівняння (4) є частинним рівнянням (Зв).

Розв'яжемо диференціальне рівняння руху (6) методом розділення змінних та знайдемо шукану швидкість:

$$\int_0^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \left(\frac{-\mu \vec{u}}{m_0 - \mu t} + \vec{g} \right) dt$$

або

$$\vec{v} = -\vec{u} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) + \vec{g}t. \quad (7)$$

Таким чином, отримали формули (6) та (7), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (7) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\vec{v}] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[-\bar{u} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) + \bar{g}t \right] = \text{м/с}.$$

Тобто м/с = м/с. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли з ракети не витікає газ, тобто $\mu = 0$. З фізичних міркувань випливає, що у цій ситуації реактивна сила не виникає, і ракета буде летіти лише під дією сили тяжіння з прискоренням вільного падіння $\bar{g}$. Тобто швидкість буде змінюватися у часі за законом $\bar{v} = \bar{g}t$ (початкову швидкість взяли такою, що дорівнює нулю). З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\mu = 0$, то

$$\bar{v} = -\bar{u} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) + \bar{g}t = -\bar{u} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - 0} \right) + \bar{g}t = -\bar{u} \ln(1) + \bar{g}t = \bar{g}t.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $(m_0 - \mu t)(d\bar{v}/dt - \bar{g}) = \mu \bar{u}$, $\bar{v} = -\bar{u} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) + \bar{g}t$.

Приклад 3.4

Шайба масою $m = 50$ г зісковзує без початкової швидкості з похилої площини, що утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом, і, пройшовши по горизонтальній площині відстань $l = 50$ см, зупиняється. Знайти роботу сил тертя на всьому шляху, вважаючи усюди коефіцієнт тертя таким, що дорівнює $\mu = 0,15$.

Розв'язання

$A_{\text{тер}} - ?$	Для розв'язання задачі визначимо шукану роботу сили тертя двома способами: 1) використовуючи зв'язок між роботою неконсервативних сил і
$m = 50$ г, $\alpha = 30^\circ$,	
$l = 50$ см, $\mu = 0,15$	

зміною повної механічної енергії; 2) використовуючи визначення роботи сили. З отриманої системи рівнянь знайдемо шукану величину.

Тіло масою m починає рухатись з точки A (рис. 3.2), в якій має кінетичну енергію, що дорівнює нулю, та потенціальну енергію mgh , де h – висота тіла над горизонтальною лінією BC (рис. 3.2). Це означає, що в точці A сума кінетичної та потенціальної енергій, тобто повна енергія дорівнює

$$E_A = mgh. \quad (1)$$

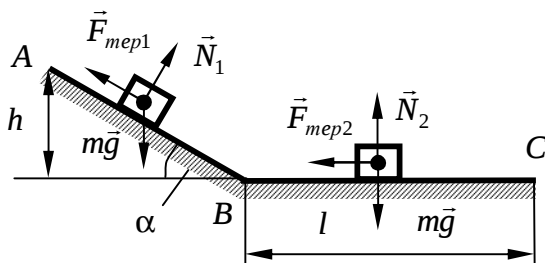


Рисунок 3.2

Тіло зісковзує з похилої площини AB (рис. 3.2), у точці B має найвищу швидкість, потім на горизонтальній ділянці BC гальмується силою тертя і зупиняється у точці C . У точці C швидкість та висота тіла над горизонтальною лінією BC дорівнюють нулю. Отже, повна енергія тіла у точці C дорівнює нулю:

$$E_C = 0. \quad (2)$$

Як відомо, робота неконсервативної сили (у задачі це робота сили тертя $A_{тр}$ на ділянці AB та BC) дорівнює зміні повної механічної енергії, тобто

$$A_{тр} = E_C - E_A = 0 - mgh = -mgh. \quad (3)$$

Визначимо цю роботу іншим способом, виходячи з визначення роботи. Зрозуміло, що робота сили тертя $A_{тр}$

складається з роботи сили тертя на ділянці AB та роботи сили тертя на ділянці BC :

$$A_{тер} = A_{AB} + A_{BC} . \quad (4)$$

Роботу на цих ділянках знайдемо, використовуючи визначення роботи сили:

$$\begin{aligned} A_{AB} &= -F_{тер1} \cdot |AB|, \\ A_{BC} &= -F_{тер2} \cdot |BC|. \end{aligned} \quad (5)$$

У формулі (5) знак « $\leftarrow$ » пов'язаний з тим, що напрямки сили тертя і швидкості є протилежними. З рисунка бачимо, що

$$|AB| = h / \sin \alpha, \quad |BC| = l. \quad (6)$$

Для сил тертя запишемо їх зв'язок з нормальними складовими сил реакції (рис. 3.2)

$$F_{тер1} = \mu N_1, \quad F_{тер2} = \mu N_2. \quad (7)$$

Сили реакції опори знайдемо, спроектувавши другий закон Ньютона на перпендикулярну до поверхні вісь і врахувавши, що у цьому напрямку тіло не рухається, тобто проекції прискорення тіла дорівнюють нулю:

$$N_1 = mg \cdot \cos \alpha, \quad N_2 = mg. \quad (8)$$

Підставимо (5)-(8) в (4) і одержимо вираз для роботи сили тертя на ділянці ABC

$$A_{тер} = -mg\mu \left(\frac{h \cos \alpha}{\sin \alpha} + l \right). \quad (9)$$

Виключаючи з системи рівнянь (9) та (3) невідому висоту h , знаходимо шукану роботу сили тертя

$$A_{тер} = -\frac{\mu mgl}{1 - \mu \cdot \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (10)$$

Таким чином, отримали формулу (10), яка є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (10) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[A_{тер}] = \text{Дж}$. З іншого боку,

$$\left[-\frac{\mu mgl}{1 - \mu \cdot \text{ctg}\alpha} \right] = \text{кг} \cdot (\text{м/с}^2) \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Тобто Дж = Дж. Таким чином, розрахункова формула (10) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$A_{тер} = -\frac{0,15 \cdot 0,05 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{1 - 0,15 \cdot \text{ctg}30^\circ} = -0,04 \text{ Дж}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт тертя дорівнює нулю. Тоді сила тертя, а отже, і робота цієї сили дорівнюють нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли

$$\mu = 0, \text{ то } A_{тер} = -\frac{\mu mgl}{1 - \mu \cdot \text{ctg}\alpha} = \frac{0 \cdot mgl}{1 - 0 \cdot \text{ctg}\alpha} = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $A_{тер} = -\mu mgl / (1 - \mu \cdot \text{ctg}\alpha) = -0,04 \text{ Дж}$.

Приклад 3.5

Вираз потенціальної енергії частинки має вигляд $E_p = 2x^2 - 3y + 4z^3$. Визначити: а) силу, що діє на частинку; б) роботу A , що виконує поле при переміщенні частинки з точки $B_1(-2;3;1)$ в точку $B_2(2;2;2)$; в) як збільшиться кінетична енергія частинки при цьому?

Розв'язання

$$\begin{array}{l} \vec{F} - ? \\ A - ? \\ E_{k2} - E_{k1} - ? \\ \hline E_p = 2x^2 - 3y + 4z^3, \\ B_1(-2;3;1), \\ B_2(2;2;2) \end{array}$$

Для визначення сили, яку створює потенціальне поле U , використаємо зв'язок між потенціальною енергією та силою (Зж)

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z \right). \quad (1)$$

Підставимо в (1) $E_p = 2x^2 - 3y + 4z^3$ і

знайдемо

$$\vec{F} = -4x\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 12z^2\vec{e}_z. \quad (2)$$

Роботу, що виконує поле при переміщенні частинки з точки B_1 в точку B_2 , знайдемо, використовуючи зв'язок між роботою та потенціальною енергією

$$A = E_{p1} - E_{p2}, \quad (3)$$

де $E_{p1} = E_p(-2;3;1) = (2(-2)^2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot (1)^3) \text{ Дж} = 3 \text{ Дж}$ – потенціальна енергія у точці $B_1(-2;3;1)$, $E_{p2} = E_p(2;2;2) = 34 \text{ Дж}$ – потенціальна енергія у точці $B_2(2;2;2)$. Таким чином, робота, що виконується полем при переміщенні частинки з точки B_1 в точку B_2 , виходячи з (3), дорівнює $A = -31 \text{ Дж}$.

Для знаходження зміни кінетичної енергії використаємо закон збереження повної механічної енергії (Зз):

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}. \quad (4)$$

Звідси

$$E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} = A = -31 \text{ Дж}. \quad (5)$$

Таким чином, отримали формули (2), (3) та (5), які є розв'язками задачі.

Відповідь: $\vec{F} = -4x\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 12z^2\vec{e}_z$; $A = -31 \text{ Дж}$;

$E_{k2} - E_{k1} = -31 \text{ Дж}$.

Приклад 3.6

На столі лежить гнучка мотузка, п'ята частина якої вільно звисає. Яку роботу потрібно виконати, щоб витягти звисаючу частину мотузки на стіл? Довжина мотузки $l = 1$ м, а її маса $m = 1$ кг. Тертя не враховувати.

Розв'язання

$A - ?$	Мотузка не є матеріальною точкою. Формули, які є правильними для матеріальної точки, безпосередньо до мотузки застосовувати не можна. Тому розіб'ємо мотузку на елементарні частини, які вже можна вважати матеріальними точками. Обчислимо елементарну роботу dA для кожної малої частинки мотузки. Далі проведемо підсумовування цих елементарних робіт і отримаємо шукану роботу.
$l = 1$ м,	
$m = 1$ кг,	
$\eta = 1/5 = 0,2$	

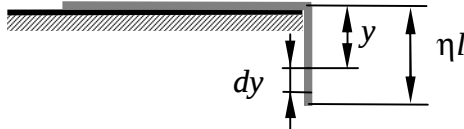


Рисунок 3.3

Розіб'ємо мотузку на елементарні частини довжиною dy (рис. 3.3). Виходячи з того, що мотузка є однорідною, легко можна знайти масу цієї елементарної частини як

$$dm = dy \frac{m}{l}. \quad (1)$$

Для того щоб підняти цю елементарну частину мотузки до рівня столу, потрібно виконати роботу проти сили тяжіння, яка дорівнює

$$dA = dm \cdot g \cdot y = dy \frac{m}{l} g \cdot y. \quad (2)$$

Коли ж ця частина мотузки рухається вздовж столу, то робота з такого переміщення дорівнює нулю (сила тяжіння роботи не

виконує тому, що вектори переміщення та сили тяжіння взаємно перпендикулярні; сила тертя за умовою задачі відсутня).

Для обчислення роботи, яку потрібно виконати щоб витягти звисаючу частину мотузки на стіл, необхідно провести підсумовування усіх елементарних робіт dA для звисаючих частинок мотузки. Тобто для тих, у яких висота y змінюється від 0 до ηl (рис. 3.3). Таким чином,

$$A = \int_0^{\eta l} \frac{m}{l} g \cdot y \cdot dy = \frac{mg}{2l} y^2 \Big|_0^{\eta l} = mg\eta^2 l / 2. \quad (3)$$

Таким чином, отримали формулу (3), яка є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (3) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[A] = \text{Дж}$. З іншого боку,

$$[mg\eta^2 l / 2] = \text{кг} \cdot (\text{м/с}^2) \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Тобто $\text{Дж} = \text{Дж}$. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$A = 1 \cdot 9,81 \cdot 0,2^2 \cdot 1 / 2 \approx 0,20 \text{ Дж}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли мотузка не звисає зі столу, тобто $\eta = 0$. Зрозуміло, що тоді робота, яку потрібно витратити, щоб витягти мотузку, дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\eta = 0$, то $A = mg\eta^2 l / 2 = mg \cdot 0^2 \cdot l / 2 = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $A = mg\eta^2 l / 2 = 0,2 \text{ Дж}$.

Приклад 3.7

Гумовий шнур, довжина якого l й жорсткість k , підвішений одним кінцем до точки O (див. рис. 3.4). На іншому кінці є упор. Із точки O починає падати невелика муфта масою m . Нехтуючи масами шнура та упора, а також силами тертя, знайти максимальне розтягнення шнура.

Розв'язання

$\frac{\Delta l_{\max} - ?}{l, m}$	Для розв'язання задачі використаємо закон збереження повної механічної енергії. Муфта масою m рухається під дією сили тяжіння та сили пружності гумового шнура, які, як відомо, є консервативними. Цим силам відповідає загальна потенціальна енергія $E_p = k\Delta l^2 / 2 + mgy$, що є сумою потенціальних енергій сили тяжіння (Зі) та сили пружності (Зк). Через те що у системі діють лише консервативні сили, можемо стверджувати, що у цьому випадку виконується закон збереження повної механічної енергії
------------------------------------	--

$$E = \text{const} \quad \text{або} \quad E_0 = E_{k,0} + E_{p,0} = E_k + E_p = E. \quad (1)$$

Тут $E_{p,0}, E_{k,0}$ – потенціальна та кінетична енергії муфти в початковому стані, коли вона знаходиться біля точки O , який характеризується координатою $y_0 = 0$ (див. рис. 3.4), початковим розтягненням шнура, яке дорівнює нулю $\Delta l_0 = 0$ (в початковому стані шнур не розтягнуто), початковою швидкістю муфти, яка дорівнює нулю $v_0 = 0$ (в початковому стані муфта перебуває у стані спокою); E_p, E_k – потенціальна та кінетична енергія муфти в стані, який характеризується координатою y , видовженням гумового шнура Δl та швидкістю муфти v (рис. 3.5).

Зрозуміло, що в початковому стані

$$E_{k,0} = \frac{mv_0^2}{2} = 0, \quad E_{p,0} = \frac{k\Delta l_0^2}{2} + mgy_0 = 0. \quad (2)$$

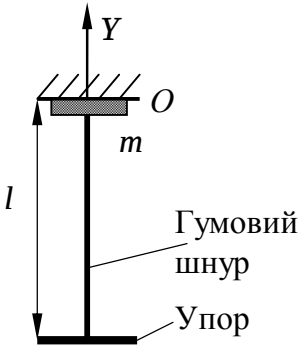


Рисунок 3.4

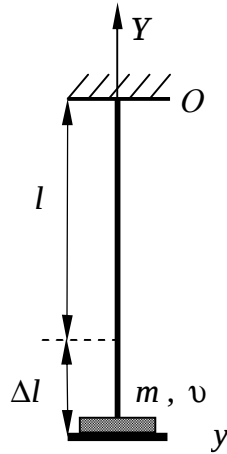


Рисунок 3.5

Для стану, що характеризується величинами v , Δl , y , можемо записати

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad E_p = \frac{k\Delta l^2}{2} + mgy = \frac{k\Delta l^2}{2} + mg(-l - \Delta l). \quad (3)$$

Тут використали, що координата y муфти у цьому стані дорівнює (рис. 3.4):

$$y = -l - \Delta l. \quad (4)$$

Знак « $\rightarrow$ » пов'язаний з вибором напрямку осі Y та положенням на цій осі точки, яку взято за нуль. Підставляємо формули (2) та (3) в (1) і отримуємо

$$0 = \frac{k\Delta l^2}{2} + mg(-l - \Delta l) + \frac{mv^2}{2}$$

або

$$\Delta l^2 \left(\frac{k}{2} \right) + \Delta l(-mg) + \left(\frac{mv^2}{2} - mgl \right) = 0. \quad (5)$$

Розв'язуємо квадратне рівняння (5) відносно невідомої величини Δl :

$$\Delta l_{1,2} = \frac{mg \mp \sqrt{(mg)^2 - 4 \cdot \frac{k}{2} \left(\frac{mv^2}{2} - mgl \right)}}{2 \cdot (k/2)}. \quad (6)$$

Знак « $\leftarrow$ » у формулі (6) відповідає стиснутому стану гумового шнура, знак « $\rightarrow$ » – видовженому. За умовою задачі ми повинні знайти максимальне видовження шнура. Тому в (6) вибираємо знак « $+$ ». Аналізуючи формулу (6), розуміємо, що чим більшою буде кінетична енергія муфти $mv^2/2$, тим меншою буде Δl . Максимальне розтягнення буде, коли $mv^2/2$ буде мінімальним, тобто дорівнюватиме нулю ($mv^2/2 = 0$). Тоді

$$\Delta l_{\max} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2kmg l}}{k} = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \right). \quad (7)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (7) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\Delta l_{\max}] = \text{м}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \right) \right] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2)}{\text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2)/\text{м}} = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса муфти прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді шнур не буде розтягуватися і $\Delta l_{\max} = 0$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли

$$m \rightarrow 0, \text{ то } \Delta l_{\max} = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \right) \approx \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{\frac{2kl}{mg}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{mg}{k} \left(\sqrt{\frac{2kl}{mg}} \right) \approx \left(\sqrt{\frac{mg2l}{k}} \right) = 0. \text{ Тут взяли до уваги, що за умови}$$

$$m \rightarrow 0 \quad \frac{2kl}{mg} \gg 1.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta l_{\max} = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \right).$

Приклад 3.8

Частинки масами $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг мають відповідно швидкості $\vec{v}_1 = 5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ і $\vec{v}_2 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$. Визначити швидкості частинок після їх непружного зіткнення, а також втрати механічної енергії у процесі зіткнення.

Розв'язання

$\vec{u}_1 - ?$	Використаємо закон збереження імпульсу для знаходження швидкостей частинок після зіткнення. Втрати механічної енергії у процесі зіткнення визначимо як різницю повної енергії до зіткнення E_1 та після зіткнення E_2 :
$\vec{u}_2 - ?$	
$\Delta E - ?$	
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг,	
$\vec{v}_1 = 5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z,$	
$\vec{v}_2 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$	$\Delta E = E_1 - E_2.$ (1)

Як відомо, після абсолютно непружного удару частинки рухаються як одне ціле, їх швидкості стають однаковими. Позначимо їх через $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}. \quad (2)$$

Із закону збереження імпульсу випливає, що

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (3)$$

Підставимо в (3) співвідношення (2) і отримаємо швидкості частинок після непружного удару

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) / (m_1 + m_2). \quad (4)$$

Підставляючи в (4) значення швидкостей та мас з умови задачі, отримаємо

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z. \quad (5)$$

Потенціальні енергії частинок, про які іде мова в умові задачі дорівнюють нулю. Тому повну енергію частинок визначають їх кінетичні енергії. Отже,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \\ E_2 &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляємо (6) в (1) і отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_2 m_1 \vec{v}_2 \vec{v}_1 + m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_2 \vec{v}_1) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи в (7) значення швидкостей та мас з умови задачі, отримаємо

$$\Delta E = 10 \text{ Дж}. \quad (8)$$

Таким чином, отримали формули (4) та (7), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (4), (7) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\vec{u}] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$[(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)/(m_1 + m_2)] = \text{кг} \cdot \text{м/с/кг} = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\Delta E] = \text{Дж}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{кг}}{\text{кг}} \cdot (\text{м/с})^2 = \text{Дж}.$$

Тобто $\text{Дж} = \text{Дж}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкості частинок у вихідному стані однакові ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2$). Зрозуміло, що тоді взаємодія між частинками буде відсутньою, і у кінцевому стані їх швидкості не зміняться. Також зрозуміло, що втрати механічної енергії будуть відсутніми, тобто дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, то $\vec{u} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)/(m_1 + m_2) = \vec{v}_1(m_1 + m_2)/(m_1 + m_2) = \vec{v}_1 = \vec{v}_2$,

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot 0 = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\vec{u} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)/(m_1 + m_2) = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$,

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = 10 \text{ Дж}.$$

Приклад 3.9

Тіло масою m кинуто з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти залежність від часу моменту сили тяжіння і моменту імпульсу тіла відносно точки кидання.

Розв'язання

$M - ?$	Для розв'язання задачі використаємо визначення моменту сили тяжіння і моменту імпульсу тіла та формули, які описують рівноприскорений рух тіла (1ж).
$L - ?$	
$m,$	
$v_0,$	
α	Згідно з визначенням моменту сили тяжіння та моменту імпульсу тіла (3л) дорівнюють

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad \vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}], \quad (1)$$

де $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ – радіус-вектор, проведений від точки кидання до тіла (рис. 3.6); $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$ – швидкість тіла; $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$. Вважаємо, що тіло рухається в площині XY і тому $z = 0$, $v_z = 0$. Підставимо ці формули в (1) і отримаємо

$$\vec{M} = -x \cdot mg \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{L} = m(x \cdot v_y - y \cdot v_x)\vec{e}_z. \quad (2)$$

У співвідношенні (2) використали, що $[\vec{e}_x \times \vec{e}_y] = \vec{e}_z$, $[\vec{e}_x \times \vec{e}_x] = 0$, $[\vec{e}_y \times \vec{e}_y] = 0$.

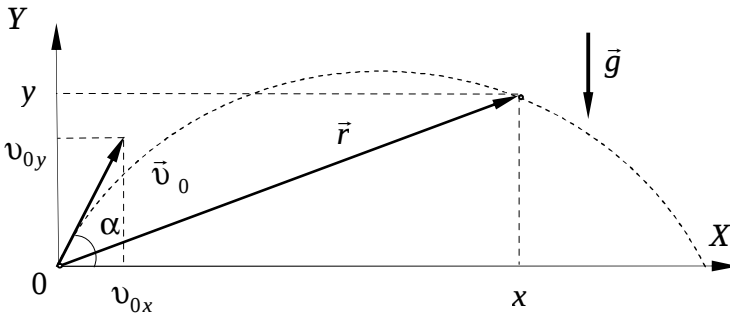


Рисунок 3.6

Відомо, що під дією сили тяжіння тіло рухається рівноприскорено зі сталим прискоренням $\vec{a} = -g\vec{e}_y$. Тому, використовуючи формули рівноприскореного руху (1ж), можемо записати (рис. 3.6):

$$v_x = v_{0x} + a_x t = v_0 \cos \alpha + 0, \quad v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + a_x t^2 / 2 = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + a_y t^2 / 2 = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2 / 2. \quad (3)$$

У (3) взяли до уваги, що $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a_x = 0$, $a_y = -g$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ (див. рис. 3.6). Далі підставляємо (3) в (2) і знаходимо шукані залежності

$$\vec{M} = -v_0 \cos \alpha \cdot mg \cdot t \cdot \vec{e}_z, \quad (4)$$

$$\vec{L} = -(mg \cdot v_0 \cos \alpha \cdot t^2 / 2) \vec{e}_z. \quad (5)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (4) та (5) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[M] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$.

З іншого боку,

$$[-v_0 \cos \alpha \cdot mg \cdot t] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2.$$

Тобто $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[L] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с} \cdot \text{м}$.

З іншого боку,

$$[-(mg \cdot v_0 \cos \alpha \cdot t^2 / 2)] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}.$$

Тобто $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$. Таким чином, розрахункова формула (5) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли час польоту тіла дорівнює нулю ($t = 0$). Зрозуміло, що за такий час тіло відносно точки кидання пройде нульову відстань. Тобто радіус-вектор тіла відносно точки кидання буде дорівнювати нулю. Це означає, що і момент сили, і момент імпульсу відносно точки кидання будуть

дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $t = 0$, то

$$\vec{M} = -v_0 \cos \alpha \cdot mg \cdot t \cdot \vec{e}_z = -v_0 \cos \alpha \cdot mg \cdot 0 \cdot \vec{e}_z = 0,$$

$$\vec{L} = -(mg \cdot v_0 \cos \alpha \cdot t^2 / 2) \vec{e}_z = -(mg \cdot v_0 \cos \alpha \cdot 0^2 / 2) \vec{e}_z = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\vec{M} = -v_0 \cos \alpha \cdot mg \cdot t \cdot \vec{e}_z$, $\vec{L} = -(mg \cdot v_0 \cos \alpha \cdot t^2 / 2) \vec{e}_z$.

