Сборник задач на классическое определение вероятности

Задача 1. В лотерее разыгрывается $n = 3$ книги. Всего в урне $N = 50$ билетов. Первый подошедший к урне вынимает билет. Найти вероятность того, что билет окажется выигрышным.

Решение: Рассмотрим событие:
A – первый подошедший извлек выигрышный билет.
По классическому определению вероятностей:
$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{50} = 0{,}06$ – искомая вероятность.

Ответ: $P(A) = 0{,}06$

Задача 2. Секретный замок содержит 15 дисков. Каждый диск имеет десять цифр от 0 до 9. Какова вероятность открыть замок, случайно набрав комбинацию из 15 цифр?

Решение: определим общее количество исходов:

$C_{10}^1 = 10$ способами можно набрать цифру на каждом из 15 дисков.
$(C_{10}^1)^{15} = 10^{15}$ способами можно набрать цифры на замке.

Верная комбинация цифр – одна (количество благоприятствующих исходов).

По классическому определению вероятности:
$p = \frac{1}{10^{15}}$ – вероятность открыть замок, случайно набрав комбинацию из 15 цифр.

Ответ: $p = \frac{1}{10^{15}}$

Задача 3. Брошено 8 игральных костей. Найти вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Решение: Найдём общее число исходов:
$(C_6^1)^8 = 6^8$ способами могут выпасть цифры на 8 игральных костях.

Благоприятствующих исходов: 6 (одинаковые цифры на выпавших гранях всех костей)

По классическому определению вероятности:
$p = \frac{6}{6^8} = \frac{1}{6^7} \approx 0{,}000004$ – вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

Ответ: $p = \frac{1}{6^7} \approx 0{,}000004$

Задача 4. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001

Решение: найдем общее число исходов:

Всего существует $10^5 - 1 = 99999$ облигаций с различными пятизначными номерами (исключаем номер 00000).

Найдем количество благоприятствующих исходов:

$A_{10}^5 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$ номеров с различными цифрами.

По классическому определению вероятности:

$p = \dfrac{30240}{99999} \approx 0{,}302$ – вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр.

Ответ: $\approx 0{,}302$

Задача 5. Какова вероятность угадать кодовый трехзначный номер, если он состоит: а) из четных цифр, причем цифры в числе не повторяются; б) из цифр, больших 5, причем цифры в числе могут повторяться

Решение:

а) Найдем общее количество исходов.

Всего четных цифр – пять (0, 2, 4, 6, 8)

$A_5^3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ способами можно выбрать трёхзначный номер, который состоит из 5 четных цифр и цифры в нем не повторяются.

По классическому определению:

$p = \dfrac{1}{60} \approx 0{,}0167$ – вероятность угадать кодовый трехзначный номер.

б) Найдем общее количество исходов.

Всего подходящих цифр – четыре (6, 7, 8, 9).

$A_{4(повт)}^3 = 4^3 = 64$ способами можно выбрать трехзначный номер, который состоит из цифр, больших 5, причем цифры в числе могут повторяться.

По классическому определению:

$\overline{p} = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}0156$ – вероятность угадать кодовый трехзначный номер.

Ответ: а) $\dfrac{1}{60} \approx 0{,}0167$, б) $\dfrac{1}{64} \approx 0{,}0156$

Задача 6. Телефонный номер состоит из 7 цифр. Найти вероятность того, что в нем все цифры различны.

Решение: Найдем общее число исходов:
$A^7_{10(повт)} = 10^7$ способами можно составить телефонный номер из 7 цифр.

Найдём количество благоприятствующих исходов:
$A^7_{10} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 604800$ способами можно составить телефонный номер из 7 цифр, в котором все цифры различны.

По классическому определению:
$p = \dfrac{A^7_{10}}{A^7_{10(повт)}} = \dfrac{604800}{10^7} = 0{,}06048$ – вероятность того, что в данном телефонном номере все цифры различны.

Ответ: $p = 0{,}06048$

Задача 7. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны и не содержат цифры 3. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение: Найдем общее число исходов.