Приклад 3.10

Описати рух космонавта у стані невагомості в космічному кораблі після того, як він ногою надасть швидкість м'ячу у напрямі, перпендикулярному до осі свого тіла. Маса космонавта $m_1 = 80$ кг, зріст – $l = 1,8$ м, маса м'яча – $m_2 = 400$ г, його швидкість відносно космічного корабля – $u_2 = 10$ м/с.

Розв'язання

$u_C - ?$	З фізичних міркувань зрозуміло, що космонавт після удару буде рухатися протилежно до швидкості м'яча та одночасно буде обертатися (рис. 3.7). Швидкості різних точок космонавта будуть різними. Швидкість довільної точки космонавта після удару можна подати як суперпозицію поступального руху зі швидкістю центра мас $\vec{u}_C$ та обертального руху відносно центра мас C з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Використовуючи зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями, можемо записати швидкість довільної точки космонавта у вигляді
$\omega - ?$	
$l = 1,8$ м,	
$m_1 = 80$ кг,	
$m_2 = 400$ г	
,	
$u_2 = 10$ м/с	

$$\vec{u} = \vec{u}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad (1)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, який з'єднує центр мас C з довільною точкою космонавта (рис. 3.7). Таким чином, для опису руху космонавта після удару достатньо знайти швидкість центра мас $\vec{u}_C$ та кутову швидкість обертання $\vec{\omega}$. Ці величини і будемо

шукати в задачі. Для розв'язання задачі використаємо закон збереження імпульсу та закон збереження моменту імпульсу.

Згідно з законом збереження повний імпульс системи, яка складається з космонавта та м'яча, до удару та після удару не змінюється. Через те що до удару і м'яч, і космонавт перебували у стані спокою, тобто повний імпульс системи дорівнював нулю, можемо записати

$$m_1 \vec{u}_C + m_2 \vec{u}_2 = 0. \quad (1)$$

У співвідношенні (1) враховано, що повний імпульс космонавта (різні точки космонавта рухаються з різною швидкістю) дорівнює добутку маси космонавта на швидкість центра мас. Звідси легко знайти, що швидкість центра мас космонавта після удару дорівнює

$$\vec{u}_C = -(m_2 / m_1) \vec{u}_2. \quad (2)$$

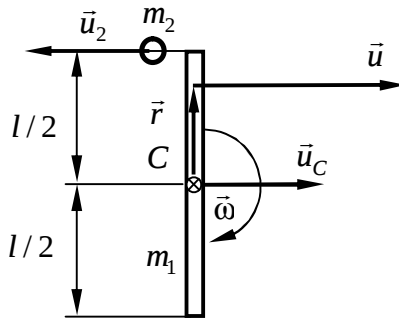


Рисунок 3.7

Для визначення кутової швидкості обертання космонавта використаємо закон збереження моменту імпульсу. Через те що до удару і космонавт, і м'яч перебували у стані спокою, повний момент імпульсу системи до удару дорівнював нулю. Тому можемо записати

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 0, \quad (3)$$

де $\vec{L}_1$ та $\vec{L}_2$ є моментами імпульсу космонавта та м'яча відносно центра мас C після удару. М'яч вважаємо матеріальною

точкою, його момент імпульсу обчислимо, виходячи з визначення

$$|\vec{L}_2| = m_2 u_2 l / 2. \quad (4)$$

У формулі (4) використали, що відстань до лінії, вздовж якої проходить вектор швидкості м'яча, дорівнює $l / 2$ (рис. 3.7).

Визначимо момент імпульсу космонавта відносно точки C , яку займав центр мас у момент удару (рис. 3.7). Розглядаємо космонавта як однорідний стрижень. Подамо такий стрижень як сукупність матеріальних точок довжиною dr , швидкість $\vec{u}$ яких визначається співвідношенням (1), положення відносно центра мас C – вектором $\vec{r}$. Елементарний момент імпульсу такої частини стрижня дорівнює

$$\begin{aligned} d\vec{L}_1 &= [\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}] = [\vec{r} \times dm \cdot (\vec{u}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}])] = \\ &= [\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}_C] + [\vec{r} \times dm \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \end{aligned} \quad (5)$$

Загальний момент імпульсу космонавта визначимо проінтегрувавши (5):

$$\vec{L}_1 = \int [\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}_C] + \int [\vec{r} \times dm \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \quad (6)$$

Розглянемо перший доданок у (6):

$$\int [\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}_C] = \int [\vec{r} dm \times \vec{u}_C] = [m_1 \vec{r}_C \times \vec{u}_C] = 0. \quad (7)$$

Тут враховано, що згідно з визначенням центра мас $\vec{r}_C = \int \vec{r} dm / m_1$, а також, що вектор $\vec{r}_C$, який проведено від точки C (усі вектори $\vec{r}$ починаються з точки C) і закінчується в точці C , дорівнює нулю.

Розглянемо другий доданок у (6):

$$\int [\vec{r} \times dm \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \int [\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] dm = \int (\vec{\omega}(\vec{r}^2) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) dm = \vec{\omega} \int r^2 dm. \quad (8)$$

У цьому співвідношенні використали відому властивість для подвійного векторного добутку $[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, й

те, що вектори $\vec{r}$ та $\vec{\omega}$ є взаємно перпендикулярними (рис. 3.7). Маса частини однорідного стрижня довжиною dr дорівнює

$$dm = dr \cdot m_1 / l. \quad (9)$$

Підставляємо (7)-(9) в (6) і отримуємо

$$\vec{L}_1 = \vec{\omega} \int r^2 dm = \vec{\omega} (m_1 / l) \int r^2 dr = 2 \vec{\omega} (m_1 / l) \int_0^{l/2} r^2 dr = \vec{\omega} \cdot m_1 l^2 / 12. \quad (10)$$

Тут враховано, що довжина вектора $\vec{r}$ змінюється від 0 до $l/2$ (рис. 3.7) для двох частин стрижня. Далі підставляємо (10) та (4) в (3) і знаходимо

$$m_2 u_2 (l/2) - \omega \cdot (m_1 l^2 / 12) = 0$$

або

$$\omega = \frac{6 m_2 u_2}{m_1 l}. \quad (11)$$

Таким чином, отримали формули (2) та (11), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (2) та (11) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві й ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[u_C] = \text{м/с}$.

З іншого боку, $[-(m_2 / m_1)u] = \text{м/с}$.

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (2) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\omega] = 1/\text{с}$.

З іншого боку, $[6 m_2 u_2 / (m_1 l)] = 1/\text{с}$.

Тобто $1/\text{с} = 1/\text{с}$. Таким чином, розрахункова формула (11) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункові формули (2) та (11), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$u_C = (m_2 / m_1) u_2 = (0,4/80) \cdot 10 \text{ м/с} = 0,05 \text{ м/с}.$$

$$\omega = 6m_2u_2 / (m_1l) = 6 \cdot 0,4 \cdot 10 / (80 \cdot 1,8) = 0,17 \text{ c}^{-1}.$$

З Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса м'яча дорівнює нулю ($m_2 = 0$). Зрозуміло, що тоді дія на космонавта з боку такого м'яча буде відсутньою, космонавт свій стан не змінить ($u_C = 0$, $\omega = 0$). З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $m_2 = 0$, то $\vec{u}_C = -(m_2 / m_1)\vec{u}_2 = -(0 / m_1)\vec{u}_2 = 0$, $\omega = 6m_2u_2 / (m_1l) = 6 \cdot 0 \cdot m_2u_2 / (m_1l) = 0$.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $u_C = (m_2 / m_1)u_2 = 0,05 \text{ м/с}$,

$$\omega = 6m_2u_2 / (m_1l) = 0,17 \text{ c}^{-1}.$$

3.2 Задачі для самостійного розв'язання

3.1 Куля масою $m_1 = 10 \text{ кг}$, що рухається зі швидкістю $v_1 = 4 \text{ м/с}$, зіштовхується з кулею масою $m_2 = 4 \text{ кг}$, швидкість v_2 якої дорівнює 12 м/с . Вважаючи удар прямим, непружним, знайти швидкості куль після удару у двох випадках: 1) мала куля наганяє велику кулю, що рухається в тому самому напрямку; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

3.2 У човні масою $m_1 = 240 \text{ кг}$ стоїть людина масою $m_2 = 60 \text{ кг}$. Човен пливе зі швидкістю $v_1 = 2 \text{ м/с}$. Людина стрибає із човна в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v = 4 \text{ м/с}$ (відносно човна). Знайти швидкості руху човна й людини після стрибка у двох випадках: 1) людина стрибає вздовж напрямку руху човна й 2) протилежно до напрямку руху човна.

3.3 На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15 \text{ т}$. Гармата стріляє вгору під кутом $\phi = 60^\circ$ до горизонту в напрямку залізничної колії. З якою

швидкістю v_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m=20$ кг, а його швидкість $v_2=600$ м/с?

3.4 Снаряд масою $m=10$ кг мав швидкість $v=200$ м/с у верхній точці траєкторії. У цій точці він розірвався на дві частини. Менша частина масою $m_1=3$ кг одержала швидкість $u_1=400$ м/с у попередньому напрямку. Знайти швидкість u_2 другої, більшої частини після розриву.

3.5 Два ковзанярі масами $m_1=80$ кг і $m_2=50$ кг, тримаючись за кінці довгого натягнутого шнура, нерухомо стоять на льоді один проти іншого. Один з них починає укорочувати шнур, вибираючи його зі швидкістю $v=1$ м/с. З якими швидкостями u_1 й u_2 будуть рухатися по льоду ковзанярі? Тертям знехтувати.

3.6 Під дією сталої сили F вагонетка пройшла шлях $s=5$ м і отримала швидкість $v=2$ м/с. Визначити роботу A сили, якщо маса вагонетки дорівнює 400 кг і коефіцієнт тертя $\mu=0,01$.

3.7 Знайти роботу A підйому вантажу по похилій площині довжиною $l=2$ м, якщо маса вантажу дорівнює 100 кг, кут нахилу $\varphi=30^\circ$, коефіцієнт тертя $\mu=0,1$ й вантаж рухається із прискоренням $a=1$ м/с².

3.8 Під дією сталої сили $F=400$ Н, спрямованої вертикально вгору, вантаж масою 20 кг був піднятий на висоту 15 м. Яку потенціальну енергію E_p буде мати піднятий вантаж? Яку роботу A виконає сила F ?

3.9 Камінь кинутий вгору під кутом $\varphi=60^\circ$ до площини горизонту. Кінетична енергія T_0 каменя в початковий момент часу дорівнює 20 Дж. Визначити кінетичну T й потенціальну E_p енергії каменя у вищій точці його траєкторії. Опором повітря знехтувати.

3.10 Вертоліт масою 3 т висить у повітрі. Визначити потужність P , що розвивається двигуном у цьому положенні, при двох значеннях діаметра d гвинтів: 1) 18 м; 2) 8 м. Під час розрахунку взяти до відома, що гвинти вертольота відкидають

вниз циліндричний струмінь повітря діаметром, що дорівнює діаметру гвинтів.

3.11 Матеріальна точка масою $m=2$ кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі X відповідно до рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с², $D = -0,2$ м/с³. Знайти потужність P , що розвивається силою у момент часу $t_1=2$ с і $t_2=5$ с.

3.12 Мотоцикліст їде по горизонтальній дорозі. Яку найменшу швидкість v він повинен розвинути, щоб, виключивши мотор, проїхати по треку, що має форму «мертвої петлі» радіусом $R=4$ м? Тертям і опором повітря знехтувати.

3.13 Під час пострілу зі зброї снаряд масою $m_1=10$ кг одержує кінетичну енергію $T_1=1,8$ МДж. Визначити кінетичну енергію T_2 ствола зброї внаслідок віддачі, якщо маса m_2 ствола зброї дорівнює 600 кг.

3.14 Ядро атома розпадається на два осколки масами $m_1 = 1,6 \cdot 10^{-25}$ кг і $m_2 = 2,4 \cdot 10^{-25}$ кг. Визначити кінетичну енергію T_2 другого осколка, якщо енергія T_1 першого осколка дорівнює 18 нДж.

3.15 Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув уперед гирю масою $m_1=5$ кг і внаслідок віддачі покотився назад зі швидкістю $v_2=1$ м/с. Маса ковзаняра $m_2=60$ кг. Визначити роботу A , виконану ковзанярем при киданні гири.

3.16 Куля масою $m=10$ г, що летіла зі швидкістю $v=600$ м/с, потрапила в балістичний маятник масою $M=5$ кг і застрягла в ньому (рис. 3.8). На яку висоту h , відхилившись після удару, піднявся маятник?

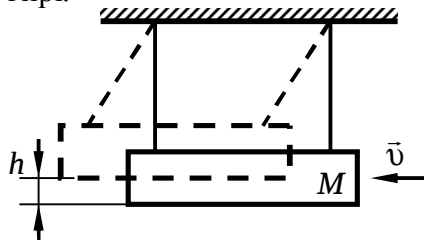


Рисунок 3.8

3.17 У балістичний маятник масою $M=5$ кг потрапила куля масою $m=10$ г і застрягла в ньому (рис. 3.8). Знайти швидкість

у кулі, якщо маятник, відхилившись після удару, піднявся на висоту $h=10$ см.

3.18 Два вантажі масами $m_1=10$ кг і $m_2=15$ кг підвішені на нитках довжиною $l=2$ м так, що вантажі торкаються один одного. Менший вантаж відхиляють на кут $\varphi=60^\circ$ і відпускають. Визначити висоту h , на яку піднімуться обидва вантажі після удару. Удар вважати непружним.

3.19 Дві кулі масами $m_1=2$ кг і $m_2=3$ кг рухаються зі швидкостями відповідно $v_1=8$ м/с і $v_2=4$ м/с. Визначити збільшення ΔU внутрішньої енергії куль при їх непружному зіткненні у двох випадках: 1) менша куля наганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

3.20 Куля масою m_1 летить зі швидкістю $v_1=5$ м/с і вдаряє нерухому кулю масою m_2 . Удар прямий, непружний. Визначити швидкість куль після удару, а також частку ω кінетичної енергії кулі, що летить, витраченої на збільшення внутрішньої енергії цих куль. Розглянути два випадки: 1) $m_1=2$ кг, $m_2=8$ кг; 2) $m_1=8$ кг, $m_2=2$ кг.

3.21 Куля масою $m_1=2$ кг налітає на нерухому кулю масою $m_2=8$ кг. Імпульс p_1 кулі, що рухається, дорівнює 10 кг·м/с. Удар куль прямий, пружний. Визначити безпосередньо після удару: 1) імпульси p'_1 першої кулі й p'_2 другої кулі; 2) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; 3) кінетичні енергії T_1' першої кулі й T_2' другої кулі; 4) зміну ΔT_1 кінетичної енергії першої кулі; 5) частку ω кінетичної енергії, переданої першою кулею другій.

3.22 Куля масою $m_1=6$ кг налітає на іншу нерухому кулю масою $m_2=4$ кг. Імпульс p_1 першої кулі дорівнює 5 кг·м/с. Удар куль прямий, непружний. Визначити безпосередньо після удару: 1) імпульси p'_1 першої кулі й p'_2 другої кулі; 2) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; 3) кінетичні енергії T_1' першої кулі й T_2' другої кулі; 4) зміну ΔT_1 кінетичної енергії першої кулі; 5) частку ω_1 кінетичної енергії, переданої першою кулею другій.

й частку ω_2 кінетичної енергії, що залишилася у першій кулі; 6) зміну ΔU внутрішньої енергії куль; 7) частку ω кінетичної енергії першої кулі, що перейшла у внутрішню енергію куль.

3.23 Молот масою $m_1=5$ кг ударяє невеликий шматок заліза, що лежить на ковадлі. Маса m_2 ковадла дорівнює 100 кг. Масою шматка заліза знехтувати. Удар непружний. Визначити ККД η удару молота за даних умов.

3.24 Бойок пальового молота масою $m_1=500$ кг падає з деякої висоти на палю масою $m_2=100$ кг. Знайти ККД η удару бойка, вважаючи удар непружним. Зміною потенціальної енергії палі при поглибленні її знехтувати.

3.25 Молотком, маса якого $m_1=1$ кг, забивають у стіну цвях масою $m_2=75$ г. Визначити ККД η удару молотка за даних умов.

3.26 На нерухому кулю налітає зі швидкістю $v_1=2$ м/с інша куля однакової з неї маси. У результаті зіткнення ця куля змінила напрямок руху на кут $\alpha=30^\circ$. Визначити: 1) швидкості u_1 й u_2 куль після удару; 2) кут β між вектором швидкості другої кулі й початковим напрямком руху першої кулі. Удар уважати пружним.

3.27 Частинка масою $m_1=10^{-24}$ г має кінетичну енергію $T_1=9$ нДж. У результаті пружного зіткнення зі нерухомою частинкою масою $m_2=4\cdot 10^{-24}$ г вона передає їй кінетичну енергію $T_2=5$ нДж. Визначити кут α , на який відхилиться частинка від свого первісного напрямку.

3.28 Тіло масою $m=100$ кг падає без початкової швидкості. Знайти роботу сили опору повітря, яке діятиме на нього перші 3 с та перші 30 с, беручи до уваги, що сила опору повітря пропорційна швидкості руху: $\vec{F} = -r\vec{v}$, де $r \approx 20$ кг/с.

3.29 Двигун гальмівної системи розвиває силу тяги, яка пропорційна часу: $F = -rt$, де r – стала. У момент вмикання

двигуна швидкість тіла дорівнювала v_0 . Визначити роботу двигуна за першу секунду гальмування. Маса тіла разом з двигуном m .

3.30 Яка робота A повинна бути виконана для підняття з землі матеріалів для побудови циліндричного димаря висотою $h=40$ м, зовнішнім діаметром $D=3$ м та внутрішнім діаметром $d=2$ м. Густина матеріалу взяти такою, що дорівнює $\rho=2,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

3.31 З нескінченності на поверхню Землі падає метеорит масою $m=30$ кг. Визначити роботу A , яка при цьому буде виконана силами гравітаційного поля Землі. Прискорення вільного падіння у поверхні Землі та її радіус вважати відомими.

3.32 Ланцюг довжиною $l=2$ м лежить на столі, одним кінцем звисаючи зі стола. Якщо довжина частини, що звисає, більша за $l/3$, то ланцюг починає ковзати зі столу. Визначити швидкість ланцюга у момент відриву від стола.

3.33 Визначити, яку швидкість має метеорит масою m на відстані r від Сонця, якщо він рухався без початкової швидкості з нескінченності до Сонця. Впливом інших тіл знехтувати.

3.34 Ланцюг масою $m=1,00$ кг та довжиною $l=1,40$ м висить на нитці, торкаючись поверхні стола своїм нижнім кінцем. Після перепалювання нитки ланцюг впав на стіл. Знайти повний імпульс, який він передав столу.

3.35 Два однакових візки рухаються один за одним за інерцією (без тертя) з однаковими швидкостями $\vec{v}_0$. На задньому візку знаходиться людина масою m . У деякий момент часу людина стрибнула у передній візок зі швидкістю $\vec{u}$ відносно свого візка. Маючи на увазі, що маса кожного візка дорівнює M , знайти швидкості, з якими будуть рухатися обидва візки після цього.

3.36 Кінетична енергія частинки, яка рухається по колу радіусом R , залежить від пройденого шляху s за законом $T = \alpha s^2$, де α – стала. Знайти модуль сили, яка діє на частинку залежно від s .

3.37 Частинка масою m рухається по колу радіусом R з нормальним прискоренням, яке змінюється з часом відповідно до закону $a_n = \alpha t^2$, де α – стала. Знайти залежність від часу потужності усіх сил, які діють на частинку, а також середнє значення цієї потужності за перші t секунд після початку руху.

3.38 Частинка масою $m = 4,0$ г рухається у двовимірному полі, де її потенціальна енергія $U = \alpha xy$, $\alpha = 0,19$ мДж/м². У точці 1 {3,0 м, 4,0 м} частинка мала швидкість $v_1 = 3,0$ м/с, а в точці 2 {5,0 м, -6,0 м} швидкість $v_2 = 4,0$ м/с. Знайти роботу сторонніх сил на шляху між точками 1 й 2.

3.39 Невелика шайба А зісковзує без початкової швидкості з вершини гладкої гірки висотою H , що має горизонтальний трамплін (див. рис. 3.9). Якою повинна бути висота h трампліна, щоб шайба пролетіла найбільшу відстань s ? Чому вона дорівнює?

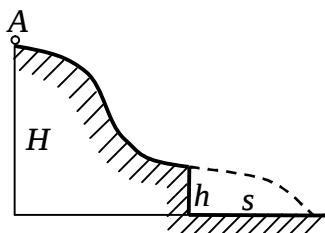


Рисунок 3.9

3.40 Невелика кулька масою $m = 50$ г прикріплена до кінця пружної нитки, коефіцієнт пружності якої $k = 63$ Н/м. Нитку з кулькою відвели у горизонтальне положення, не деформуючи нитку, й обережно відпустили. Коли нитка проходила вертикальне положення, її довжина виявилася $l = 1,5$ м й швидкість кульки $v = 3,0$ м/с. Знайти силу натягу нитки у цьому положенні.

3.41 Після пружного зіткнення частинки 1 з частинкою 2, яка перебувала у спокої, обидві частинки розлетілися симетрично відносно початкового напрямку руху частинки 1, й кут між їх напрямками розлітання $\theta = 60^\circ$. Знайти відношення мас цих частинок.

3.42 Камінь зісковзує з найвищої точки купола, що має форму півсфери. Яку дугу α по поверхні купола опише камінь, перш ніж відірветься від поверхні купола? Тертям знехтувати.

3.43 Кулька масою $m=60$ г , що прив'язана до кінця нитки довжиною $l_1=1,2$ м, обертається з частотою $n_1=2$ с⁻¹, спираючись на горизонтальну площину. Нитку вкорочують, наближуючи кульку до осі на відстань $l_2=0,6$ м. З якою частотою при цьому буде обертатися кулька? Яку роботу здійснює зовнішня сила, що вкорочує нитку? Тертям знехтувати.

3.44 На горизонтальному диску стоїть людина і тримає у витягнутих руках гирі масою $m=5$ кг кожна. Диск обертається з частотою $n_1=1$ с⁻¹ , відстань від кожної гирі до осі диска $l=70$ см. Як зміниться частота обертання і яку роботу виконає людина, якщо вона зігне руки таким чином, що відстань від кожної гирі до осі зменшиться до $l_2=20$ см? Момент інерції людини і диска (разом) відносно осі $I=2,5$ кг·м².

3.45 Маятник у вигляді однорідної кулі, що з'єднана з тонким невагомим стрижнем, довжина якого дорівнює радіусу кулі, може гойдатися навколо горизонтальної осі, що проходить через вільний кінець стрижня. Маса кулі $M=10$ кг, радіус $R=15$ см. У кулю нормально до її поверхні вдаряється інша куля масою $m=10$ г, що летіла горизонтально зі швидкістю $v=800$ м/с, і застрягає у ній. На який кут відхилиться маятник у результаті зіткнення.