Всего: $10^2 = 100$ возможных номеров.

Исключаем номера, содержащие в двух последних разрядах цифру 3:
03, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93,
30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39
Итого: 19 номеров.

Также исключаем номера с двумя одинаковыми последними цифрами:
00, 11, 22, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (номер 33 уже учтен) – итого 9 номеров.

Таким образом, общее число исходов: 100 – 19 – 9 = 72

Благоприятствующий исход – один (правильный номер).

По классическому определению вероятности:
$p = \dfrac{1}{72}$ – вероятность того, что абонент наберет правильный номер

Ответ: $p = \dfrac{1}{72} \approx 0{,}014$

Задача 8. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что эти цифры различны и первая цифра больше второй. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение: Найдем общее число исходов:

Возможная предпоследняя цифра номера:	Возможные последние цифры:	Количество исходов:
1	0	1
2	0, 1	2
3	0, 1, 2	3
4	0, 1, 2, 3	4
5	0, 1, 2, 3, 4	5
6	0, 1, 2, 3, 4, 5	6
7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	7
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8
9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	9

Всего: 45 возможных исходов.
Благоприятствующий исход – один.
По классическому определению:

$p = \frac{1}{45}$ – вероятность того, что абонент наберет правильный номер

Ответ: $p = \frac{1}{45} \approx 0{,}022$

Задача 9. Из цифр 0, 1, 3, 5, 7 составлено пятизначное число. Найти вероятность того, что оно делится на 5.

Решение: Считаем, что цифры не могут повторяться. Найдем общее количество возможных чисел:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способами можно переставить 5 чисел по пяти разрядам.

Исключаем $4! = 24$ случаев – когда ноль находится в старшем разряде и, соответственно, число является не пяти, а четырехразрядным.

Таким образом:

$5! - 4! = 120 - 24 = 96$ пятиразрядных чисел можно составить из данных цифр.

Найдем количество чисел, кратных пяти. Число делится на 5, если в младшем разряде находится пятерка либо ноль.

Пусть число заканчивается на 0. Тогда $4! = 24$ способами можно переставить 4 остальные цифры в старших разрядах

Пусть число заканчивается на 5. Аналогично, существует 24 числа, но следует исключить $3! = 6$ случаев, когда ноль на первом месте. Таким образом, искомое количество чисел: 24 – 6 = 18.

Всего чисел, кратных пяти: 24 + 18 = 42

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{42}{96} = \frac{7}{16}$ – вероятность того, что наудачу составленное из данных цифр число делится на 5.

Ответ: $p = \frac{7}{16} = 0{,}4375$

Задача 10. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 7 до 10 очков.

Решение: общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:
7 очков: $(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)$
8 очков: $(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$
9 очков: $(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)$
10 очков: $(4,6), (6,4), (5,5)$

Всего: 18 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:
$p = \dfrac{18}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ – искомая вероятность.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Задача 11. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей выпадет от 2 до 8 очков.

Решение: общее число исходов (возможных комбинаций цифр на двух игральных костях): $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов:
2 очка: $(1,1)$
3 очка: $(1,2), (2,1)$
4 очка: $(1,3), (3,1), (2,2)$
5 очков: $(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)$
6 очков: $(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)$
7 очков: $(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)$
8 очков: $(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$

Всего: 26 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:
$p = \dfrac{26}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$ – искомая вероятность.

Ответ: $\dfrac{13}{18}$

***Примечание**: здесь более рационально перечислить исходы, соответствующие противоположному событию (выпадение 9, 10, 11 или 12 очков)*

Задача 12. Брошены две игральные кости. Что вероятнее: выпадение в произведении 6 или 12 очков?

Решение: общее число исходов: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов для случая, когда произведение очков равно 6:

$(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)$ – всего 4 исхода.

По классическому определению вероятности:

$p_6 = \dfrac{4}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ – вероятность того, что произведение цифр будет равно 6.

Подсчитаем количество благоприятствующих исходов для случая, когда произведение очков равно 12:

$(2,6),(6,2),(3,4),(4,3)$ – всего 4 исхода.

По классическому определению вероятности:

$p_{12} = \dfrac{4}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ – вероятность того, что произведение цифр будет равно 12.

$p_6 = p_{12}$

Ответ: данные события равновероятны.

Задача 13. Бросаются три игральных кубика. Найти вероятности событий:

A – на всех кубиках выпало одинаковое число очков;

B – на всех кубиках в сумме выпало три очка;

C – на всех кубиках в сумме выпало более трех очков.

Решение: найдем общее число исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может упасть каждый кубик;

$C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ комбинаций цифр может выпасть при одновременном броске трех кубиков.

Событию A соответствует шесть благоприятствующих исходов:

(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)

По классическому определению вероятности:

$P(A) = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$ – вероятность того, что на всех кубиках выпало одинаковое число очков.

Событию B соответствует единственный благоприятствующий исход: (1,1,1)

По классическому определению вероятности:

$P(B) = \dfrac{1}{216}$ – вероятность того, что на всех кубиках в сумме выпало три очка.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(C)=1-P(B)=1-\frac{1}{216}=\frac{215}{216}$ – вероятность того, что на всех кубиках в сумме выпало более трех очков.

Ответ: $P(A)=\frac{1}{36},\ P(B)=\frac{1}{216},\ P(C)=\frac{215}{216}$

Задача 14. В коробке 7 красных и 5 синих карандашей. Наудачу взяли три карандаша. Найти вероятность того, что среди выбранных карандашей – ровно 2 красных и 1 синий.

Решение: Всего: 7 + 5 = 12 карандашей в коробке.

$C_{12}^3=\frac{12!}{9!\cdot 3!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}=220$ способами можно извлечь 3 карандаша из коробки.

$C_7^2=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21$ способом можно извлечь два красных карандаша.

$C_5^1=5$ способами можно извлечь один синий карандаш.

$C_7^2\cdot C_5^1=21\cdot 5=105$ способами можно извлечь искомую комбинацию карандашей.

По классическому определению: $p=\frac{C_7^2\cdot C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}\approx 0{,}4773$ – вероятность того, что будут извлечены 2 красных и 1 синий карандаш.

Ответ: $\frac{21}{44}\approx 0{,}4773$

Задача 15. В коробке находятся 3 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Одновременно извлекают 6 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет ровно 2 синих и 2 красных.

Решение: всего: 3 + 4 + 3 = 10 карандашей в коробке.

$C_{10}^6=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{24}=210$ способами можно извлечь 6 карандашей из коробки.

$C_3^2=3$ способами можно извлечь 2 синих карандаша.

$C_4^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{24}{4}=6$ способами можно извлечь 2 красных карандаша.

$C_3^2=3$ способами можно извлечь 2 зеленых карандаша.

$C_3^2\cdot C_4^2\cdot C_3^2=3\cdot 6\cdot 3=54$ способами можно извлечь искомый набор карандашей.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_3^2\cdot C_4^2\cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{54}{210}=\frac{9}{35}$ – вероятность того, что среди извлеченных 6 карандашей окажется 2 синих и 2 красных.

Ответ: $\frac{9}{35}\approx 0{,}2571$

Задача 16. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом №1 и 4 детали – заводом №2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом №1.

Решение: всего: 16 + 4 = 20 деталей.

$C_{20}^2 = \frac{20!}{18!\cdot 2!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$ способами можно выбрать две детали.

$C_4^2 = 6$ способами можно выбрать две детали, изготовленных заводом №2.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{6}{190} = \frac{3}{95}$ – вероятность того, что выбраны 2 детали, изготовленные заводом №2.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{95} = \frac{92}{95}$ – вероятность того, что среди двух выбранных деталей будет хотя бы одна, изготовленная заводом №1.