3.46 Однорідний стрижень довжиною $l=1$ м може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через один із його кінців. Маса стрижня $M=0,7$ кг. У точку стрижня, яка віддалена від осі обертання на відстань $2l/3$, перпендикулярно до його осі абсолютно пружно вдаряється куля масою $m=5$ г. Визначити швидкість кулі, якщо в результат її удару стрижень відхилився на кут $\alpha=60^\circ$.

ТЕМА 4 ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Основні формули

Момент інерції матеріальної точки масою m відносно деякої осі

$$I = mr^2, \quad (4a)$$

де r – відстань від точки до осі.

Момент інерції твердого тіла відносно осі

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV, \quad (4б)$$

де ρ – густина тіла.

Моменти інерції:

- *суцільного однорідного циліндра (диска) масою m і радіусом R відносно осі циліндра (диска)*

$$I = mR^2 / 2; \quad (4в)$$

- *тонкостінного циліндра (тонкого кільця) масою m і радіусом R відносно осі, що збігається з віссю циліндра,*

$$I = mR^2; \quad (4г)$$

- *однорідного стрижня довжиною l і масою m відносно осі, що проходить через центр його мас перпендикулярно до осі стрижня,*

$$I = ml^2 / 12; \quad (4д)$$

- *однорідної кулі масою m і радіусом R відносно осі, що проходить через центр кулі,*

$$I = 2mR^2 / 5. \quad (4е)$$

Теорема Штейнера

$$I = I_C + ma^2, \quad (4ж)$$

де I_C – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас та є паралельною осі, відносно якої визначається момент інерції I ; a – відстань між осями.

Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі обертання Z

$$L_z = I\omega_z, \quad (43)$$

де I – момент інерції тіла відносно осі; ω_z – кутова швидкість.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі Z

$$I\beta_z = M_z, \quad (4i)$$

де $\beta_z = d\omega_z / dt$ – кутове прискорення; M_z – алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі Z .

Робота зовнішніх сил при повороті твердого тіла навколо нерухомої осі

$$A = \int M_z d\varphi. \quad (4к)$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі,

$$E_k = I\omega^2 / 2. \quad (4л)$$

Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі

$$E_k = I_C \omega^2 / 2 + m v_C^2 / 2, \quad (4м)$$

де v_C – швидкість центра мас твердого тіла.

4.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1

Знайти момент інерції тонкого дротяного кільця радіусом R і масою m відносно осі, що збігається з його діаметром.

Розв'язання

$I - ?$	Знайдемо момент інерції тонкого дротяного кільця відносно осі OO' (рис. 4.1), використовуючи визначення моменту інерції твердого тіла (4б)
$R,$	
m	

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

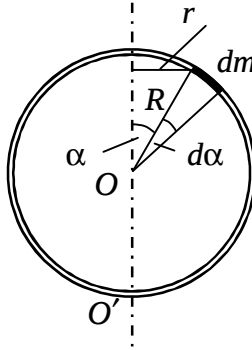


Рисунок 4.1

Розіб'ємо кільце на елементарні частинки, які характеризуються масою dm та кутом $d\alpha$ (рис. 4.1). Виходячи з того, що маса розподілена по кільцю рівномірно, маса dm , яка знаходиться на дузі, що опирається на кут $d\alpha$, дорівнює

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\alpha. \quad (2)$$

Як випливає з рис. 4.1, відстань від маси dm до осі обертання OO' визначається співвідношенням

$$r = R \sin \alpha, \quad (3)$$

де α – кут між віссю обертання та радіусом, що з'єднується з масою dm (рис. 4.1). Підставляємо (2) та (3) в (1), проводимо інтегрування по всіх елементарних частинках кільця та враховуємо, що при цьому кут α змінюється від 0 до 2π (рис. 4.1):

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{m(R \sin \alpha)^2}{2\pi} d\alpha = \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{mR^2}{2}. \quad (4)$$

Таким чином, отримали формулу (4), яка є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (4) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$. З іншого боку, $[mR^2 / 2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Тобто $\text{кг} \cdot \text{м}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Таким чином, розрахункова формула (5) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса кільця прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді і момент інерції кільця буде прямувати до нуля. З розрахункової формули випливає такий самий результат.

Коли $m \rightarrow 0$, то $I = \frac{mR^2}{2} \sim m \rightarrow 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $I = mR^2 / 2$.

Приклад 4.2

На однорідний суцільний циліндр масою M і радіусом R щільно намотана невагома нитка, до кінця якої прикріплений тягарець масою m (рис. 4.2). У момент $t=0$ система почала рухатися. Нехтуючи тертям в осі циліндра, знайти залежність від часу: а) модуля кутової швидкості циліндра; б) кінетичної енергії всієї системи.

Розв'язання

$\omega(t) - ?$	Під дією сили тяжіння тягарець масою m рухається вертикально вниз. Через нитку тягарець діє на циліндр масою M , це і викликає його обертання. Для того щоб описати вищезазначені процеси використаємо основне рівняння динаміки обертального руху (4і) та другий закон Ньютона.
$E_k(t) - ?$	
$M, R,$	
m	

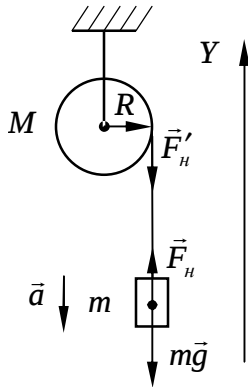


Рисунок 4.2

Як зазначалось вище, на тягарець діє сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}_n$, на однорідний суцільний циліндр – сила натягу нитки $\vec{F}'_n$ (рис. 4.2). Сили натягу нитки рівні за модулем та протилежні за напрямком:

$$\vec{F}_n = -\vec{F}'_n. \quad (1)$$

Запишемо другий закон Ньютона для проекцій векторів на вертикальну вісь Y для тягарця:

$$-ma = -mg + F_n. \quad (2)$$

У співвідношенні (2) враховано, що вектор прискорення $\vec{a}$ спрямований у протилежному напрямку до осі Y .

Момент сили, що діє на суцільний циліндр, визначається силою $\vec{F}'_n$ (її модуль дорівнює F_n , див. (1)) та плечем R , тобто він дорівнює $R \cdot F_n$. Тоді основне рівняння динаміки обертального руху для цього циліндра запишемо у вигляді

$$I \cdot \beta = R \cdot F_n, \quad (3)$$

де β – кутове прискорення; $I = MR^2 / 2$ – момент інерції циліндра.

Прискорення тягарця, прискорення нитки та прискорення точок, що лежать на поверхні циліндра, є однаковими за

модулем (розтягнення нитки відсутнє, проковзування нитки відносно циліндричної поверхні відсутнє). Тому використаємо зв'язок між лінійним та кутовим прискоренням

$$a = R\beta. \quad (4)$$

Система рівнянь (2)-(4) з урахуванням, що момент інерції циліндра дорівнює $I = MR^2 / 2$, дозволяє знайти лінійне та кутове прискорення

$$a = \frac{mg}{m + M / 2}, \quad \beta = \frac{mg}{(m + M / 2)R}. \quad (5)$$

Враховуючи, що прискорення є сталими у часі (див. формули (5)), тобто рух тіл у системі є рівноприскореним, можемо записати для лінійної та кутової швидкості співвідношення

$$v = at = \frac{mgt}{m + M / 2}, \quad \omega = \beta t = \frac{mgt}{(m + M / 2)R}. \quad (6)$$

У формулах (6) враховано, що початкові швидкості дорівнювали нулю.

Кінетичну енергію системи знаходимо як суму енергій циліндра та тягарця

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (7)$$

Підставляємо у цю формулу (6), враховуємо, що $I = MR^2 / 2$, і одержимо

$$E_k = \frac{(mgt)^2}{2(m + M / 2)}. \quad (8)$$

Таким чином, отримали формули (6) та (8), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (6) та (8) правильні одиниці вимірювання шуканих фізичних величин. Для цього в праві та ліві частини формул замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\omega] = c^{-1}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{mgt}{(m + M/2)R} \right] = \frac{\text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = c^{-1}.$$

Тобто $c^{-1} = c^{-1}$. Таким чином, розрахункова формула (6) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[E_k] = \text{Дж}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{(mgt)^2}{2(m + M/2)} \right] = \frac{(\text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{с})^2}{\text{кг}} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}.$$

Тобто Дж = Дж. Таким чином, розрахункова формула (8) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса тягарця дорівнює нулю. Зрозуміло, що тоді і сила тяжіння, яка діє на тягарець, також дорівнює нулю. Це означає, що тягарець та циліндр рухатись не будуть. Тобто кутова швидкість обертання та кінетична енергія системи будуть дорівнювати нулю. З розрахункових формул (6) та (8) впливає такий самий результат. Коли $m = 0$, то

$$\omega = \frac{mgt}{(m + M/2)R} = \frac{0}{(0 + M/2)R} = 0,$$

$$E_k = \frac{(mgt)^2}{2(m + M/2)} = \frac{0}{2(0 + M/2)} = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $\omega = mgt/(R(m + M/2))$; б) $E_k = (mgt)^2/(2m + M)$.

Приклад 4.3

Людина масою m_1 стоїть на краю горизонтального однорідного диска масою m_2 , який може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр. У деякий момент людина почала рухатися по краю диска,

перемістилась на кут ϕ' відносно диска і зупинилась. Нехтуючи розмірами людини, знайти кут ϕ , на який повернувся диск на момент зупинки людини.

Розв'язання

$\phi - ?$	Для розв'язання задачі використаємо закон
$m_1,$	збереження моменту імпульсу (Зм) та закон
$m_2,$	додавання швидкостей у ньютонівській механіці (1i).
ϕ'	Вважаємо, що людина перед початком руху знаходилась у точці А (рис. 4.3). Коли вона почне рухатися по краю диска зі швидкістю v_1 відносно землі, до і диск почне обертатися. Швидкість обертання краю диска відносно землі у точці, де знаходиться людина, буде дорівнювати v_d . Позначимо через v'_1 швидкість людини відносно диска (рухомої системи відліку). Тоді згідно із законом додавання швидкостей можемо записати

$$v_1 = v'_1 - v_d. \quad (1)$$

У співвідношенні (1) враховано, що напрямок вектора швидкості $\vec{v}_d$ є протилежним до напрямків швидкостей $\vec{v}_1$ та $\vec{v}'_1$ (див. рис. 4.3).

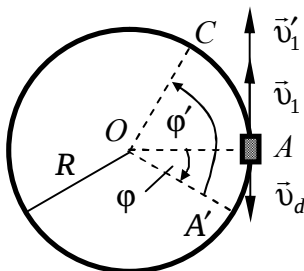


Рисунок 4.3

Через деякий час t людина зупиниться і опиниться у точці С (рис. 4.3). Диск також зупиниться і точка А диска перейде в точку А'. Кут, який відповідає переміщенню людини відносно диска, дорівнює $\phi' = \angle A'OC$, а кут, на який за цей час

повернеться диск, – $\varphi = \angle A'OA$. Ці кути пов'язані з швидкостями таким чином:

$$\varphi' = v_1' t / R, \quad \varphi = v_d t / R, \quad (2)$$

де R – радіус диска.

Результуючий зовнішній момент сил, який діє на систему, що складається з людини та диска, дорівнює нулю. Тому згідно із законом збереження моменту імпульсу можемо записати

$$m_1 v_1 R - I \cdot \omega = 0, \quad (3)$$

де $I = m_2 R^2 / 2$ – момент інерції диска, $\omega = v_d / R$ – кутова швидкість диска. Використовуючи ці формули, рівняння (3) перетворимо до вигляду

$$m_1 v_1 - m_2 \cdot v_d / 2 = 0. \quad (4)$$

З рівнянь (1) та (4) виключимо v_1 і отримаємо

$$v_1' = v_d (1 + m_2 / (2m_1)). \quad (5)$$

Тоді зі співвідношень (2) та (5) знаходимо

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{v_d}{v_1'} = \frac{1}{1 + m_2 / (2m_1)}$$

або

$$\varphi = \frac{\varphi'}{1 + m_2 / (2m_1)}. \quad (6)$$

Таким чином, отримали співвідношення (6), яке є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (6) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\varphi] = \text{рад}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{\phi'}{1 + m_2 / (2m_1)} \right] = \text{рад.}$$

Тобто рад = рад. Таким чином, розрахункова формула (6) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса диска прямує до нескінченності $m_2 \rightarrow \infty$. Зрозуміло, що в цьому випадку диск рухатись не буде і кут, на який повернеться диск, буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $m_2 \rightarrow \infty$, то $\phi = \frac{\phi'}{1 + m_2 / (2m_1)} \rightarrow \frac{\phi'}{1 + \infty} = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\phi = \phi' / (1 + m_2 / (2m_1))$.

Приклад 4.4

Однорідна куля масою $m = 5,0$ кг скачується без ковзання по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі через $t = 1,6$ с після початку руху.

Розв'язання

$E_k - ?$	Під час руху кулі сила тертя спокою роботи не виконує, повна механічна енергія кулі залишається сталою. Тому для розв'язання задачі використаємо закон збереження повної механічної енергії.
$m = 5,0$ кг	
$\alpha = 30^\circ$,	
$t = 1,6$ с	

У початковий момент у точці A (рис. 4.4) кінетична енергія кулі дорівнювала нулю, а потенціальна mgh . У кінцевому стані у точці B потенціальна енергія стає такою, що дорівнює нулю, натомість з'являється кінетична енергія

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}, \quad (1)$$

де v_C – швидкість центра мас кулі у точці B ; I_C – момент інерції кулі відносно центра мас; ω – кутова швидкість обертання у точці B . Через те що ковзання відсутнє, v_C та ω пов'язані співвідношенням $v_C = \omega R$, де R є радіусом кулі. Підставимо у вираз для кінетичної енергії $\omega = v_C / R$ та $I_C = (2/5)mR^2$ (момент інерції кулі) та одержимо

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{5} = \frac{7mv_C^2}{10}. \quad (2)$$

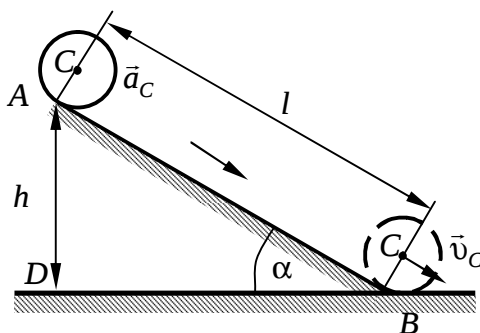


Рисунок 4.4

Відповідно до закону збереження повної механічної енергії повна енергія на початку (точка A) і кінці (точка B) скочування кулі повинна бути однаковою:

$$E_k = \frac{7mv_C^2}{10} = mgh. \quad (3)$$

Куля скочується з похилої площини рівноприскорено. Позначимо через a_C прискорення центра мас кулі. Тоді швидкість v_C , якої набуває куля у точці B та відстань l , яку пройде куля від початкового (точка A) до кінцевого (точка B) положень, будуть дорівнювати

$$v_C = a_C t, \quad l = a_C t^2 / 2. \quad (4)$$

Також з рисунка 4.4 випливає, що $l = h / \sin \alpha$. Підставляємо це співвідношення в (4) і отримуємо

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a_C t^2}{2} \Rightarrow a_C = \frac{2h}{t^2 \sin \alpha} \Rightarrow v_C = a_C t = \frac{2h}{t \sin \alpha}. \quad (5)$$

Підставляємо одержаний вираз для v_C в (3) і знаходимо рівняння для визначення h , а отже, і шуканої кінетичної енергії:

$$\frac{7m}{10} \left(\frac{2h}{t \sin \alpha} \right)^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{5}{14} g (t \sin \alpha)^2 \Rightarrow$$

$$E_k = mgh = \frac{5m}{14} (gt \sin \alpha)^2. \quad (6)$$

Таким чином, отримали співвідношення (6), яке є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (6) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[E_k] = \text{Дж}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{5m}{14} (gt \sin \alpha)^2 \right] = \text{кг} \cdot ((\text{м} / \text{с}^2) \cdot \text{с})^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{Дж}.$$

Тобто Дж = Дж. Таким чином, розрахункова формула (6) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$E_k = \frac{5 \cdot 5,0}{14} (9,81 \cdot 1,6 \cdot \sin 30^\circ)^2 \approx 110 \text{ Дж}.$$

$$A = 1 \cdot 9,81 \cdot 0,2^2 \cdot 1/2 \approx 0,20 \text{ Дж}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли кут нахилу похилої площини дорівнює нулю $\alpha = 0$. Зрозуміло, що тоді куля рухатись не буде,

і її кінетична енергія дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\alpha = 0$, то

$$E_k = \frac{5m}{14}(gt \sin \alpha)^2 = \frac{5m}{14}(gt \sin 0)^2 = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $E_k = (5m/14) \cdot (gt \sin \alpha)^2 = 110$ Дж.

Приклад 4.5

На який кут потрібно відхилити однорідний стрижень довжиною $l=1$ м, підвішений за верхній кінець, щоб його нижній кінець при проходженні положення рівноваги мав швидкість $v=4$ м/с.

Розв'язання

$\alpha - ?$	Для розв'язання задачі використаємо закон збереження повної механічної енергії.
$l = 1$ м,	У вихідному стані кінетична енергія стрижня дорівнює нулю, а потенціальна енергія визначається положенням центра мас C стрижня (рис. 4.4):
$v = 4$ м/с	

$$E_{p1} = mgh, \quad (1)$$

де m – маса стрижня; h – висота точки C відносно точки C' (центр мас стрижня в момент проходження положення рівноваги). Висоту h знайдемо як різницю довжин $h = |OC'| - |OK|$ (рис. 4.4, $|OK|$ визначимо з прямокутного трикутника ΔKOC):

$$h = (l/2)(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Підставимо отриману формулу в (1) і знайдемо

$$E_{p1} = mgl(1 - \cos \alpha)/2. \quad (3)$$

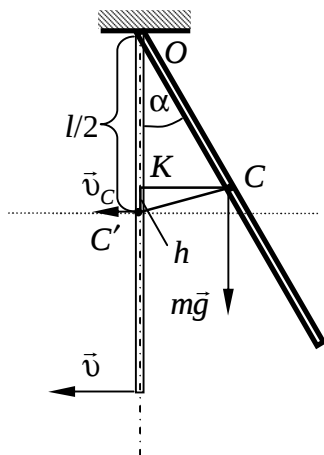


Рисунок 4.5

У кінцевому стані потенціальна енергія дорівнює нулю, а кінетична енергія стрижня визначається співвідношенням

$$E_{k2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}, \quad (4)$$

де ω та v_C – кутова швидкість та швидкість центра мас стрижня в момент проходження положення рівноваги; I_C – момент інерції стрижня відносно центра мас. Точка O є нерухомою. Тому швидкості ω , v_C та v (швидкість нижнього кінця стрижня при проходженні положення рівноваги) пов'язані між собою співвідношеннями

$$v_C = \omega \cdot l/2, \quad v = \omega \cdot l. \quad (5)$$

З формул (5) випливає, що $\omega = v/l$, $v_C = \omega \cdot l/2 = v/2$. Підставляємо їх у (4), а також візьмемо до уваги, що момент інерції стрижня відносно центра мас дорівнює $I_C = ml^2/12$, і одержимо

$$E_{k2} = \frac{mv^2}{8} + \frac{mv^2}{24} = \frac{mv^2}{6}. \quad (6)$$

Відповідно до закону збереження повної механічної енергії повна енергія стрижня у початковому і кінцевому станах повинна бути однаковою. Тоді, виходячи з (3) та (6), отримуємо

$$E_{p1} = E_{k2}, \quad \frac{mgl(1 - \cos \alpha)}{2} = \frac{mv^2}{6}. \quad (7)$$

Звідси знаходимо шуканий кут відхилення

$$\cos \alpha = 1 - v^2/(3gl), \quad \alpha = \arccos(1 - v^2/(3gl)). \quad (8)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (8) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\alpha] = \text{рад}$. З іншого боку,

$$\left[\arccos\left(1 - v^2 / (3gl)\right) \right] = \frac{(m/c)^2}{(m/c^2) \cdot m} = \text{рад.}$$

Тобто рад = рад. Таким чином, розрахункова формула (8) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{3gl}\right) = \arccos\left(1 - \frac{4^2}{3 \cdot 9,81 \cdot 1}\right) = 1,10 \text{ рад} = 62,8^\circ.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість нижнього кінця стрижня при проходженні положення рівноваги наближається до нуля $v \rightarrow 0$. Зрозуміло, що кут α , на який потрібно для цього відхилити стрижень, теж буде наближатися до нуля. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли

$$v \rightarrow 0, \text{ то } \alpha = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{3gl}\right) \rightarrow \arccos(1 - 0) = \arccos(1) = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\alpha = \arccos(1 - v^2 / (3gl)) = 62,8^\circ$.

4.2 Задачі для самостійного розв'язання

4.1 Через блок у вигляді диска масою $m = 1$ кг перекинута невагому нитку, до кінців якої підвішені вантажі $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг. Знайти прискорення вантажів і сили натягу нитки.

4.2 До одного кінця мотузки, перекинutoї через блок, підвішений вантаж масою $m_1 = 1$ кг. На другий кінець мотузки діє сила $F = 3t + 2t^3$, де t – час. Блок має форму диска масою $m_2 = 3$ кг. З яким прискоренням рухається вантаж через $t_1 = 1$ с і $t_2 = 2$ с від початку дії сили?

4.3 Циліндр масою m і радіусом R обертається навколо своєї осі за законом $\varphi = A \sin \omega t$. Як залежить від часу момент сили, що діє на циліндр, і момент імпульсу циліндра?

4.4 Визначити прискорення центра кулі, яка скочується з похилої площини. Маса кулі $m = 100$ г, похила площина утворює з горизонтом кут $\alpha = \pi/6$. Чому дорівнює сила тертя, що діє на кулю, та робота цієї сили? Проковзування відсутнє.

4.5 Куля, швидкість якої $v_0 = 10$ м/с, заковчується без проковзування на похилу площину. На яку висоту підніметься куля?

4.6 Якір двигуна обертається з частотою $n = 2800$ хв⁻¹. Визначити обертальний момент M , якщо двигун має потужність $P = 1,2$ кВт при ККД $\eta = 0,72$.

4.7 Диск починає обертатися зі сталим кутовим прискоренням $\beta = 4,5 \cdot 10^3$ рад/с² і через $t_1 = 2$ с його момент імпульсу $L = 250$ кг·м²/с. Знайти кінетичну енергію шківів через $t_2 = 1$ с після початку обертання.

4.8 Яку потужність розвиває білка, що біжить всередині колеса? Маса білки $m_1 = 150$ г, маса колеса $m_2 = 200$ г. Швидкість білки відносно колеса $v = 2$ м/с, радіус колеса $R = 15$ см, момент сили тертя $M = 0,01$ Н·м. Білку вважати матеріальною точкою.

4.9 Через блок масою $m = 0,4$ кг, що має форму диска, перекинута шнур. До кінців шнура прив'язали вантажі масами $m_1 = 0,1$ кг та $m_2 = 0,2$ кг. Знайти співвідношення між кінетичними енергіями поступального і обертового рухів тіл.

4.10 Обчислити момент інерції I_z молекули NO₂ відносно осі Z , що проходить через центр мас молекули перпендикулярно до площини, у якій містяться ядра атомів. Між'ядерна відстань d цієї молекули дорівнює 0,118 нм, валентний кут $\alpha = 140^\circ$.