Ответ: $\frac{92}{95} \approx 0{,}9684$

Задача 17. На сборку поступило десять деталей, среди которых четыре бракованные. Сборщик наудачу берёт три детали. Найти вероятности событий:

A – все детали бракованные;

B – только одна деталь из трёх бракованная;

C – хотя бы одна из взятых деталей бракованная.

Решение: найдём общее число исходов:

$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$ способами можно выбрать 3 детали из 10.

а) $C_4^3 = 4$ способами можно выбрать 3 бракованные детали.

По классическому определению:

$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$ – вероятность того, что все три детали будут бракованными.

б) $C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одну бракованную деталь.

$C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ способами можно выбрать 2 стандартные детали.

$C_4^1 \cdot C_6^2 = 4\cdot 15 = 60$ способами можно выбрать искомую комбинацию деталей.

По классическому определению:

$P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, среди трёх извлеченных деталей только одна будет бракованной.

в) $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ способами можно извлечь 3 стандартные детали.

По классическому определению:

$P(\overline{C}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что все три извлечённые детали будут стандартными.

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ – вероятность того, среди трёх извлеченных деталей хотя бы одна будет бракованной.

Ответ: а) $P(A) = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333$, б) $P(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$, в) $P(C) = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333$

Задача 18. Из колоды в 36 карт наугад выбирают три карты. Найти вероятность того, что среди извлечённых трёх карт будет 2 туза.

Решение:

$C_{36}^3 = \frac{36!}{33!\cdot 3!} = \frac{34\cdot 35\cdot 36}{6} = 7140$ способами можно извлечь 3 карты из колоды.

$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$ способами можно извлечь двух тузов.

$C_{32}^1 = 32$ способами можно извлечь одну другую карту.

$C_4^2 \cdot C_{32}^1 = 6\cdot 32 = 192$ способами можно извлечь искомую комбинацию карт.

По классическому определению:

$p = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{192}{7140} = \frac{16}{595} \approx 0{,}0269$ – вероятность того, что среди трёх извлеченных карт будет два туза.

Ответ: $\frac{16}{595} \approx 0{,}0269$

Задача 19. Из колоды в 32 карты извлекают сразу три карты. Найти вероятность того, что эти карты будут дамой, семеркой и тузом.

Решение:

$C_{32}^3 = \frac{32!}{29!\cdot 3!} = \frac{30\cdot 31\cdot 32}{6} = 4960$ способами можно выбрать 3 карты из колоды.

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одну даму;

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одну семерку;

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одного туза;

$C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$ способами можно выбрать искомую комбинацию карт.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1}{C_{32}^3}=\frac{64}{4960}=\frac{2}{155}$ – вероятность того, что из колоды будут извлечены дама, семерка и туз.

Ответ: $p=\frac{2}{155}\approx 0{,}013$

Задача 20. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Решение:

$C_{10}^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{120}=252$ способами можно выбрать 5 вагонов из десяти.

$C_2^2=1$ способом можно выбрать вагоны с номерами 2 и 5.

$C_8^3=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6}=56$ способами можно выбрать 3 других вагона.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_2^2\cdot C_8^3}{C_{10}^5}=\frac{1\cdot 56}{252}=\frac{2}{9}\approx 0{,}2222$ – вероятность того, среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5

Ответ: $\frac{2}{9}\approx 0{,}2222$

Задача 21. В городе находятся 15 продовольственных и 5 непродовольственных магазинов. Случайным образом для приватизации были отобраны три магазина. Найти вероятность того, что все эти магазины непродовольственные

Решение: всего: 15 + 5 = 20 магазинов в городе.

$C_{20}^3=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=1140$ способами можно выбрать 3 магазина для приватизации.

$C_5^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ способами можно выбрать 3 непродовольственных магазинов для приватизации.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{10}{1140}=\frac{1}{114}\approx 0{,}0088$ – вероятность того, что все три выбранных магазина будут непродовольственными.

Ответ: $\frac{1}{114}\approx 0{,}0088$

Задача 22. По делу проходят 50 фигурантов. Из них 15 являются свидетелями. Имеется возможность опросить 10 человек. Какова вероятность того, что среди опрошенных лиц окажется 5 свидетелей.

Решение:

$C_{50}^{10}=\frac{50!}{40!\cdot 10!}=\frac{41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=10272278170$ способами можно выбрать 10 человек из 50.

$C_{15}^{5}=\frac{15!}{10!\cdot 5!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{120}=3003$ способами можно выбрать 5 свидетелей из 15.

$C_{35}^{5}=\frac{35!}{30!\cdot 5!}=\frac{31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35}{120}=324632$ способами можно выбрать 5 других фигурантов из 35.

По классическому определению вероятности:

$p=\frac{C_{15}^{5}\cdot C_{35}^{5}}{C_{50}^{10}}=\frac{3003\cdot 324632}{10272278170}\approx 0{,}0949$ – вероятность того, что среди 10 человек окажутся ровно 5 свидетелей.

Ответ: $p\approx 0{,}0949$

Задача 23. В партии сотовых телефонов, состоящих из 4 неисправных и 16 исправных, для проверки выбирают три. Найти вероятность того, что только два исправны.

Решение: Всего: 4 + 16 = 20 телефонов в партии.

$C_{20}^{3}=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20}{6}=1140$ способами можно выбрать 3 телефона.

$C_{16}^{2}=\frac{16!}{14!\cdot 2!}=\frac{15\cdot 16}{2}=120$ способами можно выбрать два исправных телефона.

$C_{4}^{1}=4$ способами можно выбрать 1 неисправный телефон.

$C_{16}^{2}\cdot C_{4}^{1}=120\cdot 4=480$ способами можно выбрать искомую комбинацию телефонов.

По классическому определению:

$p=\frac{C_{16}^{2}\cdot C_{4}^{1}}{C_{20}^{3}}=\frac{480}{1140}=\frac{8}{19}\approx 0{,}4211$ – вероятность того, что из трех выбранных телефонов исправными являются только два.

Ответ: $\frac{8}{19}\approx 0{,}4211$

Задача 24. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся:

а) только женские шубы;

б) только мужские или только женские шубы.

Решение: всего: 10 + 6 = 16 шуб в магазине.

$C_{16}^3 = \frac{16!}{13!\cdot 3!} = \frac{14\cdot 15\cdot 16}{6} = 560$ способами можно выбрать 3 шубы.

а) $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$ способами можно выбрать 3 женские шубы.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{120}{560} = \frac{3}{14} \approx 0{,}2143$ – вероятность того, что среди трёх отобранных шуб окажутся только женские шубы.

б) $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ способами можно выбрать 3 мужские шубы.

$C_{10}^3 + C_6^3 = 120 + 20 = 140$ способами можно выбрать только мужские или только женские шубы.

По классическому определению вероятности:

$p^* = \frac{C_{10}^3 + C_6^3}{C_{16}^3} = \frac{140}{560} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ – вероятность того, что среди трёх отобранных шуб окажутся только женские шубы или только мужские шубы.

Ответ: а) $\frac{3}{14} \approx 0{,}2143$ б) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

Задача 25. Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что он ответит на три вопроса билета?

Решение:

$C_{25}^3 = \frac{25!}{22!\cdot 3!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{6} = 2300$ способами можно выбрать 3 вопроса из 25;

$C_{20}^3 = \frac{20!}{17!\cdot 3!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{6} = 1140$ способами можно выбрать 3 вопроса из 20, на которые студент знает ответ.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{1140}{2300} = \frac{57}{115} \approx 0{,}5$ – вероятность того, что студент ответит на три вопроса билета.

Ответ: $p = \frac{57}{115} \approx 0{,}5$

Задача 26. Готовясь к экзамену, студент не успел выучить 15 вопросов из 45. Какова вероятность того, что он вытащит билет, в котором не знает 1 вопрос, если всего в билете 4 вопроса?

Решение: найдём общее число исходов:

$C_{45}^4 = \frac{45!}{41!\cdot 4!} = \frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{24} = 148995$ способами можно выбрать 4 вопроса из 45.