4.11 Вал у вигляді суцільного циліндра масою $m_1 = 10$ кг насаджений на горизонтальну вісь. На циліндр намотаний шнур,

до вільного кінця якого підвішена ги́ря масою $m_2=2$ кг. Знайти прискорення, з яким буде опускатися ги́ря.

4.12 Маховик у вигляді диска масою $m=50$ кг і радіусом $r=20$ см під дією зовнішнього впливу став обертатися з частотою $n=480$ хв⁻¹. Після того як зовнішній вплив припинився, маховик внаслідок сил тертя зупинився. Знайти момент сил тертя, вважаючи його сталим, для двох випадків: 1) маховик зупинився через $t=50$ с; 2) маховик до повної зупинки зробив $N=200$ обертів.

4.13 Три маленьких кульки масою $m=10$ г кожна розміщені у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $a=20$ см і закріплені між собою невагомими стрижнями. Визначити момент інерції I системи відносно осі: 1) яка перпендикулярна до площини трикутника та проходить крізь центр описаного кола; 2) яка лежить у площині трикутника та проходить крізь центр описаного кола і одну з вершин трикутника.

4.14 Визначити момент інерції I тонкого однорідного стрижня довжиною $l=30$ см і масою $m=100$ г відносно осі, яка перпендикулярна до стрижня та проходить через: 1) його кінець; 2) його середину; 3) точку, що стоїть від кінця стрижня на $1/3$ його довжини.

4.15 Визначити момент інерції I тонкого однорідного стрижня довжиною $l=60$ см та масою $m=100$ г відносно осі, яка перпендикулярна до нього і проходить крізь точку стрижня, що віддалена на $a=20$ см від одного з його кінців.

4.16 Обчислити момент інерції I дротяного прямокутника зі сторонами $a=12$ см та $b=16$ см відносно осі, що лежить в площині прямокутника та проходить крізь середини малих сторін. Маса рівномірно розподілена по довжині дроту с лінійною густиною $\tau=0,1$ кг/м.

4.17 Діаметр диска $d=20$ см, маса $m=800$ г. Визначити момент інерції I диска відносно осі, що проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно до площини диска.

4.18 Знайти момент інерції I плоскої однорідної прямокутної пластини масою $m=800$ г відносно осі, що

збігається з однією з її сторін, якщо довжина a іншої сторони дорівнює 40 см.

4.19 Визначити момент інерції I тонкої пласкої пластини зі сторонами $a=10$ см та $b=20$ см відносно осі, що проходить через центр мас пластини паралельно більшій стороні. Маса пластини рівномірно розподілена по її площі з поверхневою густиною $\sigma=1,2$ кг/м².

4.20 Маховик, момент інерції якого $I=100$ кг·м², обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A=2$ рад, $B=32$ рад/с, $C=-4$ рад/с². Знайти середню потужність $\langle P \rangle$, яку розвивають сили, що діють на маховик за час його обертання від $t=0$ до зупинки.

4.21 Маховик обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A=2$ рад, $B=16$ рад/с, $C=-2$ рад/с². Момент інерції маховика $I=100$ кг·м². Знайти закони, за якими змінюються обертальний момент сили M та потужність P . Чому дорівнює потужність в момент часу $t=3$ с?

4.22 Маховик у вигляді диска масою $m=80$ кг і радіусом $R=30$ см перебуває у стані спокою. Яку роботу A_1 необхідно виконати, щоб надати маховику частоту $n=10$ с⁻¹? Якою стане ця робота A_2 , коли, не змінюючи масу диска, вдвічі збільшити його радіус (зрозуміло, що товщина диска буде меншою)?

4.23 Маховик, момент інерції I якого дорівнює 40 кг·м², почав обертатися рівноприскорено зі стану спокою під дією моменту сили $M=20$ Н·м. Обертання відбувалося упродовж $t=10$ с. Визначити кінетичну енергію, яку набуде маховик.

4.24 Куля котиться без проковзування по горизонтальній поверхні. Повна кінетична енергія T кулі дорівнює 14 Дж. Визначити кінетичну енергію T_1 поступального та T_2 обертального руху кулі.

4.25 Скільки часу t буде скочуватися без проковзування обруч з похилої площини довжиною $l=2$ м та висотою $h=10$ см?

4.26 Обчислити момент інерції: 1) мідного однорідного диска відносно осі симетрії, перпендикулярної до площини диска, якщо його товщина $b=2$ мм і радіус $R=100$ мм; 2) однорідного суцільного конуса відносно осі симетрії, якщо маса конуса m і радіус основи R .

4.27 Горизонтальний тонкий однорідний стрижень AB масою m і довжиною l може вільно обертатися навколо вертикальної осі, яка проходить через його кінець A . У деякий момент часу на кінець стрижня B почала діяти стала сила $\vec{F}$. Вектор сили спрямований перпендикулярно до початкового положення стрижня і лежить у горизонтальній площині. Знайти кутову швидкість стрижня як функцію його кута повороту φ відносно початкового положення.

4.28 Однорідний диск радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω і обережно поклали основою на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск буде обертатися на поверхні, якщо коефіцієнт тертя μ ? Тиск диска на поверхню вважати рівномірним.

4.29 Маховик з початковою кутовою швидкістю ω_0 починають гальмувати сили, момент яких відносно осі маховика пропорційний кореню квадратному з його кутової швидкості. Знайти середню швидкість маховика за весь час гальмування.

4.30 Однорідна куля масою m і радіусом R скочується без проковзування по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. Знайти: 1) значення коефіцієнта тертя, при яких ковзання не буде; 2) кінетичну енергію кулі через t секунд після початку руху.

4.31 Тонкі невагомні нитки щільно намотані на кінці однорідного суцільного циліндра масою m . Вільні кінці ниток прикріплені до стелі кабіни ліфта. Кабіна почала підніматися з прискоренням a_0 . Знайти прискорення циліндра відносно кабіни і силу, з якою циліндр діє (через нитки) на стелю.

4.32 На гладкій (тертя відсутнє) горизонтальній поверхні лежить дошка масою m_1 , а на ній однорідна куля масою m_2 . До дошки приклали сталу горизонтальну силу F . З яким прискоренням буде рухатися дошка і центр кулі за умови відсутності проковзування між ними?

4.33 Суцільному однорідному циліндру масою m і радіусом R надали кутову швидкість ω_0 , а потім поклали боковою поверхнею на горизонтальну площину. Коефіцієнт тертя між циліндром і площиною μ . Знайти: 1) час, упродовж якого рух циліндра буде відбуватися з проковзуванням; 2) повну роботу сили тертя ковзання, що діє на циліндр.

4.34 Однорідна куля радіусом r скочується без проковзування з вершини сфери радіусом R . Знайти кутову швидкість кулі після відриву від сфери. Початкова швидкість кулі дорівнює нулю.

4.35 Гладкий суцільний стрижень AB масою M і довжиною l вільно обертається з кутовою швидкістю ω_0 в горизонтальній площині навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його кінець A . З точки A починає ковзати по стрижню невеличка муфта масою m . Знайти швидкість муфти відносно стрижня у момент часу, коли вона досягне його кінця.

4.36 На гладкій горизонтальній поверхні лежить однорідний стрижень масою $m=5$ кг і довжиною $l=90$ см. По одному з кінців стрижня було здійснено удар у горизонтальному напрямку, перпендикулярному до стрижня, в результаті якого йому було надано імпульс p . Знайти силу, з якою одна половина стрижня буде діяти на іншу в процесі руху.

4.37 Однорідна тонка квадратна пластинка зі стороною l і масою M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що збігається з однією з її сторін. У центр пластинки перпендикулярно до неї пружно вдаряється кулька масою m , що летіла зі швидкістю v . Знайти горизонтальну складову результуючої сили, з якою вісь буде діяти на пластинку після зіткнення.

4.38 Людина масою m_1 стоїть на краю горизонтального однорідного диска масою m_2 і радіусом R , який може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр. У деякий момент людина почала рухатися по краю диска, здійснила переміщення на кут ϕ відносно диска і зупинилась. В процесі руху швидкість людини відносно диска залежала від часу за законом $v(t)$. Нехтуючи розмірами людини, знайти момент сили відносно осі обертання, з яким людина діяла на диск у процесі руху.

4.39 Дві кульки радіусом $r_1 = r_2 = 5$ см і масами $m_1 = m_2 = 1$ кг закріплені на кінцях тонкого стрижня, маса якого набагато менша за маси кульок. Відстань між центрами кульок $R = 0,5$ м. Знайти: 1) момент інерції I_1 цієї системи, відносно осі, що проходить через середину стрижня перпендикулярно до його довжини; 2) момент інерції I_2 цієї самої системи відносно тієї самої осі, вважаючи кульки матеріальними точками, маси яких зосереджені в їх центрах; 3) відносну похибку, якої ми припускаємося при обчисленні моменту інерції цієї системи, замінюючи величину I_1 на I_2 .

4.40 Однорідний стрижень довжиною $l = 1$ м і масою $m = 0,5$ кг обертається в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, яка проходить крізь середину стрижня. З яким кутовим прискоренням обертається стрижень, коли момент сили дорівнює $M = 9,81 \cdot 10^{-2}$ Н·м.

4.41 Однорідний диск радіусом $R = 0,2$ м і масою $m = 0,5$ кг обертається навколо осі, що проходить через його центр. Залежність кутової швидкості обертання диску від часу дається рівнянням $\omega = A + Bt$, де $B = 8$ рад/с². Знайти величину дотичної сили, що прикладена до обода диска. Тертям знехтувати.

4.42 Маховик, момент інерції якого дорівнює $I = 63,6$ кг·м², обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 31,4$ рад/с. Знайти гальмівний момент M , під дією якого маховик зупиниться через $t = 20$ с.

4.43 Обруч і диск мають однакову масу та котяться без проковзування з однаковою лінійною швидкістю v . Кінетична енергія обруча $T_1 = 4$ Дж. Знайти кінетичну енергію диска.

4.44 Диск масою $m = 0,1$ кг і діаметром 60 см, обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини, здійснюючи 20 обертів за одну хвилину. Яку роботу необхідно виконати, щоб зупинити диск?

4.45 Кінетична енергія вала, що обертається зі сталою швидкістю, дорівнює 60 Дж. Вал робить 5 обертів за хвилину. Знайти момент імпульсу цього вала.

4.46 Хлопчик котить обруч по горизонтальному шляху зі швидкістю 7,2 км/год. На яку відстань може вкотитися обруч на похилу площину за рахунок його кінетичної енергії? Нахил площини дорівнює 10 м на кожні 100 м шляху.

4.47 З якої мінімальної висоти повинен з'їхати велосипедист, щоб за інерцією проїхати доріжку, яка має форму «мертвої петлі» радіусом $R = 3$ м, і не відірватися від доріжки у верхній точці петлі? Маса велосипедиста разом із велосипедом $m = 75$ кг, маса коліс, які можна вважати обручами, $m_1 = 3$ кг.

4.48 Знайти лінійні швидкості руху центрів тяжіння: 1) кулі, 2) диска і 3) обруча, що скочуються без ковзання з похилої площини. Висота площини $h = 0,5$ м, початкова швидкість усіх тіл дорівнює нулю. Порівняти отримані швидкості зі швидкістю тіла, що зісковзує з цієї площини, коли сили тертя відсутні.

4.49 Два циліндри: алюмінієвий (суцільний) та свинцевий (порожнистий) – однакового радіуса $R = 6$ см і однакової маси $m = 0,05$ кг – без початкової швидкості скочуються без проковзування з похилої площини. Висота площини $h = 0,5$ м, кут нахилу $\alpha = 30^\circ$. Визначити час, за який кожний циліндр скотиться з площини.

4.50 Колесо, що має момент інерції $I = 245$ кг·м², обертається, виконуючи 20 обертів за секунду. Після того як на колесо перестав діяти обертальний момент, воно зупинилося, зробивши 1000 обертів. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) час, що

пройшов після того, як на колесо перестав діяти обертальний момент до того, як воно зупинилося.

4.51 Маховик обертається зі сталою швидкістю, здійснюючи $n = 10$ об/с. Його кінетична енергія 80 Дж. За який час обертальний момент сил $M = 50$ Н·м збільшить кутову швидкість маховика в два рази?

4.52 До обода диска масою 5 кг прикладена стала дотична сила 20 Н. Яку кінетичну енергію буде мати диск через 5 с після початку дії сили?

4.53 Вздовж дотичної до шків маховика, який має форму диска діаметром $D = 75$ см і масою $m = 40$ кг, прикладена сила $F = 1$ кН. Визначити кутове прискорення та частоту обертання маховика через час $t = 10$ с після початку дії сили, якщо радіус шків $r = 12$ см. Тертям знехтувати.

4.54 Нитка з прив'язаними до її кінців вантажами масами $m_1 = 50$ г та $m_2 = 60$ г перекинута через блок діаметром $D = 4$ см. Визначити момент інерції блока, якщо під дією сили тяжіння він отримав кутове прискорення $\beta = 1,5$ рад/с². Тертям знехтувати.

4.55 Визначити момент сили M , який необхідно прикласти до блока, що обертається з частотою $n = 12$ с⁻¹, щоб він зупинився упродовж часу $t = 8$ с. Діаметр блока $D = 30$ см, масу блока $m = 6$ кг можна вважати рівномірно розподілений по ободу.

4.56 На суцільний циліндр масою $m = 10$ кг, який знаходиться на горизонтальній площині, намотана невагома нитка. До кінця нитки прикладена паралельно горизонтальній площині стала сила $F = 30$ Н, під дією якої циліндр котиться без проковзування. Визначити прискорення центра мас та силу тертя.

4.57 На суцільний циліндр масою M та радіусом R намотана невагома нитка, яка перекинута через невагомий блок (див. рис. 4.6). До кінця нитки прив'язано вантаж масою m . Циліндр може без проковзування рухатися по горизонтальній площині. Визначити прискорення центра мас циліндра, прискорення вантажу та силу натягу нитки.

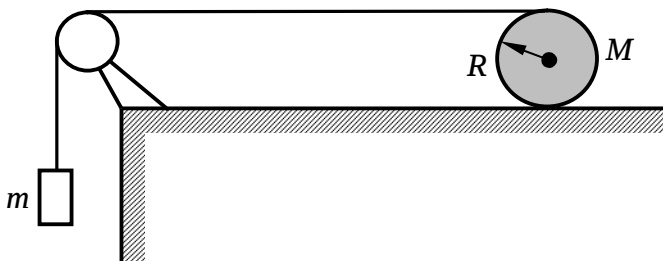


Рисунок 4.6

4.58 Маховик масою M має форму диска радіусом R і може обертатися навколо своєї осі, що орієнтована горизонтально (див. рис. 4.7). На циліндричній поверхні диска закріплено невагому нитку, до другого кінця якої підвішено вантаж масою m . Вантаж вертикально піднімають на висоту h , а потім він вільно падає. При цьому внаслідок удару маховик починає обертатися. Визначити кутову швидкість маховика.

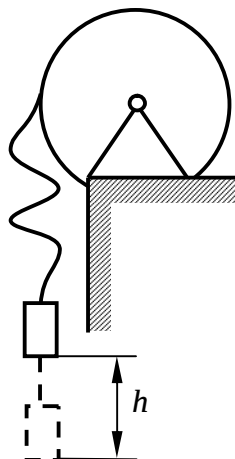


Рисунок 4.7

4.59 Дві краплі ртуті радіусами $R_1 = 1$ мм і $R_2 = 2$ мм обертаються з кутовими

швидкостями $\omega_1 = 5$ рад/с і $\omega_2 = 4$ рад/с відповідно. Кутові швидкості паралельні одна одній. Визначити кутову швидкість краплі, що утворилась внаслідок злиття цих двох крапель.

4.60 Платформа у вигляді диска радіусом $R = 1,5$ м і масою $m_1 = 180$ кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $n = 10$ хв⁻¹. У центрі платформи стоїть людина масою $m_2 = 60$ кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги приміщення буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

4.61 Однорідна тонка квадратна пластинка зі стороною l і масою M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що збігається з однією з її сторін. У центр пластинки перпендикулярно до неї пружно вдаряється кулька

масою m , що летіла зі швидкістю v . Знайти швидкість кульки u після зіткнення.

4.62 Два горизонтальних диска вільно обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через їх центри. Моменти інерції дисків відносно цієї осі дорівнюють I_1 та I_2 , а кутові швидкості ω_1 та ω_2 . Після падіння верхнього диска на нижній обидва диски завдяки тертю між ними почали через деякий час обертатися як єдине ціле. Знайти: 1) спільну кутову швидкість обертання дисків; 2) роботу, яку при цьому виконали сили тертя.

4.63 Куля масою $m=1$ кг, що котиться без проковзування, вдаряється в стінку і відскакує від неї. Швидкість кулі до зіткнення $v_1=10$ м/с, після – $v_2=8$ м/с. Знайти кількість теплоти, що виділяється при зіткненні.

4.64 Однорідний стрижень довжиною 85 см підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. Яку найменшу швидкість необхідно надати нижньому кінцю стрижня, щоб він зробив повний оберт?

4.65 Олівець, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову та лінійну швидкість буде мати наприкінці падіння: 1) середина олівця; 2) верхній його кінець? Довжина олівця 15 см.

4.66 Платформа у вигляді диска діаметром $D=3$ м і масою $m_1=180$ кг може обертатися навколо вертикальної осі. З якою кутовою швидкістю буде обертатися платформа, якщо по її краю піде людина масою $m_2=80$ кг зі швидкістю $u_2=1,8$ м/с відносно платформи?

4.67 Платформа у вигляді диска масою $m_1=280$ кг може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою $m_2=80$ кг. На який кут повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну (на платформі) точку?

4.68 Горизонтальна платформа масою 100 кг обертається довкола горизонтальної осі, що проходить крізь її центр,

роблячи 10 об/хв. Яку роботу виконає людина масою 60 кг, коли перейде від краю платформи до її центра? Радіус платформи 1,5 м.

4.69 Горизонтальна платформа, що має вигляд круглого однорідного диска масою 80 кг і радіусом 1 м, обертається, здійснюючи 20 об/хв. У центрі платформи стоїть людина і тримає у розставлених руках вантажі. Яку частоту обертання матиме платформа, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від $2,94 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ до $0,98 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$? У скільки разів при цьому збільшиться кінетична енергія платформи?

4.70 Однорідний стрижень довжиною $l=2 \text{ м}$ та масою $m_c=6 \text{ кг}$ може вільно обертатися відносно горизонтальної осі, яка проходить крізь один із його кінців. В інший кінець абсолютно непружно вдаряється куля масою $m=10 \text{ г}$, що летіла перпендикулярно до стрижня і його осі зі швидкістю $v_0=1\cdot 10^3 \text{ м/с}$. Визначити кінетичну енергію стрижня після зіткнення. На який кут після зіткнення підніметься стрижень?

4.71 На краю платформи у вигляді диска, що обертається по інерції навколо вертикальної осі з частотою $n_1=8 \text{ хв}^{-1}$, стоїть людина. Коли людина перейшла у центр платформи, остання почала обертатися з частотою $n_1=10 \text{ хв}^{-1}$. Визначити масу m_2 платформи. Маса людини масою $m_1=70 \text{ кг}$.

4.72 Однорідний диск радіусом $R=10 \text{ см}$, що мав початкову кутову швидкість $\omega_0=50 \text{ рад/с}$, кладуть основою на поверхню. Скільки обертів диск здійснить до зупинки, якщо коефіцієнт тертя між основою диска та поверхнею $\mu=0,1$?

ТЕМА 5 МЕХАНІКА РІДИН

Основні формули

Теорема про нерозривність потоку

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2, \quad (5a)$$

де S_1, S_2 – площі поперечного перерізу потоку в двох різних місцях; v_1, v_2 – відповідно швидкості течії.

У стаціонарному потоці ідеальної рідини вздовж довільної лінії трубки течії виконується рівняння Бернуллі

$$\rho v^2 / 2 + \rho gh + p = \text{const}, \quad (5б)$$

де p – статичний тиск рідини; ρ – густина рідини; v – швидкість течії; h – висота рідини над заданим рівнем.

Формула Торрічеллі, яка визначає швидкість витікання рідини з малого отвору,

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (5в)$$

де h – висота відкритої поверхні рідини над отвором.

Сила тертя між двома шарами рідини (формула Ньютона для сили внутрішнього тертя):

$$F_{\text{тер}} = \eta \cdot \left| \frac{dv}{dz} \right| \cdot S, \quad (5г)$$

де η – в'язкість рідини.

Число Рейнольдса, яке визначає характер течії в'язкої рідини,

$$\text{Re} = \rho v l / \eta, \quad (5д)$$

де l – характерний розмір.

Формула Пуазейля, яка визначає об'єм рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби,

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}, \quad (5е)$$

де R і l – радіус й довжина труби; $p_1 - p_2$ – різниця тиску на кінцях труби.

Формула Стокса, яка визначає силу опору руху кульки радіусом r у в'язкій рідині,

$$\vec{F}_S = -6\pi\eta r\vec{v}. \quad (5ж)$$

5.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1

На яку висоту підніметься струмінь води, що витікає із наконечника шланга, якщо надлишковий тиск води у водопроводі 10^5 Па? Опором повітря знехтувати.

Розв'язання

$h - ?$	Площа поперечного перерізу струменя води під час його переміщення від шланга до отвору наконечника змінюється від S_1 до S_2 (рис. 5.1). Через те що $S_2 \ll S_1$, швидкість струменя води на виході з отвору v_2 стає набагато вищою за швидкість води у шлангу v_1 . Швидкість v_2 обчислимо використовуючи рівняння Бернуллі та теорему про нерозривність потоку. Рух струменя води після його виходу з наконечника шланга перестає бути ламінарним. Тому висоту h (рис. 5.2), на яку підніметься струмінь води під дією сили тяжіння, будемо обчислювати за допомогою кінематичних формул рівноприскореного руху для матеріальної точки, подаючи струмінь як сукупність малих частинок води.
$\Delta p = 10^5$ Па, $\rho = 10^3$ кг/м ³	

Знайдемо швидкість витікання води v_2 з отвору наконечника шланга. Для цього застосуємо рівняння Бернуллі та теорему про нерозривність потоку для точок перерізу площею S_1 та точок перерізу площею S_2 (рис. 5.1):

$$\rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2, \quad (1)$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2, \quad (2)$$

де ρ – густина води; g – прискорення вільного падіння. Використовуючи, що $p_1 - p_2 = \Delta p$, $v_1 = S_2 v_2 / S_1$ (з рівняння (2)), $h_2 - h_1 = \Delta h$ – висота наконечника, співвідношення (1) можемо перетворити до вигляду

$$\Delta p - \rho g \Delta h = \rho v_2^2 \left(1 - (S_2 / S_1)^2 \right) / 2. \quad (3)$$

Візьмемо до уваги, що $S_2 / S_1 \ll 1$ (рис. 5.1); вважаємо, що гідростатичний тиск $\rho g \Delta h$ у наконечнику набагато менший за надлишковий тиск Δp ($\rho g \Delta h \ll \Delta p$). Тоді з рівняння (3) знаходимо швидкість струменя води з отвору наконечника:

$$v_2 = \sqrt{2 \Delta p / \rho}. \quad (4)$$

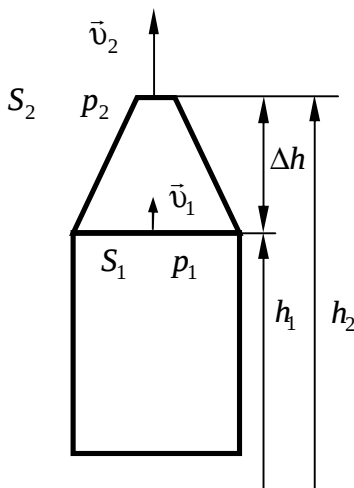


Рисунок 5.1

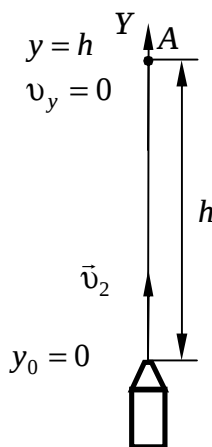


Рисунок 5.2

Як відомо, довільне тіло за умови відсутності сили опору під дією сили тяжіння рухається рівноприскорено з прискоренням вільного падіння g . Використовуючи формули рівноприскореного руху, можемо записати для вертикальної координати частинки рідини та її швидкості вирази

$$y = y_0 + v_{0y} t + g_y t^2 / 2, \quad v_y = v_{0y} + g_y t. \quad (5)$$

Візьмемо до уваги, що $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_2$, $g_y = -g$, у найвищій точці А траєкторії (рис. 5.2) $v_y = 0$ та $y = h$. Тоді з формул (5) знаходимо

$$t = v_2 / g, \quad h = v_2^2 / (2g). \quad (6)$$

Підставляємо співвідношення (4) у другу формулу системи (6) і отримуємо шукану висоту підйому струменя води

$$h = \Delta p / (\rho g). \quad (7)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (7) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[h] = \text{м}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \right] = \frac{(\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) / \text{м}^2}{(\text{кг} / \text{м}^3) \cdot \text{м} / \text{с}^2} = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (7) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (7), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$h = \frac{10^5}{10^3 \cdot 9,81} \text{ м} = 10,19 \text{ м}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли надлишковий тиск води у водопроводі дорівнює нулю $\Delta p = 0$. Зрозуміло, що тоді висота, на яку підніметься струмінь води, також буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\Delta p = 0$, то $h = \Delta p / (\rho g) \sim \Delta p = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $h = \Delta p / (\rho g) = 10,19 \text{ м}$.

Приклад 5.2

За який час можна витиснути ідеальну рідину густиною $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$ зі шприца, якщо на поршень діє сила $F = 20 \text{ Н}$, об'єм рідини у шприці $V = 10 \text{ см}^3$, а площі поршня та внутрішнього перерізу голки відповідно $S_1 = 1 \text{ см}^2$, $S_2 = 0,3 \text{ мм}^2$. Тертя не враховувати.

Розв'язання

$t - ?$	Виходячи з рівняння Бернуллі та теореми
$F = 20 \text{ Н}$,	про нерозривність потоку, визначимо
$V = 10 \text{ см}^3$,	швидкості у досліджуваній системі. Далі,
$S_1 = 1 \text{ см}^2$,	використовуючи одержані швидкості,
$S_2 = 0,3 \text{ мм}^2$,	знайдемо шуканий час t .
$\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$	Запишемо рівняння Бернуллі та теорему
	про нерозривність потоку для точок струменя
	у перерізах S_1 та S_2 (рис. 5.3):

$$\rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2, \quad (1)$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2. \quad (2)$$

У цих формулах індексом «1» позначено величини, які характеризують струмінь у перерізі S_1 , індексом «2» – у перерізі S_2 (рис. 5.3); ρ , v , p , h – густина, швидкість, статичний тиск та висота струменя рідини. Вважаємо, що рідина рухається горизонтально (рис. 5.3). Тому $h_1 = h_2$. Як впливає з рисунка 5.3, тиск у перерізі S_2 дорівнює атмосферному. Тому $p_2 = p_{am}$. Поршень у шприці (рис. 5.3) створює додатковий тиск $p = F / S_1$. Тоді результуючий тиск у перерізі S_1 з урахуванням зовнішнього атмосферного тиску буде дорівнювати $p_1 = p_{am} + F / S_1$. Підставляємо вищезаписані співвідношення в (1) і отримуємо

$$\rho v_1^2 / 2 + F / S_1 = \rho v_2^2 / 2. \quad (3)$$

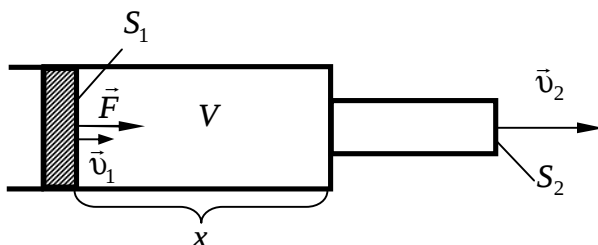


Рисунок 5.3

Розв'язуємо систему двох рівнянь (3), (2) відносно двох невідомих v_1 та v_2 і знаходимо

$$v_1 = \sqrt{\frac{2F}{S_1 \rho ((S_1 / S_2)^2 - 1)}}. \quad (4)$$

Щоб із шприца витиснути рідину об'ємом V , поршень повинен пройти відстань $x = V / S_1$ (рис. 5.3). Для цього потрібен час

$$t = x / v_1 = V \sqrt{\frac{\rho ((S_1 / S_2)^2 - 1)}{2 S_1 F}}. \quad (5)$$

Таким чином, отримали співвідношення (5), яке є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (5) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[t] = \text{с}$. З іншого боку,

$$\left[V \sqrt{\frac{\rho ((S_1 / S_2)^2 - 1)}{2 S_1 F}} \right] = \text{м}^3 \sqrt{\frac{\text{кг/м}^3}{\text{м}^2 \cdot (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2)}} = \text{с}.$$

Тобто $\text{с} = \text{с}$. Таким чином, розрахункова формула (5) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$t = 10 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^3 \left((10^{-4} / 0,3 \cdot 10^{-6})^2 - 1 \right)}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 20}} \text{ с} = 1,67 \text{ с.}$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли сила, що діє на поршень, прямує до нуля $F \rightarrow 0$. Зрозуміло, що тоді і час, за який час можна витиснути рідину з шприца, буде наближатися до нескінченності. З розрахункової формули впливає такий самий

$$\text{результат. Коли } F \rightarrow 0, \text{ то } t = V \sqrt{\frac{\rho((S_1/S_2)^2 - 1)}{2S_1 F}} \sim \frac{1}{\sqrt{F}} \rightarrow \infty.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $t = V \sqrt{\rho((S_1/S_2)^2 - 1)/(2S_1 F)} = 1,67 \text{ с.}$

Приклад 5.3

Одна посудина заповнена гліцерином, а друга – трансформаторним маслом. Густина і в'язкість гліцерину та масла відповідно $\rho_1 = 1210 \text{ кг/м}^3$, $\eta_1 = 0,35 \text{ Па}\cdot\text{с}$ і $\rho_2 = 850 \text{ кг/м}^3$, $\eta_2 = 0,05 \text{ Па}\cdot\text{с}$. В ці посудини кидають алюмінієві кульки діаметром $d = 0,003 \text{ м}$. Чи можна силу опору руху кульок обчислювати за формулою Стокса (припустити, що характерний розмір l дорівнює діаметру і число Рейнольдса $Re_{кр} = 0,5$)? Якщо це так, обчислити за цією формулою швидкість падіння кульок.

Розв'язання

$v_1 - ?$

$v_2 - ?$

$\rho_1 = 1210 \text{ кг/м}^3$,
 $\eta_1 = 0,35 \text{ Па}\cdot\text{с}$,
 $\rho_2 = 850 \text{ кг/м}^3$,
 $\eta_2 = 0,05 \text{ Па}\cdot\text{с}$,
 $d = 0,003 \text{ м}$,
 $l = d$,
 $Re_{кр} = 0,5$,
 $\rho_{al} = 2700 \text{ кг/м}^3$,
 $g = 9,81 \text{ м/с}^2$

Кулька у рідині рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$, Архімеда $\vec{F}_A$ та опору $\vec{F}_S$ (рис. 5.4). Припустимо, що рух рідини, яка огинає кульку, є ламінарним. Тоді силу опору руху кульки можна обчислювати за формулою Стокса (5ж). Визначимо швидкість кульки за допомогою другого закону Ньютона. Отримавши значення швидкості кульки, знайдемо число Рейнольдса (5д), порівняємо з критичним значенням $Re_{кр}$ і перевіримо, чи буде рух рідини дійсно ламінарним, тобто, чи можна силу опору руху кульок обчислювати за формулою Стокса, чи є правильним отримане значення швидкості кульки для двох видів рідини.

Визначимо швидкість кульки $\vec{v}$ з другого закону Ньютона (рис. 5.4)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_S, \quad (1)$$

де $a = d\vec{v}/dt$ – прискорення кульки; $m = \rho_{al} \cdot \pi d^3/6$ – маса кульки; $\pi d^3/6$ – об'єм кульки; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння; $\vec{F}_S = -6\pi\eta r\vec{v}$ – сила Стокса (5ж); $r = d/2$ – радіус кульки; $\vec{F}_A = -\rho \cdot \pi d^3/6 \cdot \vec{g}$ – сила Архімеда; ρ та η – густина та в'язкість рідини. Підставимо в (1) вищенаведені формули, спроектуємо вектори рівняння (1) на вісь Y і одержимо

$$\frac{\rho_{al} \cdot \pi d^3}{6} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\rho_{al} \cdot \pi d^3}{6} \cdot g - \frac{\rho \cdot \pi d^3}{6} \cdot g - 6\pi\eta \frac{d}{2} \cdot v. \quad (2)$$

Припустимо, що в початковий момент часу швидкість кулі дорівнювала нулю. Тоді з (2) випливає, що кулька під дією сили тяжіння та Архімеда набере прискорення $dv/dt > 0$, тобто її швидкість буде збільшуватись. Через збільшення швидкості

збільшується і сила Стокса (прямо пропорційно залежить від швидкості (5ж)). Сила Стокса спрямована протилежно до напрямку швидкості (5ж), тому її поява призведе до зменшення прискорення. Подальше збільшення швидкості викличе подальше збільшення сили Стокса і подальше зменшення прискорення. Нарешті, швидкість буде мати таке значення, що прискорення дорівнюватиме нулю $dv/dt = 0$, і кулька буде далі рухатись рівномірно зі сталою швидкістю. Підставимо в (2) $dv/dt = 0$ і визначимо усталену швидкість кульки у рідині:

$$v = \frac{(\rho_{al} - \rho) \cdot d^2 \cdot g}{18 \cdot \eta}. \quad (3)$$

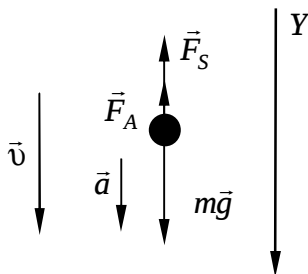


Рисунок 5.4

Визначимо число Рейнольдса (5д)

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{\rho d}{\eta} \cdot \frac{(\rho_{al} - \rho) \cdot d^2 \cdot g}{18 \cdot \eta} = \frac{\rho(\rho_{al} - \rho) \cdot d^3 \cdot g}{18 \cdot \eta^2}. \quad (4)$$

За допомогою формули (4) обчислимо число Рейнольдса для гліцерину $\rho = \rho_1$, $\eta = \eta_1$ і порівняємо його з критичним значенням

$$Re_1 = \frac{\rho_1(\rho_{al} - \rho_1) \cdot d^3 \cdot g}{18 \cdot \eta_1^2} = 0,22 < Re_{кр} = 0,5. \quad (5)$$

Як бачимо, число Рейнольдса для руху кульки в гліцерині є меншим за критичне значення. Тому силу опору руху кульок МОЖНА обчислювати за формулою Стокса. Підставимо в (3)

значення густини і в'язкості для гліцерину ($\rho = \rho_1$, $\eta = \eta_1$) і отримаємо значення усталеної швидкості руху кульки у гліцерині

$$v_1 = \frac{(\rho_{al} - \rho_1) \cdot d^2 \cdot g}{18 \cdot \eta_1} \approx 0,021 \text{ м/с.} \quad (6)$$

За допомогою формули (4) обчислимо число Рейнольдса для масла $\rho = \rho_2$, $\eta = \eta_2$ і порівняємо його з критичним значенням

$$Re_2 = \frac{\rho_2 (\rho_{al} - \rho_2) \cdot d^3 \cdot g}{18 \cdot \eta_2^2} = 9,3 > Re_{кр} = 0,5. \quad (7)$$

Бачимо, число Рейнольдса для руху кульки у маслі є більшим за критичне значення. Тому рух у маслі буде турбулентним і силу опору руху кульок НЕ МОЖНА обчислювати за формулою Стокса.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (3) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{(\rho_{al} - \rho) \cdot d^2 \cdot g}{18 \cdot \eta} \right] = \frac{(\text{кг/м}^3) \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м/с}^2}{((\text{кг} \cdot \text{м/с}^2)/\text{м}^2) \cdot \text{с}} = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли в'язкість рідини прямує до нескінченності $\eta \rightarrow \infty$. З фізичних міркувань зрозуміло, що швидкість кульки у цьому випадку буде прямувати до нуля $v \rightarrow 0$. З розрахункової формули випливає такий самий

результат. Коли $\eta \rightarrow \infty$, то $v = \frac{(\rho_{al} - \rho) \cdot d^2 \cdot g}{18 \cdot \eta} \sim \frac{1}{\eta} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: для кульки, що рухається в гліцерині, обчислювати силу опору за формулою Стокса можна; для кульки, яка рухається у маслі, – не можна;

$$v_1 = (\rho_{al} - \rho_1) \cdot d^2 \cdot g / (18 \cdot \eta_1) \approx 0,021 \text{ м/с.}$$

Приклад 5.4

Довгий циліндр радіусом R_1 рухається вздовж своєї осі зі сталою швидкістю v_0 всередині коаксіального нерухомого циліндра радіусом R_2 . Простір між пластинами заповнено в'язкою рідиною. Знайти швидкість рідини залежно від відстані r до осі циліндрів. Течія ламінарна.

Розв'язання

$\frac{v = v(r) - ?}{R_1, R_2, v_0}$	Для розв'язання задачі використаємо вираз для сили тертя між двома шарами рідини (5г); граничні умови (рідина прилипає до поверхні циліндра, тобто швидкість рідини для $r = R_1$ дорівнює v_0, для $r = R_2$ дорівнює нулю (рис. 5.5)).
--------------------------------------	--

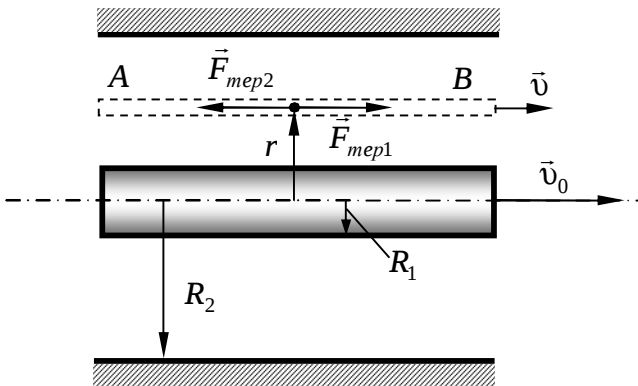


Рисунок 5.5

Розглянемо рух довільного шару рідини AB (рис. 5.5). Він рухається під дією двох сил тертя: сили $\vec{F}_{mer1}$, яка викликається

нижнім шаром рідини, та сили $\vec{F}_{мер2}$, яка викликається верхнім шаром рідини. У результаті дії цих сил шар рідини AB рухається зі сталою у часі швидкістю v , тобто його прискорення дорівнює нулю. Це означає, що рівнодійна сил на шар AB дорівнює нулю, тобто $F_{мер1} = F_{мер2}$. Шар рідини AB був вибраний довільно, тому можна стверджувати, що для рідини у довільній точці повинна виконуватися рівність

$$F_{мер} = const. \quad (1)$$

Позначимо константу в (1) через F_0 та підставимо в (1) формулу для сили тертя між двома шарами рідини (5г). У результаті отримаємо

$$F_{мер} = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot S = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l = F_0 = const. \quad (2)$$

У цій формулі враховано, що швидкість залежить від відстані r до осі системи (а не z як у формулі (5г)), площа поверхні дотику двох циліндричних шарів $S = 2\pi r l$, де l – довжина циліндричного шару рідини. Перетворимо та проінтегруємо рівняння (2):

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \frac{F_0}{2\pi\eta l}, \quad \int_{v_0}^v dv = \frac{F_0}{2\pi\eta l} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r}, \quad v - v_0 = \frac{F_0}{2\pi\eta l} \ln(r/R_1). \quad (3)$$

У цих рівняннях враховано, що коли $r = R_1$, то за умовою задачі швидкість рідини (яка прилипає до циліндра та дорівнює його швидкості) дорівнює v_0 , у довільній точці з r швидкість дорівнює v .

Використаємо, що циліндр радіусом R_2 є нерухомим. Це означає, що швидкість рідини, яка прилипає до цього циліндра в точці з $r = R_2$, дорівнює нулю $v = 0$. Підставляємо цю граничну умову в третє рівняння (3) і знаходимо рівняння для невідомої константи F_0 :

$$0 - v_0 = \frac{F_0}{2\pi\eta l} \ln(R_2 / R_1), \quad F_0 = -\frac{v_0 2\pi\eta l}{\ln(R_2 / R_1)}. \quad (4)$$

Підставляємо значення для константи F_0 в (3) і знаходимо шукану залежність швидкості рідини від r :

$$v = v_0(1 - \ln(r / R_1) / \ln(R_2 / R_1)). \quad (5)$$

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (5) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$[v_0(1 - \ln(r / R_1) / \ln(R_2 / R_1))] = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (5) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Перевіримо, чи буде швидкість рідини дорівнювати швидкості рухомого циліндра v_0 , коли $r = R_1$. Підставимо $r = R_1$ у розрахункову формулу (5) і отримаємо

$$v = v_0 \left(1 - \frac{\ln(r / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \right) = v_0 \left(1 - \frac{\ln(R_1 / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \right) = v_0(1 - 0) = v_0.$$

Бачимо, що з розрахункової формули випливає такий самий результат.

Перевіримо, чи буде швидкість рідини дорівнювати швидкості нерухомого циліндра $v = 0$, коли $r = R_2$. Підставимо $r = R_2$ у розрахункову формулу (5) і отримаємо

$$v = v_0 \left(1 - \frac{\ln(r / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \right) = v_0 \left(1 - \frac{\ln(R_2 / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \right) = v_0(1 - 1) = 0.$$

Бачимо, що з розрахункової формули випливає такий самий результат.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $v = v_0(1 - \ln(r/R_1)/\ln(R_2/R_1))$.

5.2 Задачі для самостійного розв'язання

5.1 Маса m 100 крапель спирту, що витікає з капіляра, дорівнює 0,71 г. Визначити поверхневий натяг σ спирту, якщо діаметр d шийки краплі у момент відриву дорівнює 1 мм.

5.2 Трубка має діаметр $d_1 = 0,2$ см. На нижньому кінці трубки повисла крапля води, що має у момент відриву форму кульки. Знайти діаметр d_2 цієї краплі.

5.3 Яку роботу A потрібно виконати, щоб, видуваючи мильну бульбашку, збільшити її діаметр від $d_1 = 1$ см до $d_2 = 11$ см? Вважати процес ізотермічним.

5.4 Дві краплі ртуті радіусом $r = 1$ мм кожна злилися в одну велику краплю. Яка енергія E виділиться при цьому злитті? Вважати процес ізотермічним.

5.5 Повітряна бульбашка діаметром $d = 2$ мкм знаходиться у воді біля її поверхні. Визначити густину ρ повітря в бульбашці, якщо повітря над поверхнею води знаходиться за нормальних умов.

5.6 На скільки тиск p повітря усередині мильної бульбашки більше атмосферного тиску p_0 , якщо діаметр бульбашки $d = 5$ мм?

5.7 Гліцерин піднявся в капілярній трубці на висоту $h = 20$ мм. Визначити поверхневий натяг σ гліцерину, якщо діаметр d каналу трубки дорівнює 1 мм.

5.8 Різниця Δh рівнів рідини в колінах U-подібної трубки дорівнює 23 мм. Діаметри d_1 і d_2 каналів у колінах трубки дорівнюють відповідно 2 і 0,4 мм. Густина ρ рідини дорівнює $0,8 \text{ г/см}^3$. Визначити поверхневий натяг σ рідини.

5.9 У рідину нижніми кінцями опущені дві вертикальні капілярні трубки з внутрішніми діаметрами $d_1=0,05$ см і $d_2=0,1$ см. Різниця Δh рівнів рідини в трубках дорівнює 11,6 мм. Густина ρ рідини дорівнює $0,8$ г/см³. Знайти поверхневий натяг σ рідини.

5.10 У воду опущена на дуже малу глибину скляна трубка з діаметром внутрішнього каналу $d=1$ мм. Знайти масу m води, що увійшла до трубки.

5.11 Капілярна трубка діаметром $d=0,5$ мм наповнена водою. На нижньому кінці трубки вода повисла у вигляді краплі. Цю краплю можна взяти за частину сфери радіусом $r=3$ мм. Знайти висоту h стовпчика води в трубці.

5.12 Широке коліно U-подібного ртутного манометра має діаметр $d_1=4$ см, вузьке $d_2=0,25$ см. Різниця рівнів Δh ртуті в обох колінах дорівнює 200 мм. Знайти тиск p , який показує манометр, взявши до уваги поправку на капілярність.

5.13 На яку висоту h піднімається вода між двома паралельними скляними пластинками, якщо відстань d між ними становить 0,2 мм?

5.14 Вода тече в горизонтально розміщений трубі змінного перерізу. Швидкість v_1 води в широкій частині труби дорівнює 20 см/с. Визначити швидкість v_2 у вузькій частині труби, діаметр d_2 якої в 1,5 рази менше за діаметр d_1 широкої частини.

5.15 У широкій частині горизонтально розміщеної труби нафта тече із швидкістю $v_1=2$ м/с. Визначити швидкість v_2 нафти у вузькій частині труби, якщо різниця Δp тиску в її широкій і вузькій частинах дорівнює 6,65 кПа.

5.16 У горизонтально розміщеної трубі з площею S_1 поперечного перерізу, що дорівнює 20 см², тече рідина. В одному місці труба має звуження, в якому площа S_2 перерізу дорівнює 12 см². Різниця Δh рівнів у двох манометричних

трубках, встановлених у широкій і вузькій частинах труби, дорівнює 8 см. Визначити об'ємну витрату Q_V рідини.

5.17 Горизонтальний циліндр насоса має діаметр $d_1=20$ см. У ньому рухається зі швидкістю $v_1=1$ м/с поршень, що виштовхує воду через отвір діаметром $d_2=2$ см. З якою швидкістю v_2 витікатиме вода з отвору? Який буде надлишковий тиск p води у циліндрі?

5.18 Тиск p вітру на стіну дорівнює 200 Па. Визначити швидкість v вітру, якщо він дме перпендикулярно до стіни. Густина ρ повітря дорівнює $1,29$ кг/м³.

5.19 Струмінь води діаметром $d=2$ см рухається зі швидкістю $v=10$ м/с, падає на нерухому плоску поверхню, розміщену перпендикулярно до струменя. Знайти силу F тиску струменя на поверхню, вважаючи, що після падіння струменя на поверхню швидкість частинок води дорівнює нулю.