Найдём благоприятствующее число исходов:

$C_{15}^1 = 15$ способами можно выбрать один вопрос, на который студент не знает ответа.

$C_{30}^3 = \frac{30!}{27!\cdot 3!} = \frac{28\cdot 29\cdot 30}{6} = 4060$ способами можно выбрать3 вопроса, на которые студент знает ответ.

$C_{15}^1 \cdot C_{30}^3 = 15\cdot 4060 = 60900$ способами можно выбрать искомую комбинацию вопросов.

По классическому определению:

$p = \frac{C_{15}^1 \cdot C_{30}^3}{C_{45}^4} = \frac{60900}{148995} = \frac{580}{1419}$ – вероятность того, что студент вытащит билет, в котором не знает ответа на 1 вопрос из 4.

Ответ: $p = \frac{580}{1419} \approx 0{,}41$

Задача 27. Восемь различных книг расставляют наугад на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Решение: найдём общее число исходов:

$n! = 8! = 40320$ способами можно расставить 8 книг на одной полке.

Без учёта перестановок 2 определенные книги могут оказаться рядом в 7 случаях, с учётом перестановок этих 2 книг – в 14 случаях.

Для каждого из 14 случаев оставшиеся шесть книг можно расставить $6! = 720$ способами. Поэтому существует $14\cdot 6! = 14\cdot 720 = 10080$ благоприятствующих комбинаций – когда две определённые книги оказываются рядом.

По классическому определению:

$p = \frac{10080}{40320} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

Ответ: $p = \frac{1}{4}$

Задача 28. 11 человек случайным образом садятся на десятиместную скамейку. Найти вероятность того, что три определённых лица окажутся рядом.

Решение: Найдём общее число исходов.

$C_{11}^{10}=11$ способами можно выбрать 10 человек для рассадки на скамейку.

Из данного количества комбинаций необходимо исключить 3 случая, когда одному из трёх нужных людей не достанется места:

$C_{11}^{10}-3=11-3=8$

Каждую десятку можно рассадить $10!$ способами.

Таким образом, общее количество исходов: $8\cdot 10!$

Найдём благоприятствующее число исходов. Три искомых человека без учёта перестановок могут оказаться рядом 8 способами:

1	2	3							
	1	2	3						
		1	2	3					
			1	2	3				
				1	2	3			
					1	2	3		
						1	2	3	
							1	2	3

А с учётом их перестановок в каждой тройке: $8\cdot 3!$ способами. Кроме того, для каждой из $8\cdot 3!$ комбинаций другие 7 человек могут рассесться $7!$ способов. Таким образом, количество благоприятствующих исходов: $8\cdot 3!\cdot 7!$

По классическому определению:

$p=\dfrac{8\cdot 3!\cdot 7!}{8\cdot 10!}=\dfrac{6}{8\cdot 9\cdot 10}=\dfrac{1}{120}\approx 0{,}0083$ – вероятность того, что три определённых человека окажутся рядом.

Ответ: $\dfrac{1}{120}\approx 0{,}0083$

Задача 29. В пакете находится 20 штук семян, причем 17 из них – всхожие. Какова вероятность того, что из трех высаженных семечек окажутся невсхожими две.

Решение: найдём общее число исходов:

Найдём благоприятствующее количество исходов:

$C_3^2=3$ способами можно выбрать 2 невсхожих семени.

$C_{17}^1=17$ способами можно выбрать одно всхожее семя.

$C_3^2\cdot C_{17}^1=3\cdot 17=51$ способом можно выбрать искомую комбинацию семян.

По классическому определению:

$p = \frac{C_3^2 \cdot C_{17}^1}{C_{20}^3} = \frac{51}{1140} = \frac{17}{380} \approx 0{,}0447$ – вероятность того, что из трех высаженных семечек окажутся невсхожими две.