5.20 Бак висотою $h=1,5$ м наповнений доверху водою. На відстані $h=1$ м від верхнього краю бака утворився отвір малого діаметра. На якій відстані l від бака падає на підлогу струмінь, що витікає з отвору?

5.21 Струмінь води з площею поперечного перерізу $S_1 = 4$ см² витікає горизонтально з брандспойта, який розміщено на висоті $H=2$ м над поверхнею

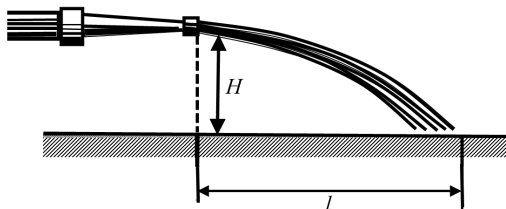


Рисунок 5.6

землі, і падає на цю поверхню на відстані $l=8$ м (рис. 5.6). Нехтуючи опором повітря руху води, знайти надлишковий тиск p води в рукаві, якщо площа поперечного перерізу рукава дорівнює $S_2 = 50$ см²?

5.22 Бак висотою $H=2$ м доверху заповнений рідиною. На якій висоті h повинен бути зроблений отвір у стінці бака, щоб

місце падіння струменя, який витікає з отвору, було на максимальній від бака відстані?

5.23 Вода тече по круглій трубі діаметром $d=5$ см з середньою в перерізі швидкістю $\langle v \rangle = 10$ см/с. Визначити число Рейнольдса Re для потоку рідини в трубі і визначити характер течії рідини. Критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 2300$, в'язкість води $\eta = 1,0$ мПа·с.

5.24 У трубі з внутрішнім діаметром $d=3$ см тече вода. Визначити максимальну масову витрату $Q_{m_{\max}}$ води за умови ламінарної течії. Критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 2300$, в'язкість води $\eta = 1,0$ мПа·с.

5.25 Мідна кулька діаметром $d=1$ см падає зі сталою швидкістю у касторовій олії. Чи є рух олії, викликаний падінням у ньому кульки, ламінарним? Критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 0,5$, в'язкість касторової олії $\eta = 987$ мПа·с, густина міді $\rho_1 = 8930$ кг/м³, густина касторової олії $\rho_2 = 960$ кг/м³.

5.26 Латунна кулька діаметром $d=0,6$ мм падає в гліцерині. Визначити: 1) швидкість v сталого руху кульки; 2) чи є обтікання кульки ламінарним? Критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 0,5$, в'язкість гліцерину $\eta = 1480$ мПа·с, густина латуні $\rho_1 = 8550$ кг/м³, густина гліцерину $\rho_2 = 1260$ кг/м³.

5.27 Під час руху кульки радіусом $r_1=2,4$ мм у касторовій олії ламінарне обтікання спостерігається при швидкості v_1 кульки, що не перевищує 10 см/с. При якій мінімальній швидкості v_2 кульки радіусом $r_2=1$ мм у гліцерині обтікання стане турбулентним? В'язкість касторової олії $\eta_1 = 987$ мПа·с, густина – $\rho_1 = 960$ кг/м³; в'язкість гліцерину $\eta_2 = 1480$ мПа·с, густина – $\rho_2 = 1260$ кг/м³.

5.28 Трубка Піто (рис. 5.7) встановлена в трубі газопроводу, площа внутрішнього перерізу якого дорівнює S . Нехтуючи в'язкістю, знайти об'єм газу, що проходить через перетин труби за одиницю часу, якщо різниця рівнів у рідинному манометрі дорівнює Δh , а густина рідини і газу – відповідно ρ_0 і ρ .

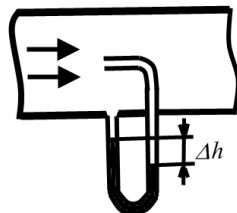


Рисунок 5.7

5.29 Широка посудина з невеликим отвором у дні наповнена водою і гасом. Товщина шару води $h_1=30$ см, а шару гасу $h_2=20$ см. Нехтуючи в'язкістю, знайти швидкість води, що витікає з отвору. Густина води $\rho_1=1000$ кг/м³, гасу – $\rho_2=800$ кг/м³.

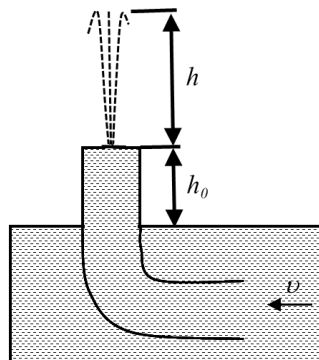


Рисунок 5.8

5.30 Зігнуту трубку опустили в потік води, як показано на рис. 5.8. Швидкість потоку відносно трубки $v=2,5$ м/с. Закритий верхній кінець трубки має невеликий отвір і знаходиться на висоті $h_0=12$ см. На яку висоту h підніматиметься струмінь води, що витікає з отвору?

5.31 У горизонтальному дні широкої посудини з ідеальною рідиною є круглий отвір радіусом R_1 . Над цим отвором розміщено круглий закритий циліндр радіусом $R_2 > R_1$ (рис. 5.9). Проміжок між циліндром і дном посудини дуже малий, густина

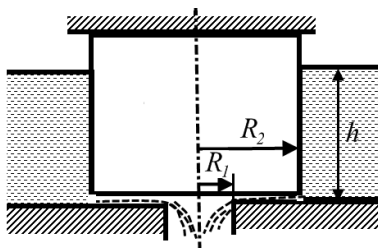


Рисунок 5.9

рідини ρ . Знайти статичний тиск рідини у проміжку як функцію відстані r від осі отвору і циліндра, якщо висота шару рідини дорівнює h .

5.32 Циліндрична посудина висотою h і площею основи S наповнена водою. На дні посудини відкрили отвір із площею $s \ll S$. Нехтуючи в'язкість води, визначити, через скільки часу вся вода витече з посудини.

5.33 По трубці довжиною l і радіусом R тече стаціонарний потік рідини, густина якої ρ і в'язкість η . Швидкість течії рідини залежить від відстані r до осі трубки згідно із законом $v = v_0(1 - r^2/R^2)$. Знайти: а) об'єм рідини, що протікає через переріз трубки за одиницю часу; б) кінетичну енергію рідини в об'ємі трубки; в) силу тертя, яка діє на трубку з боку рідини; г) різницю тиску на кінцях трубки.

5.34 Радіус перерізу трубопроводу монотонно зменшується згідно із законом $r = r_0 e^{-\alpha x}$, де $\alpha = 0,50 \text{ м}^{-1}$, x – відстань від початку трубопроводу. Знайти відношення чисел Рейнольдса в перерізах, віддалених один від одного на $\Delta x = 3,2 \text{ м}$.

5.35 Свинцева кулька рівномірно опускається в гліцерині, в'язкість якого $\eta = 1,48 \text{ Па}\cdot\text{с}$. При якому найбільшому діаметрі кульки його обтікання ще залишається ламінарним? Відомо, що перехід до турбулентного обтікання відповідає числу $Re_{кр} = 0,5$, густина свинцю $\rho = 11300 \text{ кг/м}^3$, густина гліцерину $\rho_0 = 1260 \text{ кг/м}^3$.

5.36 Сталева кулька діаметром $d = 3,0 \text{ мм}$ опускається з нульовою початковою швидкістю у оливковій олії, в'язкість якої $\eta = 90 \text{ мПа}\cdot\text{с}$. Через який час після початку руху швидкість кульки відрізнятиметься від сталого значення на $n = 1,0 \%$?

ТЕМА 6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

Основні формули

Перетворення Лоренца для випадку, коли система відліку K' рухається зі швидкістю V у додатному напрямі осі X системи K , при цьому осі X' і X збігаються, а осі Y' і Y , Z' і Z паралельні одна одній:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (6a)$$

Скорочення довжини тіла та уповільнення часу годинника, який рухається,

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (6б)$$

де l_0 – власна довжина; Δt_0 – власний час годинника.

Перетворення швидкості в спеціальній теорії відносності

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - v_x V / c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 - v_x V / c^2}. \quad (6в)$$

Релятивістський імпульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (6г)$$

де m – маса спокою.

Релятивістське рівняння динаміки частинки

$$d\vec{p} / dt = \vec{F}, \quad (6д)$$

де $\vec{p}$ – релятивістський імпульс частинки.

Повна й кінетична енергії релятивістської частинки

$$E = mc^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad E_k = mc^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2} - mc^2. \quad (6е)$$

Зв'язок між повною енергією й імпульсом релятивістської частинки

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4, \quad p^2 c^2 = E_k (E_k + 2mc^2). \quad (6ж)$$

6.1 Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1

Знайти власну довжину стрижня, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $v = c/2$, довжина $L = 1,00$ м і кут між ним та напрямком руху $\theta = 45^\circ$.

Розв'язання

$L_0 - ?$	Для розв'язання задачі використаємо перетворення Лоренца (6а) та формулу скорочення довжини тіла (6б). Візьмемо до уваги, що перетворення довжини різних проекцій стрижня описується різними формулами.
$v = c/2$,	
$L = 1,00$ м	
$\theta = 45^\circ$	

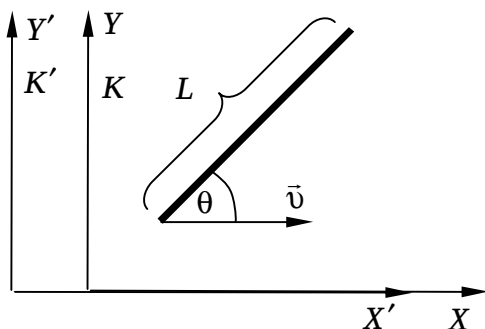


Рисунок 6.1

Вважаємо, що у лабораторній системі відліку K швидкість руху стрижня спрямована вздовж осі X , кут між стрижнем і його швидкістю θ (рис. 6.1). Тоді проекція стрижня на вісь X буде дорівнювати $L_x = L \cos \theta$, а на вісь Y – $L_y = L \sin \theta$. Позначимо через L_{0x} та L_{0y} проекції стрижня на осі X' та Y' відповідно у власній системі відліку стрижня K' (відносно якої

він перебуває у стані спокою). Згідно з перетвореннями Лоренца (6а) координати вздовж осей Y та Y' пов'язані між собою співвідношенням $y = y'$. Це означає, що y -проекції при переході від системи K до системи K' не змінюються, тобто

$$L_{0y'} = L_y = L \sin \theta. \quad (1)$$

Згідно з формулою скорочення довжини тіла (6б) x -проекції стрижня пов'язані між собою співвідношенням

$$L_x = L_{0x'} \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad \text{або} \quad L_{0x'} = L \cos \theta / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (2)$$

Використовуючи формули (1) та (2), знаходимо власну довжину стрижня:

$$\begin{aligned} L_0 &= \sqrt{L_{0x'}^2 + L_{0y'}^2} = L \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta / (1 - (v/c)^2)} = \\ &= L \sqrt{(1 - \sin^2 \theta \cdot (v/c)^2) / (1 - (v/c)^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, отримали співвідношення (3), яке є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (3) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[L_0] = \text{м}$. З іншого боку,

$$\left[L \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta \cdot (v/c)^2}{1 - (v/c)^2}} \right] = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Запишемо фізичні величини, що входять в розрахункову формулу (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$L_0 = 1,00 \sqrt{(1 - \sin^2 45^\circ \cdot (0,5 \text{ c} / \text{c})^2) / (1 - (0,5 \text{ c} / \text{c})^2)} = 1,08 \text{ м}.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли кут між стрижнем та напрямком його руху дорівнює нулю $\theta = 0$. Тоді скорочення довжини тіла описується відомою формулою (6б) $L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Звідси випливає, що $L_0 = L / \sqrt{1 - (v/c)^2}$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\theta = 0$, то

$$L_0 = L \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta \cdot (v/c)^2}{1 - (v/c)^2}} = L \sqrt{\frac{1 - \sin^2 0 \cdot (v/c)^2}{1 - (v/c)^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $L_0 = L \sqrt{(1 - \sin^2 \theta \cdot (v/c)^2) / (1 - (v/c)^2)} = 1,08 \text{ м.}$

Приклад 6.2

Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0,50 c$ й $v_2 = 0,75 c$ відносно лабораторної системи відліку. Знайти відносну швидкість частинок.

Розв'язання

$v - ?$	Перейдемо до системи K' , у якій частинка A
$v_1 = 0,50 c$,	(рис. 6.2) перебуває у стані спокою, тобто $v'_1 = 0$.
$v_2 = 0,75 c$	Тоді швидкість $v'_2 = v$ частинки B у цій системі відліку і буде шуканою відносною швидкістю частинок. Для розв'язання задачі використаємо формули перетворення швидкостей у СТВ (6в).

Спрямуємо осі X та X' систем K та K' так, щоб вони були паралельними швидкостям $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ (рис. 6.2). Згідно з формулами перетворення швидкостей у СТВ (6в) швидкості частинок у системі K' будуть мати такі значення:

$$v'_{1x} = \frac{v_{1x} - V}{1 - v_{1x}V/c^2}, \quad v'_{2x} = \frac{v_{2x} - V}{1 - v_{2x}V/c^2}. \quad (1)$$

Візьмемо до уваги, що $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = -v_2$ (рис. 6.2), $v'_{1x} = 0$ (у системі K' частинка A перебуває у стані спокою). Тоді з

першого рівняння системи (1) знаходимо $V = v_1$, а з другого рівняння цієї самої системи

$$v'_{2x} = \frac{-v_2 - v_1}{1 + v_2 v_1 / c^2}. \quad (2)$$

Звідси легко знайти модуль відносної швидкості:

$$v = |v'_{2x}| = \frac{v_2 + v_1}{1 + v_2 v_1 / c^2}. \quad (3)$$

Таким чином, отримали співвідношення (3), яке є розв'язком задачі.

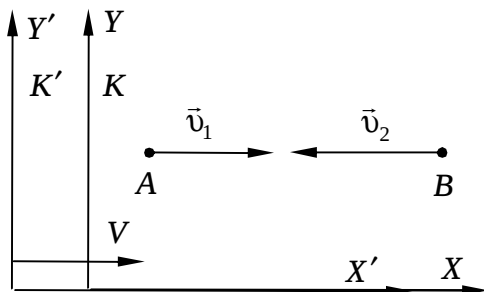


Рисунок 6.2

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дає розрахункова формула (3) правильну одиницю вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праву й ліву частини цього співвідношення замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[v] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{v_2 + v_1}{1 + v_2 v_1 / c^2} \right] = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Виконаємо обчислення:

$$v = \frac{0,75c + 0,50c}{1 + 0,75c \cdot 0,50c / c^2} = \frac{0,75 + 0,50}{1 + 0,75 \cdot 0,50} c = 0,91c.$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість частинки A дорівнює нулю $v_1 = 0$. Тоді відносна швидкість частинок буде дорівнювати швидкості частинки B у системі відліку K , тобто $v = v_2$. З розрахункової формули випливає такий самий

результат. Коли $v_1 = 0$, то
$$v = \frac{v_2 + v_1}{1 + v_2 v_1 / c^2} = \frac{v_2 + 0}{1 + v_2 \cdot 0 / c^2} = v_2.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь:
$$v = (v_2 + v_1) / (1 + v_2 v_1 / c^2) = 0,91c.$$

Приклад 6.3

На частинку масою m діє стала у часі сила F . Знайти залежність швидкості, імпульсу і шляху, пройденого частинкою, від часу. Початкова швидкість частинки дорівнює нулю.

Розв'язання

$$p = p(t) - ?$$

$$v = v(t) - ?$$

$$s = s(t) - ?$$

$$m, F, v_0 = 0$$

Для розв'язання задачі використаємо визначення швидкості, релятивістського імпульсу та релятивістське рівняння динаміки частинки.

Для знаходження імпульсу частинки використаємо релятивістське рівняння динаміки частинки (6г):

$$d\vec{p} / dt = \vec{F}. \quad (1)$$

Беручи до уваги, що початкова швидкість, а отже, і початковий імпульс частинки за умовою задачі дорівнювали нулю, з рівняння (1) одержуємо

$$\int_0^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt \text{ або } \vec{p} = \vec{F} \cdot t. \quad (2)$$

Залежність швидкості від часу знаходимо, використовуючи визначення релятивістського імпульсу (6г):

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (3)$$

Візьмемо до уваги (2) і знаходимо, що

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} \cdot c}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} = \frac{\vec{F} \cdot t \cdot c}{\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}}. \quad (4)$$

Для знаходження шляху використаємо його зв'язок зі швидкістю $v = ds/dt$. Звідси одержуємо

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \frac{F \cdot t \cdot c \cdot dt}{\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}} = \int_0^t \frac{F \cdot c \cdot d(t^2)}{2\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}} = \\ &= \frac{F \cdot c}{F^2} \cdot \sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2} \Big|_0^t = \frac{c}{F} \left(\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2} - mc \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, отримали співвідношення (5), яке є розв'язком задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (3), (4) та (5) правильні одиниці вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праві та ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\vec{p}] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$. З іншого боку,

$$[\vec{F} \cdot t] = \text{Н} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Тобто $\text{кг} \cdot \text{м/с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[\vec{v}] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{\vec{F} \cdot t \cdot c}{\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}} \right] = \frac{(\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с} \cdot \text{м/с}}{\sqrt{(\text{кг} \cdot \text{м/с})^2 + ((\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с})^2}} = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (4) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[s] = \text{м}$. З іншого боку,

$$\left[\frac{c}{F} \left(\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2} - mc \right) \right] =$$

$$= \frac{\text{м/с}}{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2} \left(\sqrt{(\text{кг} \cdot \text{м/с})^2 + ((\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с})^2} - \text{кг} \cdot \text{м/с} \right) = \text{м}.$$

Тобто $\text{м} = \text{м}$. Таким чином, розрахункова формула (5) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо нерелятивістський випадок, коли $v/c \rightarrow 0$. Тоді під дією сталої сили тіло повинно рухатись зі сталим прискоренням $\vec{a} = \vec{F}/m$. Відомо, що швидкість та переміщення $\Delta \vec{r}$ тіла за умови рівноприскореного руху визначається формулами

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{a}t^2/2. \quad (6)$$

Візьмемо до уваги, що початкова швидкість v_0 дорівнює нулю, прискорення, як це впливає з другого закону Ньютона, дорівнює $\vec{a} = \vec{F}/m$, шлях s за умови нульової початкової швидкості дорівнює модулю переміщення $|\Delta \vec{r}|$. Тоді з формул (6) випливає, що у нерелятивістському випадку швидкість, імпульс та шлях визначаються виразами

$$\vec{v} = \vec{F}t/m, \quad (7)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{F}t, \quad (8)$$

$$s = |\Delta \vec{r}| = F t^2 / (2m). \quad (9)$$

З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $v/c \rightarrow 0$, то

$$\vec{v} = \frac{\vec{F} \cdot t \cdot c}{\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}} = \frac{\vec{F} \cdot t}{m \sqrt{1 + (F \cdot t / (mc))^2}} \rightarrow \frac{\vec{F} \cdot t}{m \sqrt{1 + 0}} = \frac{\vec{F} \cdot t}{m} \quad \text{що}$$

збігається з (7);

$$s = \frac{c}{F} \left(\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2} - mc \right) = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + (F \cdot t)^2 / (m^2 c^2)} - 1 \right) \approx \\ \approx \frac{mc^2}{F} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(F \cdot t)^2}{m^2 c^2} - 1 \right) = \frac{F \cdot t^2}{2m}, \text{ що збігається з (9). У цій}$$

формулі використали відоме наближене співвідношення $\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\alpha/2$, де $\alpha \ll 1$. Формули (8) і (2) також збігаються.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\vec{p} = \vec{F} \cdot t$, $\vec{v} = \vec{F} \cdot t \cdot c / \sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}$,

$$s = (c/F) \cdot \left(\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2} - mc \right).$$

Приклад 6.4

Частинка масою m налітає зі швидкістю $v = 0,99c$ на нерухому частинку такої самої маси. Визначити масу і швидкість частинки, що утворилася при їх непружному зіткненні.

Розв'язання

$M - ?$	Після непружного зіткнення частинки рухаються як одне ціле зі швидкістю $\vec{u}$. Позначимо масу частинок після зіткнення через M . На рис. 6.3 зображені частинки: а) до зіткнення; б) після зіткнення. Для розв'язання задачі використаємо закон збереження релятивістського імпульсу та закон збереження повної енергії. Відповідно до цих законів можемо записати
$u - ?$	
m ,	
$v = 0,99c$	

$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + 0 = \frac{M\vec{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \\ \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-0}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \quad (1)$$

Система (1) складається з двох рівнянь відносно двох невідомих M та u . Розв'язуючи їх, знаходимо шукані величини.

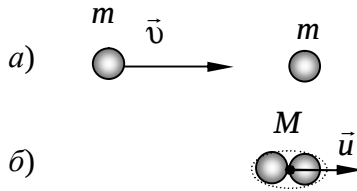


Рисунок 6.3

Розділимо перше рівняння системи на друге і знайдемо швидкість частинок після їх непружного зіткнення:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{1 + \sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (2)$$

Підставимо (2) в друге рівняння системи (1) і отримаємо

$$M = m \left(\sqrt{1 - (v/c)^2} + 1 \right) \sqrt{\frac{1 - (u/c)^2}{1 - (v/c)^2}} = m \sqrt{2 \left(1 + 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \right)}. \quad (3)$$

Таким чином, отримали співвідношення (2) та (3), які є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

1 Перевіримо, чи дають розрахункові формули (2) та (3) правильні одиниці вимірювання шуканої фізичної величини. Для цього в праві та ліві частини цих співвідношень замість символів фізичних величин підставимо їх одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[u] = \text{м/с}$. З іншого боку,

$$\left[\vec{v} / \left(1 + \sqrt{1 - (v/c)^2} \right) \right] = \text{м/с}.$$

Тобто $\text{м/с} = \text{м/с}$. Таким чином, розрахункова формула (2) дає правильні одиниці вимірювання.

Зрозуміло, що $[M] = \text{кг}$. З іншого боку,

$$\left[m \sqrt{2 \left(1 + 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \right)} \right] = \text{кг}.$$

Тобто кг = кг. Таким чином, розрахункова формула (3) дає правильні одиниці вимірювання.

2 Виконаємо обчислення:

$$u = 0,99 \, c / \left(1 + \sqrt{1 - (0,99 \, c / c)^2} \right) = 0,87 \, c ,$$

$$M = m \sqrt{2 \left(1 + 1 / \sqrt{1 - (0,99 \, c / c)^2} \right)} = 4,02 \cdot m .$$

3 Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість частинки v прямує до нуля. Швидкість другої частинки за умовою задачі дорівнює нулю. Тому з фізичних міркувань випливає, що швидкість обох частинок після зіткнення повинна прямувати до нуля. З розрахункової формули (2) випливає такий самий результат.

$$\text{Коли } v \rightarrow 0, \text{ то } u = v / \left(1 + \sqrt{1 - (v / c)^2} \right) \sim v \rightarrow 0 .$$

Випадок, коли $v \rightarrow 0$ є нерелятивістським. Тому маса утвореної частинки з точки зору Ньютонівської механіки повинна прямувати до суми мас вихідних частинок, тобто $M \rightarrow 2m$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $v \rightarrow 0$, то

$$M = m \sqrt{2 \left(1 + 1 / \sqrt{1 - (v / c)^2} \right)} \rightarrow m \sqrt{2 \left(1 + 1 / \sqrt{1} \right)} = 2m .$$

Отже, розрахункові формули (2) та (3) не суперечать фізичним міркуванням.

$$\text{Відповідь: } u = v / \left(1 + \sqrt{1 - (v / c)^2} \right) = 0,87 \, c ,$$

$$M = m \sqrt{2 \left(1 + 1 / \sqrt{1 - (v / c)^2} \right)} = 4,02 \cdot m .$$

6.2 Задачі для самостійного розв'язання

6.1 На космічному кораблі-супутнику знаходиться годинник, який синхронізовано до польоту із земним годинником. Швидкість v_0 корабля-супутника становить 7,9 км/с. На скільки часу відстане годинник на супутнику з погляду земного спостерігача, який спостерігав час за своїм годинником упродовж $\tau_0 = 0,5$ року?

6.2 Фотонна ракета рухається відносно Землі зі швидкістю $v = 0,6c$. У скільки разів сповільниться хід часу в ракеті з погляду земного спостерігача?

6.3 Стрижень знаходиться у стані спокою у системі K' . Його власна довжина l_0 дорівнює 1 м. Стрижень розміщений так, що утворює кут $\phi_0 = 45^\circ$ з віссю X' . Визначити довжину l стрижня і кут ϕ у системі K , якщо швидкість v системи K' відносно K дорівнює $0,8c$.

6.4 У системі K знаходиться квадрат, сторона якого паралельна осі X' . Визначити кут ϕ між його діагоналями в системі K , якщо система K' рухається відносно K із швидкістю $v = 0,95c$.

6.5 У лабораторній системі відліку (система K) π -мезон з моменту народження до моменту розпаду пролетів відстань $l = 75$ м. Швидкість v π -мезона дорівнює $0,995c$. Визначити власний час життя τ_0 мезона.

6.6 Власний час життя τ_0 μ -мезона дорівнює 2 мкс. Від точки народження до точки розпаду в лабораторній системі відліку μ -мезон пролетів відстань $l = 6$ км. З якою швидкістю v (у частках швидкості світла) рухався мезон?

6.7 Дві релятивістські частинки рухаються в лабораторній системі відліку зі швидкостями $v_1 = 0,6c$ і $v_2 = 0,9c$ уздовж однієї прямої. Визначити їх відносну швидкість u у двох випадках: 1) частинки рухаються в одному напрямі; 2) частинки рухаються у протилежних напрямках.

6.8 У лабораторній системі відліку віддаляються одна від одної дві частинки з однаковими за модулем швидкостями. Їх відносна швидкість u дорівнює $0,5 c$. Визначити швидкості частинок.

6.9 Іон, вилетівши з прискорювача, випустив фотон у напрямі свого руху. Визначити швидкість фотона відносно прискорювача, якщо швидкість v іона відносно прискорювача дорівнює $0,8 c$.

6.10 Електрон рухається зі швидкістю $v=0,6 c$. Визначити релятивістський імпульс p електрона.

6.11 Імпульс p релятивістської частинки дорівнює $m_0 c$ (m_0 – маса спокою). Визначити швидкість v частинки (у частках швидкості світла).

6.12 У лабораторній системі відліку знаходяться дві частинки. Одна частинка з масою спокою m_0 рухається із швидкістю $v=0,6 c$, інша – з масою спокою $2m_0$ знаходиться у стані спокою. Визначити швидкість v_C центра мас системи частинок.

6.13 Повна енергія тіла зросла на $\Delta E=1$ Дж. На скільки при цьому зміниться маса тіла?

6.14 Визначити, на скільки повинна збільшитися повна енергія тіла, щоб його релятивістська маса зросла на $\Delta m=1$ г?

6.15 Електрон летить зі швидкістю $v=0,8 c$. Визначити кінетичну енергію T електрона (у мегаелектрон-вольтах).

6.16 Визначити швидкість v електрона, якщо його кінетична енергія дорівнює: 1) $T=4$ МеВ; 2) $T=1$ кеВ.

6.17 Знайти швидкість v протона, якщо його кінетична енергія дорівнює: 1) $T=1$ МеВ; 2) $T=1$ ГеВ.

6.18 Дві релятивістські частинки рухаються назустріч одна одній з однаковими (у лабораторній системі відліку) кінетичними енергіями, які дорівнюють їх енергії спокою. Визначити: 1) швидкості частинок у лабораторній системі відліку; 2) відносну швидкість зближення частинок (в одиницях

с); 3) кінетичну енергію (в одиницях m_0c^2) однієї з частинок в системі відліку, пов'язаній з іншою частинкою.

6.19 Показати, що вираз зв'язку релятивістського імпульсу з кінетичною енергією $p = 1/c \sqrt{(2E_0 + T)T}$ за умови $v \ll c$ переходить у відповідний вираз класичної механіки.

6.20 Визначити імпульс p частинки (в одиницях m_0c), якщо її кінетична енергія дорівнює енергії спокою.

6.21 Визначити кінетичну енергію T релятивістської частинки (в одиницях m_0c^2), якщо її імпульс $p = m_0c$.

6.22 Кінетична енергія релятивістської частинки дорівнює її енергії спокою. У скільки разів зросте імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться в $n=4$ разів?

6.23 Імпульс p релятивістської частинки дорівнює m_0c . Під дією зовнішньої сили імпульс частинки збільшився в два рази. У скільки разів зросте при цьому енергія частинки: 1) кінетична; 2) повна?

6.24 При непружному зіткненні частинки, що має імпульс $p = m_0c$, і такою самою частинкою, що знаходиться у стані спокою, утворюється складена частинка. Визначити: 1) швидкість v частинки (в одиницях c) до зіткнення; 2) релятивістську масу складеної частинки (в одиницях m_0); 3) швидкість складеної частинки (в одиницях c); 4) масу спокою складеної частинки (в одиницях m_0); 5) кінетичну енергію частинки до зіткнення і кінетичну енергію складеної частинки (в одиницях m_0c^2).

6.25 Частинка з кінетичною енергією $T = m_0c^2$ налітає на іншу таку саму частинку, яка в лабораторній системі відліку знаходиться у стані спокою. Знайти сумарну кінетичну енергію T' частинок в системі відліку, пов'язаній з центром інерції системи частинок.

6.26 На діаграмі простору – часу показано три події A , B і C (рис. 6.4), які відбулися на осі x деякої інерціальної системи відліку. Знайти: а) проміжок часу між подіями A і B у тій системі відліку, де обидві події відбулися в одній точці; б) відстань між точками, де відбулися події A і C , у тій системі відліку, де вони одночасні.

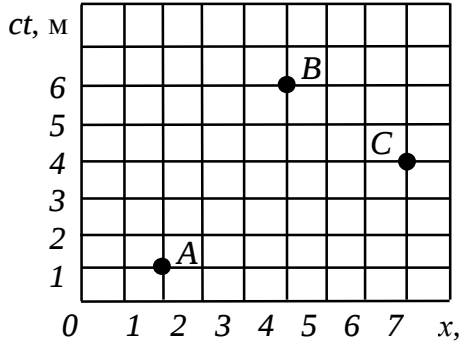


Рисунок 6.4

6.27 Прямокутний трикутник, у якого катет $a=5,00$ м, має кут між цим катетом і гіпотенузою $\alpha=30^\circ$. Знайти в системі відліку K' , що рухається відносно цього трикутника із швидкістю $v=0,866c$ уздовж катета a : а) відповідне значення кута α' ; б) довжину l' гіпотенузи і її відношення до власної довжини.

6.28 Власний час життя деякої нестабільної частинки $\Delta t_0=10$ нс. Який шлях пролетить ця частинка до розпаду в лабораторній системі відліку, де її час життя $\Delta t=20$ нс?

6.29 У площині XY K -системи відліку рухається частинка, проекції швидкості якої дорівнюють v_x та v_y . Знайти швидкість v' цієї частинки у K' -системі, яка переміщується із швидкістю V відносно K -системи в додатному напрямі її осі X .

6.30 Дві релятивістські частинки рухаються під прямим кутом одна до одної в лабораторній системі відліку, причому одна із швидкістю v_1 , а інша зі швидкістю v_2 . Знайти їх відносну швидкість.

6.31 K' -система переміщується зі сталою швидкістю V відносно K -системи. Знайти прискорення a' частинки у K' -системі, якщо в K -системі вона рухається зі швидкістю v і прискоренням a по прямій: а) у напрямі вектора $\vec{V}$; б) перпендикулярно до вектора $\vec{V}$.

6.32 Густина тіла, що перебуває у стані спокою, дорівнює ρ_0 . Знайти швидкість системи відліку, у якому його густина буде на $\eta=25\%$ більша за ρ_0 . Густину визначити як відношення маси спокою тіла до його об'єму.

6.33 Знайти швидкість, для якої релятивістський імпульс частинки в $\eta=2$ рази перевищує її ньютонівський імпульс.

6.34 Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити швидкість частинки з масою m від $0,60\text{ с}$ до $0,80\text{ с}$? Порівняти отриманий результат із значенням, обчисленим за нерелятивістською формулою.

6.35 При якій швидкості кінетична енергія частинки дорівнює її енергії спокою?

6.36 Скільки енергії (з розрахунку на одиницю маси) необхідно витратити, щоб надати космічному кораблю, що спочатку знаходився у стані спокою, швидкість $v=0,980\text{ с}$?

6.37 Показати, що для частинки величина $E^2 - p^2 c^2$ є інваріантом, тобто має одне і те саме значення у всіх інерціальних системах відліку. Яке значення цього інваріанта?

6.38 Нейтрон із кінетичною енергією $T = 2mc^2$, де m – його маса спокою, налітає на інший, нейтрон, що знаходиться у стані спокою. Знайти у системі їх центра мас: а) сумарну кінетичну енергію $\tilde{T}$ нейтронів; б) імпульс $\tilde{p}$ кожного нейтрона.

6.39 Яка повинна бути кінетична енергія протона, що налітає на інший протон, що знаходиться у стані спокою, щоб їх сумарна кінетична енергія в системі центра мас була така сама, як у двох протонів, що рухаються назустріч один одному з кінетичними енергіями $T=25,0\text{ Гев}$?

6.40 Релятивістська ракета викидає струмінь газу з нерелятивістською швидкістю u , яка є сталою відносно ракети. Знайти залежність швидкості v ракети від її маси m , якщо в початковий момент маса ракети дорівнює m_0 .

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$1.1 \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\alpha t^4 / 12)^2 + (\beta t^2 / 2)^2} = 1,52 \text{ м.}$$

$$1.2 \quad v = 13,038 \text{ м/с, } a = 4,02 \text{ м/с}^2.$$

$$1.3 \quad \langle v \rangle = 3,4 \text{ м/с.}$$

$$1.4 \quad \langle v \rangle = \sqrt{700} \text{ м/с.}$$

$$1.5 \quad s \gg 3,3 \cdot 10^2 \text{ м.}$$

$$1.6 \quad v = v_1 / \operatorname{tg} \alpha \approx 8,6 \text{ м/с.}$$

$$1.7 \quad s = 100 \text{ м.}$$

$$1.8 \quad s = 13 \text{ м, } |\Delta \vec{r}| = 5 \text{ м.}$$

$$1.9 \quad t = 10 \text{ с, } l = 100 \text{ м.}$$

$$1.10 \quad \langle v \rangle = 3v_1(v_2 + v_3) / (v_2 + v_3 + 4v_1) = 4,09 \text{ м/с.}$$

$$1.11 \quad a = \sqrt{14} \text{ м/с}^2.$$

$$1.12 \quad R \approx 1275 \text{ м.}$$

$$1.13 \quad a_\tau = \frac{-g(v_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}} = 2,6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = 9,5 \text{ м/с}^2, \quad (a_n)_{\max} = g, \quad (a_\tau)_{\max} = g \sin \alpha = 4,91 \text{ м/с}^2.$$

$$1.14 \quad v = 35,8 \text{ м/с, } a_\tau = 5,38 \text{ м/с}^2, \quad a_n = 8,22 \text{ м/с}^2.$$

$$1.15 \quad l = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin \theta)} = 22 \text{ м.}$$

$$1.16 \quad a_\tau = \left(\frac{2}{t} \sqrt{\frac{a_n}{R}} - \frac{4\pi n}{t^2} \right) R = -0,257 \text{ м/с}^2.$$

$$1.17 \quad n \approx 9 \text{ об/с, } a \approx 930 \text{ м/с}^2.$$

$$1.18 \quad v \approx 7,55 \text{ км/с, } \omega \approx 9,97 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с, } a_{\text{доп}} \approx 7,53 \text{ м/с}^2.$$

$$1.19 \quad \text{Не можна, оскільки } v \approx 52 \text{ м/с.}$$

$$1.20 \quad v = 6000 \text{ об/хв.}$$

$$1.21 \quad \text{У 5 разів.}$$

$$1.22 \Delta s / \Delta r = \pi / 6 \cdot 4 / \sqrt{2 - 2 \cos(\pi / 6 \cdot 4)} \approx 1,21$$

$$1.23 h = 78,4 \text{ м}, v = 39,2 \text{ м/с}.$$

$$1.24 h = 40 \text{ м}.$$

$$1.25 v_0 = 58,8 \text{ м/с}, h = 176,4 \text{ м}.$$

$$1.26 v_0 = 44,2 \text{ м/с}, h = 75 \text{ м}; v \approx 22,1 \text{ м/с}.$$

$$1.27 v_0 \approx 58,8 \text{ м/с}.$$

$$1.28 s \approx 990 \text{ м}.$$

$$1.29 t \approx 2,0 \text{ с}, v = 25 \text{ м/с}, \alpha \approx 53^\circ.$$

$$1.30 v_0 = \frac{L}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(L \operatorname{tg} \alpha - H + h)}} \approx 13,8 \text{ м/с}.$$

$$1.31 v_g = 2v, v_h = 0.$$

$$1.32 R = 3,8 \text{ м}.$$

$$1.33 \vec{v} = 10 \cos(5t) \vec{e}_x - 15 \sin(10t) \vec{e}_y,$$

$$\vec{a} = -50 \sin(5t) \vec{e}_x - 150 \cos(10t) \vec{e}_y, y = 3 - 3/4x^2.$$

$$1.34 \vec{r} = (0,5t^4 - t) \vec{e}_x + (3/2\pi) \cdot (\cos(2\pi t/3) - 1) \vec{e}_y.$$

$$1.35 r \approx 1,52 \text{ м}.$$

$$1.36 t = \sqrt{v_0 / \alpha} \approx 7 \text{ с}, x = v_0 t - \alpha t^3 / 3 \approx 236 \text{ м}.$$

$$1.37 v_{01} = (\kappa/3)^{4/3} \sqrt{(12h_0 / \kappa)^3} \approx 12,1 \text{ км/год}.$$

$$1.38 s = 2vt.$$

$$1.39 v_0 = 11,3 \text{ м/с}, x = 4 \text{ м}, y = 0,8 \text{ м}, t = 0,5 \text{ с}, v_A = 9,4 \text{ м/с},$$

$$v_B = 15,2 \text{ м/с}.$$

$$1.40 1) l = t \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)};$$

$$2) l = t \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}.$$

$$1.41 \tau = (3/2) \sqrt{2(H-h)/g} + \sqrt{(H+3h)/(2g)},$$

$$l = (\sqrt{3}/2) \cdot \left(H - h + \sqrt{H^2 + 2hH - 3h^2} \right).$$

$$1.42 \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{2H/g}}{\sqrt{2(H-h)/g} + \sqrt{2h/g}}, \frac{h}{H} = \frac{1}{2}.$$

$$1.43 \quad L = (v_0^2 \sin 2\alpha / g) - l \approx 6 \text{ м.}$$

$$1.44 \quad L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g \cos \beta} (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha).$$

$$1.45 \quad s_{\min} = l(v_2 - v_1) / \sqrt{2(v_2^2 + v_1^2)}.$$

$$1.46 \quad \langle v \rangle = 3 \text{ м/с.}$$

$$1.47 \quad \operatorname{tg} \alpha = 1 / (4\pi N) = 0,04.$$

$$1.48 \quad \omega = \frac{v}{r} \sqrt{1 + (r/R)^2}, \quad \beta = \frac{v^2}{rR} = 0,5 \text{ рад/с}^2, \quad \alpha = \operatorname{arctg}(R/r) = 83^\circ.$$

$$1.49 \quad v_{\max} = \sqrt{v^2 + \omega^2 d^2 / 4} = 701,9 \text{ м/с.}$$

$$1.50 \quad t_{1,2} = (v_0 \sin \alpha \pm v_0 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta) / g = 0,3 \text{ с та } 1,14 \text{ с.}$$

$$1.51 \quad l = (v_1 + v_2) \sqrt{v_1 v_2} / g = 2,5 \text{ м.}$$

$$1.52 \quad t = 2a / 3v.$$

$$1.53 \quad t_m = (v_1 l_1 + v_2 l_2) / (v_1^2 + v_2^2), \quad l_{\min} = |l_1 v_2 - l_2 v_1| / \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

$$1.54 \text{ а) } \langle v \rangle = \pi R / \tau = 50 \text{ см/с; б) } |\langle \vec{v} \rangle| = 2R / \tau = 32 \text{ см/с;}$$

$$\text{в) } |\langle \vec{a} \rangle| = 2\pi R / \tau^2 = 10 \text{ см/с}^2.$$

$$1.55 \text{ а) } \vec{v} = \vec{b}(1 - 2\alpha t), \quad \vec{a} = -2\alpha \vec{b} = \text{const}; \text{ б) } \Delta t = 1/\alpha, \quad s = b/2\alpha.$$

$$1.56 \text{ а) } 0,7 \text{ с; б) відповідно } 0,7 \text{ та } 1,3 \text{ м.}$$

$$1.57 \text{ а) } v_x = \alpha^2 t / 2, \quad a_x = \alpha^2 / 2; \text{ б) } \langle v_x \rangle = (\alpha/2)\sqrt{s}.$$

$$1.58 \text{ а) } y = x^2 \beta / \alpha^2; \text{ б) } \vec{v} = \alpha \vec{e}_x + 2\beta t \vec{e}_y, \quad \vec{a} = 2\beta \vec{e}_y,$$

$$v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}, \quad a = 2\beta; \text{ в) } \operatorname{tg} \varphi = \alpha / 2\beta t.$$

$$2.1 \quad s_1 = Ft^2 / (2m_1) = 1,6 \text{ м}, \quad s_2 = Ft^2 / (2m_2) = 2,0 \text{ м.}$$

$$2.2 \quad s_1 = s \cdot m_2 / (m_1 + m_2) = 8 \text{ м}, \quad s_2 = s \cdot m_1 / (m_1 + m_2) = 2 \text{ м.}$$

$$2.3 \quad T_1/T_2 = \cos \alpha_2 / \cos \alpha_1 = \sqrt{2/3}, \quad \omega_1/\omega_2 = \sqrt{\cos \alpha_2 / \cos \alpha_1} = \sqrt[4]{2/3}.$$

$$2.4 \quad \text{Не рухатиметься.}$$

$$2.5 \quad m \approx 380 \text{ кг.}$$

$$2.6 \quad F = 490 \text{ Н.}$$

$$2.7 F_{менл} = 55 \cdot 10^3 \text{ H}, F_{зченл1} = 30 \cdot 10^3 \text{ H}, F_{зченл2} = 15 \cdot 10^3 \text{ H}.$$

$$2.8 F_{мер} = \mu(mg - F \sin \alpha).$$

$$2.9 F_{мер} = mg \sin \alpha.$$

$$2.10 F = (M + m)g\mu_0.$$

$$2.11 F_1 / F_2 = (gR - v^2) / (gR + v^2) = 0,43.$$

$$2.12 v_0 = \sqrt{gl(n-5)} = 7 \text{ м/с}.$$

$$2.13 v_1 / v_2 = 1.$$

$$2.14 \mu = \sin \alpha / (1 + \cos \alpha).$$

$$2.15 v = v_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}} \approx 13,8 \text{ м/с}, l = \frac{v_0^2 m^2}{2\mu g M (M+m)} \approx 0,37 \text{ м}.$$

$$2.16 a = (F / m)(\cos \beta + \mu \sin \beta) - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

$$2.17 v = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)}.$$

$$2.18 a = (F_2 / m) + (F_1 / m) \cdot (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu g = 1,4 \text{ м/с}^2.$$

$$2.19 \alpha = \arctg(a / g) = 17^\circ, T = m\sqrt{a^2 + g^2} = 20,5 \text{ H}.$$

$$2.20 t = \sqrt{2l[g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)]^{-1}} = 1,4 \text{ с}.$$

$$2.21 \rho = (P_2 \rho_1 - P_1 \rho_2) / (P_2 - P_1).$$

$$2.22 \rho_2 = \rho_1 (P - P_2) / (P - P_1).$$

$$2.23 T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 1 \text{ год } 25 \text{ хв}.$$

$$2.24 v_1 = \sqrt{GM_3 / R_3} \approx 7,9 \text{ км/с}.$$

$$2.25 \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{R+h_2}{R+h_1}}, \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R+h_1}{R+h_2} \right)^{3/2}.$$

$$2.26 \tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \left(1 + \frac{F}{mg} \operatorname{tg} \alpha \right), H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

$$2.27 \alpha = \arctg(1/4 - F/(mg)).$$

$$2.28 v = (F \cos \alpha - \mu(Mg - F \sin \alpha)) \cdot t / M \approx 37,2 \text{ м/с}.$$

$$2.29 1) a = (F \cos \alpha - 2kmg + kF \sin \alpha) / (2m) \approx 2,6 \text{ м/с}^2;$$

$$2) T = (F/2)(\cos \alpha + k \sin \alpha) \approx 42 \text{ H};$$

$$3) F = 2km g / (\cos \alpha + k \sin \alpha) \approx 8,2 \text{ Н.}$$

$$2.30 N = mg(R - 3h) / R, \quad h_0 = R / 3.$$

$$2.31 h = (25 / 27) l.$$

$$2.32 F = m \cdot l \cdot n^2 = 3,6 \text{ Н.}$$

$$2.33 a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \quad T = \frac{2m_2 m_1}{m_2 + m_1} g, \quad l = l_0 + \frac{4m_2 m_1}{k(m_2 + m_1)} g.$$

$$2.34 x = 2\pi h^2 \cos \varphi / (vT) = 1,82 \text{ м} \quad (T - \text{період обертання Землі}).$$

Кулька відхилиться на захід.

$$2.35 \alpha = \arctg(g / a) = 84,18^\circ.$$

$$2.36 \rho = 81\pi / 8GT^2.$$

$$2.37 \rho = 3\pi / T^2 G \approx 110 \text{ кг/м}^3.$$

$$2.38 F = mg(H / h + 1) - V\rho_{\text{води}} g, \quad h_1 = 2h(V\rho_{\text{води}} / m - 1) - H.$$

$$3.1 \text{ 1) } 6,3 \text{ м/с; 2) } -0,57 \text{ м/с.}$$

$$3.2 \text{ 1) } 1 \text{ м/с; 2) } 3 \text{ м/с.}$$

$$3.3 v_1 = 0,4 \text{ м/с.}$$

$$3.4 u_2 = 114 \text{ м/с.}$$

$$3.5 u_{1x} = 0,385 \text{ м/с, } u_{2x} = -0,615 \text{ м/с.}$$

$$3.6 A = \mu \cdot g \cdot m \cdot s + mv^2 / 2 = 996 \text{ Дж.}$$

$$3.7 1,35 \text{ кДж.}$$

$$3.8 2,94 \text{ кДж, } 6 \text{ кДж.}$$

$$3.9 5 \text{ Дж; } 15 \text{ Дж.}$$

$$3.10 P = (1/d) \sqrt{m^3 g^3 / (\pi \rho)}; \text{ 1) } 139 \text{ кВт; 2) } 313 \text{ кВт.}$$

$$3.11 0,32 \text{ Вт, } 56 \text{ Вт.}$$

$$3.12 v = \sqrt{5gR} = 14 \text{ м/с.}$$

$$3.13 T_2 = (m_1 / m_2) \cdot T_1 = 30 \text{ кДж.}$$

$$3.14 T_2 = (m_1 / m_2) \cdot T_1 = 12 \text{ нДж.}$$

$$3.15 A = 390 \text{ Дж.}$$

$$3.16 h = m^2 v^2 / (2Mg) = 7,34 \text{ см.}$$

$$3.17 \quad v = (M + m)\sqrt{2gh} / m = 701 \text{ м/с.}$$

$$3.18 \quad h = l(1 - \cos \varphi) m_1 / (m_1 + m_2) = 16 \text{ см.}$$

$$3.19 \quad \Delta U = m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 / (2(m_1 + m_2)); \quad 1) 9,6 \text{ Дж}; \quad 2) 86,4 \text{ Дж.}$$

$$3.20 \quad u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2), \quad \omega = m_2 / (m_1 + m_2); \quad 1) u = 1 \text{ м/с}, \quad \omega = 0,8;$$

$$2) u = 4 \text{ м/с}, \quad \omega = 0,2.$$

$$3.21 \quad 1) p'_1 = (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2) = -6 \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$p'_2 = 2m_2 / (m_1 + m_2) = 16 \text{ кг} \cdot \text{м/с}; \quad 2) \Delta p_1 = -p'_2 = -16 \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$3) T_1' = \frac{p_1^2 (m_1 - m_2)}{2m_1 (m_1 + m_2)} = 9 \text{ Дж}, \quad T_2' = \frac{2m_2 p_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = 16 \text{ Дж};$$

$$4) |\Delta T_1| = T_2' = 16 \text{ Дж}; \quad 5) \omega = |\Delta T_1| / T_1 = 4m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2 = 0,64.$$

$$3.22 \quad 1) p'_1 = m_1 p_1 / (m_1 + m_2) = 3 \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

$$p'_2 = m_2 p_1 / (m_1 + m_2) = 2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}; \quad 2) \Delta p_1 = -p'_2 = -2 \text{ кг} \cdot \text{м/с};$$

$$3) T_1' = \frac{m_1 p_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} = 0,75 \text{ Дж}, \quad T_2' = \frac{m_2 p_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} = 0,5 \text{ Дж};$$

$$4) \Delta T_1 = \frac{m_2 (2m_1 + m_2) p_1^2}{2(m_1 + m_2)^2 m_1} = 1,33 \text{ Дж}; \quad 5) \omega_1 = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0,24,$$

$$\omega_2 = \frac{T_1'}{T_1} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = 0,36; \quad 6) \Delta U = \frac{m_2 p_1^2}{2m_1 (m_1 + m_2)^2} = 0,833 \text{ Дж};$$

$$7) \omega = \Delta U / T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,4.$$

$$3.23 \quad \eta = m_2 / (m_1 + m_2) = 0,952.$$

$$3.24 \quad \eta = m_1 / (m_1 + m_2) = 0,833.$$

$$3.25 \quad \eta = m_1 / (m_1 + m_2) = 0,93.$$

$$3.26 \quad 1) u_1 = v_1 \cos \alpha = 1,73 \text{ м/с}, \quad u_2 = v_1 \sin \alpha = 1 \text{ м/с};$$

$$2) \beta = \pi / 2 - \alpha = 60^\circ.$$

$$3.27 \alpha = \arccos \left(\frac{T_1 + (T_1 - T_2) - (m_1 / m_2) T_2}{2\sqrt{T_1 (T_1 - T_2)}} \right) = 144^\circ.$$

$$3.28 A_1 \approx 1,0 \cdot 10^4 \text{ Дж}, A_2 \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

$$3.29 A = r v_0 t^2 / 2 - r^2 t^4 / (8m) \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

$$3.30 A = h^2 \rho g \pi (D^2 - d^2) / 8 = 86,3 \text{ МДж}.$$

$$3.31 A = 18,7 \cdot 10^8 \text{ Дж}.$$

$$3.32 v = \sqrt{2gl/3} = 3,6 \text{ м/с}.$$

$$3.33 v = \sqrt{2GM/r}.$$

$$3.34 p = (2m/3)\sqrt{2gl} = 3,5 \text{ кг·м/с}.$$

$$3.35 \vec{v}_{\text{задн}} = \vec{v}_0 - \vec{u}m/(M+m), \vec{v}_{\text{неп}} = \vec{v}_0 + \vec{u}mM/(M+m)^2.$$

$$3.36 F = 2\alpha s \sqrt{1 + (s/R)^2}.$$

$$3.37 P = mR\alpha t, <P> = mR\alpha t/2.$$

$$3.38 A_{\text{сноп}} = m(v_2^2 - v_1^2)/2 + \alpha(x_2 y_2 - x_1 y_1) = 6 \text{ МДж}.$$

$$3.39 h = H/2, s_{\text{макс}} = H.$$

$$3.40 F = \sqrt{km(2gl - v^2)} = 8 \text{ Н}.$$

$$3.41 m_1/m_2 = 1 + 2\cos\theta = 2,0.$$

$$3.42 \alpha = \arccos(2/3) = 0,268\pi \text{ рад}.$$

$$3.43 n = 8 \text{ с}^{-1}, A = 2ml_1^2 \pi^2 n^2 ((l_1/l_2)^2 - 1) = 20,44 \text{ Дж}.$$

$$3.44 n_2 = n_1 (I + 2ml_1^2) / (I + 2ml_2^2) = 2,55 \text{ с}^{-1},$$

$$A = (I + 2ml_2^2) 2\pi^2 n_2^2 - (I + 2ml_1^2) 2\pi^2 n_1^2 = 225,94 \text{ Дж}.$$

$$3.45 \alpha = \arccos(1 - m^2 v^2 / (4(m+M)^2 gR)) = 27^\circ.$$

$$3.46 v_0 = Ml\omega/(2m) = Ml\sqrt{3g(1 - \cos\alpha)/l}/(2m) = 0,27 \text{ м/с}.$$

$$4.1 a = 2g(m_2 - m_1)/(2(m_1 + m_2) + m) = 1,78 \text{ м/с}^2,$$

$$T_1 = m_1 g(4m_2 + m)/(2(m_1 + m_2) + m) = 23,19 \text{ Н},$$

$$T_2 = m_2 g(4m_1 + m)/(2(m_1 + m_2) + m) = 24,08 \text{ Н}.$$

4.2 $a = 2(m_1 g - 3t - 2t^3)/(2m_1 + m)$, $a_1 = 1,92 \text{ м/с}^2$ – вантаж рухається вниз; $a_2 = 4,88 \text{ м/с}^2$ – вантаж рухається вгору.

4.3 $M = mA\omega R^2 \cos \omega t / 2$, $L = mA\omega^2 R^2 \sin \omega t / 2$.

4.4 $a = 0,71g \sin \alpha = 3,5 \text{ м/с}^2$, $F_{\text{тер}} = 2mg \sin \alpha / 7 = 0,14 \text{ Н}$, $A = 0$.

4.5 $h = 7v^2 / (10g) = 7,14 \text{ м}$.

4.6 $M = 100\eta P / (2\pi n) = 2695 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

4.7 $T = L\beta t_2^2 / 2t_1 = 281 \text{ кДж}$.

4.8 $P = Mm_1 v / ((m_1 + m_2)R) = 0,57 \text{ мВт}$.

4.9 $T_{\text{пост}} / T_{\text{об}} = 2(m_1 + m_2) / m = 1,5$.

4.10 $I_z = 2m_1 d^2 (1 - \cos^2(a/2) \cdot 2m_1 / (2m_1 + m_2)) = 6,80 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.11 $a = 2m_2 g / (m_1 + 2m_2) = 2,8 \text{ м/с}^2$.

4.12 1) $M = -mr^2 \pi n / t = -1 \text{ Н}\cdot\text{м}$; 2) $M = -mr^2 \pi n^2 / (2N) = -1 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

4.13 $I = ma^2$; 1) $4 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; 2) $2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.14 1) $I = ml^2 / 3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$;

2) $I = ml^2 / 12 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; 3) $I = ml^2 / 9 = 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.15 $I = ml^2 / 12 + m(l/2 - a)^2 = 0,004 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.16 $I = (\tau a^2 / 2)(a/3 + b) = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.17 $I = 3mR^2 / 4 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.18 $I = ma^2 / 3 = 4,27 \cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.19 $I = \sigma a^3 b / 12 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

4.20 $\langle P \rangle = 12,8 \text{ кВт}$.

4.21 $M = \text{const} = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $P = D + Et$, де $D = 3,2 \text{ кВт}$;
 $E = -0,8 \text{ кВт/с}$, $P(3) = 0,8 \text{ кВт}$.

4.22 $A = n\pi^2 m R^2$, $A_1 = 7,11 \text{ Дж}$, $A_2 = 28,44 \text{ Дж}$.

4.23 $T = M^2 t^2 / (2I) = 500 \text{ Дж}$.

4.24 $T_1 = 10 \text{ Дж}$, $T_2 = 4 \text{ Дж}$.

4.25 $t = 2l / \sqrt{gh} = 4,04 \text{ с}$.

4.26 а) $I = \pi \rho b R^4 / 2 = 2,8 \text{ г}\cdot\text{м}^2$; б) $I = 3mR^2 / 10$.

$$4.27 \quad \omega = \sqrt{6F \sin \varphi / (ml)}.$$

$$4.28 \quad t = 3\omega R / (4\mu g).$$

$$4.29 \quad \langle \omega \rangle = \omega_0 / 3.$$

$$4.30 \quad 1) \mu \geq 2/7 \operatorname{tg} \alpha; \quad 2) \quad T = 5/14 \, mg^2 t^2 \sin^2 \alpha.$$

$$4.31 \quad a = 2/3(g - a_0), \quad F = 1/3m(g - a_0).$$

$$4.32 \quad a_1 = F / (m_1 + 2m_2 / 7), \quad a_2 = 2a_1 / 7.$$

$$4.33 \quad 1) \quad t = \omega_0 R / (3\mu g); \quad 2) \quad A = -m\omega_0^2 R^2 / 6.$$

$$4.34 \quad \omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}.$$

$$4.35 \quad v = \omega_0 l / \sqrt{1 + 3m/M}.$$

$$4.36 \quad F = 9p^2 / (2ml) = 9 \text{ Н}.$$

$$4.37 \quad F = \frac{8Mv^2}{l(1 + 4M/3m)^2}.$$

$$4.38 \quad N_z = -\frac{m_1 m_2 R}{2m_1 + m_2} \frac{dv(t)}{dt}.$$

$$4.39 \quad I_1 = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_2 = 62,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \delta = 1,6\%.$$

$$4.40 \quad \beta = 2,35 \text{ рад/с}^2.$$

$$4.41 \quad F = 0,4 \text{ Н}.$$

$$4.42 \quad M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$4.43 \quad T_2 \approx 2,4 \text{ Дж}.$$

$$4.44 \quad A = 355 \text{ Дж}.$$

$$4.45 \quad L = 229 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

$$4.46 \quad s = 4,1 \text{ м}.$$

$$4.47 \quad H = 2R + 0,5R(1 + m_1/m) = 7,56 \text{ м}.$$

$$4.48 \quad v = \sqrt{2mgh/(m + I/R^2)}; \quad 1) \quad 2,65 \text{ м/с}; \quad 2) \quad 2,56 \text{ м/с}; \quad 3) \quad 2,21 \text{ м/с};$$

$$4) \quad 3,13 \text{ м/с}.$$

$$4.49 \quad t = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h(m + I/R^2)}{mg}}, \quad t_{a\lambda} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{3h}{g}} = 0,78 \text{ с},$$

$$t_{ce} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g} \left(1 + \frac{2\rho_{ce} - \rho_{al}}{2\rho_{ce}} \right)} = 0,88 \text{ с.}$$

$$4.50 \text{ 1) } M_{mp} = 308 \text{ Н}\cdot\text{м; 2) } t = 100 \text{ с.}$$

$$4.51 \text{ } t = T / (\pi \cdot n \cdot M) = 5 \text{ с.}$$

$$4.52 \text{ } T = F^2 \Delta t^2 / m = 2 \text{ кДж.}$$

$$4.53 \text{ } \beta = \frac{8Fr}{mD^2} = 42,7 \text{ рад/с}^2, \text{ } n = \frac{8Frt}{2\pi mD^2} = 68 \text{ с}^{-1}.$$

$$4.54 \text{ } I = (m_2(g - \beta R) - m_1(g + \beta R))R / \beta = 1,26 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$4.55 \text{ } M = -\pi m n D^2 / (2t) = -1,27 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$4.56 \text{ } a_c = 4F / (3m) = 4 \text{ м/с}^2, \text{ } F_{мер} = F / 3 = 10 \text{ Н.}$$

$$4.57 \text{ } a_c = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3M}{8m} \right)^{-1} g, \text{ } a = \left(1 + \frac{3M}{8m} \right)^{-1} g, \text{ } T = \frac{3M}{8} \left(1 + \frac{3M}{8m} \right)^{-1} g.$$

$$4.58 \text{ } \omega = m\sqrt{2gh} / [(m + 0,5M)R].$$

$$4.59 \text{ } \omega = 3,42 \text{ рад/с.}$$

$$4.60 \text{ } v = 2\pi n R m_1 / (m_1 + 2m_2) = 0,942 \text{ м/с.}$$

$$4.61 \text{ } u = v(3m - 4M) \setminus (3m + 4M).$$

$$4.62 \text{ 1) } \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}; \text{ 2) } A = -\frac{I_1I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

$$4.63 \text{ } Q = 2,52 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

$$4.64 \text{ } v = 7,1 \text{ м/с.}$$

$$4.65 \text{ } \omega_1 = \omega_2 = 14 \text{ рад/с; 1) } v_1 = 1,05 \text{ м/с; 2) } v_2 = 2,8 \text{ м/с.}$$

$$4.66 \text{ } \omega = 4m_2u_2 / [(2 + m_2 / m_1)D] = 0,98 \text{ рад/с.}$$

$$4.67 \text{ } \varphi_n = 2\pi m_2 / (0,5m_n + m_2) = 8\pi / 11.$$

$$4.68 \text{ } A = 162 \text{ Дж.}$$

$$4.69 \text{ } n = 21 \text{ об/хв, у 1,05 рази.}$$

$$4.70 \text{ } T = 3m^2v_0^2 / 2m_c = 25 \text{ Дж, } \alpha = \arccos(1 - 3m^2v_0^2 / (m_c gl)) \approx 54^\circ.$$

$$4.71 \text{ } m_2 = 2m_1n_1 / (n_2 - n_1) = 560 \text{ кг.}$$

$$4.72 \text{ } N = 3R\omega_0^2 / (16\pi\mu g) \approx 15.$$

$$5.1 \text{ } \sigma = 22,2 \text{ мН/м.}$$

5.2 $d_2 = 4,4 \text{ мм.}$

5.3 $A = 3 \text{ мДж.}$

5.4 $E = 2,6 \text{ мкДж.}$

5.5 $\rho = 3,2 \text{ кг/м}^3.$

5.6 $62,5 \text{ Па.}$

5.7 $\sigma = 62 \text{ мН/м.}$

5.8 $\sigma = 22,5 \text{ мН/м.}$

5.9 $\sigma = 22 \text{ мН/м.}$

5.10 $m = 23,1 \text{ мг.}$

5.11 $h = 6,37 \text{ см.}$

5.12 $p = 26 \text{ кПа.}$

5.13 $h = 7,3 \text{ см.}$

5.14 $v_2 = 0,45 \text{ м/с.}$

5.15 $v_2 = 4,33 \text{ м/с.}$

5.16 $Q_V = S_1 v_1 = S_1 S_2 \times \sqrt{2g\Delta h / (S_1^2 - S_2^2)} = 1,88 \text{ л/с.}$

5.17 $v_2 = 100 \text{ м/с, } p = 5 \text{ МПа.}$

5.18 $v = 8,80 \text{ м/с.}$

5.19 $F = 31,4 \text{ Н.}$

5.20 $l = 1,4 \text{ м.}$

5.21 $p = \frac{\rho g l^2}{4H} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right] = 77,9 \text{ кПа.}$

5.22 $h = 1 \text{ м.}$

5.23 $Re = \rho \langle v \rangle d / \eta = 5000; Re > Re_{кр}, \text{ тому рух турбулентний.}$

5.24 $Q_{m_{\max}} = \pi \eta Re_{кр} d / 4 = 54,2 \text{ г/с.}$

5.25 $Re = \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) g d^3 / (18 \eta^2) = 4,17; Re > Re_{кр}, \text{ тому рух турбулентний.}$

5.26 $v = (\rho_1 - \rho_2) g d^2 / (18 \eta) = 6,71 \text{ мм/с; } 2) \text{ обтікання кульки ламінарне.}$

$$5.27 \quad v_2 = \frac{\rho_1 r_1 \eta_1}{\rho_2 r_2 \eta_2} v_1 = 27,7 \text{ см/с.}$$

$$5.28 \quad Q = S \sqrt{2g\Delta h \rho_0 / \rho}.$$

$$5.29 \quad v = \sqrt{2g(h_1 + h_2 \rho_2 / \rho_1)} = 3 \text{ м/с.}$$

$$5.30 \quad h = v^2 / 2g - h_0 = 20 \text{ см.}$$

$$5.31 \quad p = p_0 + \rho g h (1 - R_1^2 / r^2), \text{ де } R_1 < r < R_2; \quad p_0 - \text{атмосферный тиск.}$$

$$5.32 \quad \tau \approx (S / s) \sqrt{2h / g}.$$

$$5.33 \text{ а) } Q = (\pi / 2) v_0 R^2; \text{ б) } T = (\pi / 6) l R^2 \rho v_0^2; \text{ в) } F_{mp} = 4\pi \eta l v_0; \\ \text{г) } \Delta p = 4\eta l v_0 / R^2.$$

$$5.34 \quad \exp(\alpha \Delta x) = 5.$$

$$5.35 \quad d = \sqrt[3]{18 \cdot \text{Re} \cdot \eta^2 / ((\rho - \rho_0) \cdot \rho_0 \cdot g)} = 5,4 \text{ мм.}$$

$$5.36 \quad t = -(\rho d^2 / 18\eta) \ln n = 0,20 \text{ с.}$$

$$6.1 \quad \tau = v_0^2 \tau_0 / (2c^2) = 0,55 \text{ с.}$$

$$6.2 \quad 1,25.$$

$$6.3 \quad l = l_0 \sqrt{1 - v_0^2 / c^2} \cos_2 \varphi = 0,825 \text{ м,}$$

$$\varphi = \arctg[\text{tg} \varphi_0 / (1 - v^2 / c^2)] = 59^\circ.$$

$$6.4 \quad \varphi = 180 - 2 \arctg\left(1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}\right) = 34,7^\circ.$$

$$6.5 \quad \tau_0 = (l / v) \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 25 \text{ нс.}$$

$$6.6 \quad v = c / \sqrt{1 + \tau_0^2 c^2 / l^2} = 0,995 \text{ с.}$$

$$6.7 \quad 1) 0,195 \text{ с; } 2) 0,974 \text{ с.}$$

$$6.8 \quad 0,268 \text{ с.}$$

$$6.9 \quad 1 \text{ с.}$$

$$6.10 \quad p = 2,05 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

$$6.11 \quad v = c / \sqrt{2} = 0,707 \text{ с.}$$

6.12 $v_C = 3c/13 = 0,231c$.

6.13 $1,11 \cdot 10^{-17}$ кг.

6.14 90 ТДж.

6.15 0,341 МеВ.

6.16 1) 298 ММ/с; 2) 18,9 ММ/с.

6.17 1) 13,8 ММ/с; 2) 263 ММ/с.

6.18 1) 0,866 c ; 2) 0,9897 c ; 3) $6m_0c^2$.

6.20 $1,73m_0c$.

6.21 $0,414m_0c^2$.

6.22 2,82.

6.23 1) 2,98; 2) 1,58.

6.24 1) $0,707c$; 2) $2,4142m_0$; 3) $0,414c$; 4) $2,1973m_0$; 5) $0,414m_0c^2$, $0,217m_0c^2$.

6.25 $0,551m_0c^2$.

6.26 а) 13 нс; б) 4,0 м.

6.27 а) $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, $\alpha' \approx 49^\circ$;

б) $l' = a / \sqrt{1 - v^2 / c^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 3,8$ м, $l' / l_0 = 0,66$.

6.28 $s = c \Delta t \sqrt{1 - (\Delta t_0 / \Delta t)^2} = 5$ м.

6.29 $v' = \left[(v_x - V)^2 + v_y^2 (1 - V^2 / c^2) \right]^{1/2} / (1 - v_x V / c^2)$.

6.30 $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 v_2 / c^2)}$.

6.31 а) $a' = a (1 - V^2 / c^2)^{3/2} / (1 - (V / c)(v / c))^2$; б) $a' = a (1 - V^2 / c^2)$.

6.32 $v = c \sqrt{\eta(2 + \eta)} / (1 + \eta) = 0,6c$.

6.33 $v = (c / \eta) \sqrt{\eta^2 - 1} = 0,70c$.

6.34 $A = 0,42mc^2$, замість $0,14mc^2$.

6.35 $v = c\sqrt{3} / 2 = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

$$\mathbf{6.36} \quad \Delta E / m = \left(1 / \sqrt{1 - (v / 2)^2} - 1 \right) c^2 = 3,6 \cdot 10^{17} \text{ Дж/кг}.$$

$$\mathbf{6.38} \text{ а) } \tilde{T} = 2mc^2 \left(\sqrt{1 + T / 2mc^2} - 1 \right) = 777 \text{ МэВ};$$

$$\text{б) } \tilde{p} = \sqrt{mT / 2} = 940 \text{ МэВ/с}.$$

$$\mathbf{6.39} \quad T' = 2T(T + 2mc^2) / mc^2 = 1,43 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}.$$

$$\mathbf{6.40} \quad v / c = \left[1 - (m / m_0)^{2u / c} \right] / \left[1 + (m / m_0)^{2u / c} \right].$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И. В. Курс физики: в 3 т. – Т.1: Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – 352 с.
2. Бушок Г. Ф. Курс фізики: в 2 кн. – Кн. 1: Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – К.: Либідь, 2001. – 448 с.
3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
4. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Высшая шк., 1981. – 496 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни “*Фізика*”
для студентів напрямів підготовки:
6.050801 “Мікро- та наноелектроніка”,
6.050802 “Електронні пристрої та системи”,
6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,
6.050201 “Системна інженерія” усіх форм навчання
ЧАСТИНА 1
Механіка

Відповідальний за випуск Ю. М. Лопаткін
Редактор Н. З. Клочко
Комп’ютерне верстання О. В. Лисенка

Підп. до друку 29.09.2011, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 10,46. Обл.-вид. арк. 7,18. Тираж 100 пр. Зам. №
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.