Ответ: $\frac{17}{380} \approx 0{,}0447$

Задача 30. На новогодней елке присутствуют 20 девочек и 10 мальчиков. За участие в конкурсе призы получат 6 человек. Какова вероятность того, что среди получивших призы будет поровну мальчиков и девочек?

Решение: Всего: 20 + 10 = 30 детей на новогодней елке.

$C_{30}^6 = \frac{30!}{24! \cdot 6!} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{720} = 593775$ способами можно распределить 6 призов между 30 детьми.

$C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$ способами можно распределить 3 приза между девочками.

$C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ способами можно распределить 3 приза между мальчиками.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{10}^3}{C_{30}^6} = \frac{1140 \cdot 120}{593775} = \frac{13485}{55389} = \frac{608}{2639}$ – искомая вероятность.

Ответ: $p = \frac{608}{2639} \approx 0{,}23$

Задача 31. В бункере хранятся изделия 4 сортов, причем изделий первого сорта 20 штук, изделий второго сорта 50, изделий третьего сорта 20, четвертого – 30. Для контроля наугад берут 7 изделий. Определить вероятность того, что среди них 1 изделие первого сорта, 3 – второго, 1 – третьего, 2 – четвертого.

Решение: Всего: $n = 20 + 50 + 20 + 30 = 120$ изделий.

Размер выборки: $m = 1 + 3 + 1 + 2 = 7$

$C_{120}^7 = \frac{120!}{113! \cdot 7!} = 59487568920$ способами можно выбрать 7 изделий из 120.

$C_{20}^1 = 20$ способами можно выбрать изделие 1-го сорта;

$C_{50}^3 = \frac{50!}{47! \cdot 3!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{6} = 19600$ способами можно выбрать три изделия 2-го сорта;

$C_{20}^1 = 20$ способом можно выбрать одно изделие 3-го сорта;

$C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 435$ способами можно выбрать два изделия 4-го сорта.

$C_{20}^1 \cdot C_{50}^3 \cdot C_{20}^1 \cdot C_{30}^2 = 20 \cdot 19600 \cdot 20 \cdot 435 = 3410400000$ – способами можно выбрать искомую комбинацию изделий.

По классическому определению:

$p = \dfrac{C_{20}^1 \cdot C_{50}^3 \cdot C_{20}^1 \cdot C_{30}^2}{C_{120}^7} = \dfrac{3410400000}{59487568920} \approx 0{,}05733$ – искомая вероятность.

Ответ: $p \approx 0{,}05733$

Задача 32. В ящике десять стандартных изделий и пять бракованных. Наугад извлекают три детали. Каковы вероятности того, что среди них: а) одна бракованная, б) две бракованных, в) хотя бы одна стандартная?

Решение: Всего: 10 + 5 = 15 деталей в ящике.

$C_{15}^3 = \dfrac{15!}{12!\cdot 3!} = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{6} = 455$ способами можно извлечь три детали из ящика.

а) Рассмотрим событие: A – среди трех извлеченных деталей будет ровно одна бракованная.

$C_5^1 = 5$ способами можно извлечь одну бракованную деталь;

$C_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!\cdot 2!} = \dfrac{9\cdot 10}{2} = 45$ способами можно извлечь две стандартные детали.

$C_5^1 \cdot C_{10}^2 = 5\cdot 45 = 225$ способами можно извлечь искомую комбинацию деталей.

По классическому определению вероятности: $P(A) = \dfrac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \dfrac{225}{455} = \dfrac{45}{91} \approx 0{,}49$

б) Рассмотрим событие: B – среди трех извлеченных деталей будет ровно две бракованных.

$C_5^2 = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = 10$ способами можно извлечь две бракованные детали;

$C_{10}^1 = 10$ способами можно извлечь одну стандартную деталь.

$C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 10\cdot 10 = 100$ способами можно извлечь искомую комбинацию деталей.

По классическому определению: $P(B) = \dfrac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \dfrac{100}{455} = \dfrac{20}{91} \approx 0{,}22$

в) Рассмотрим события: C – среди трех извлеченных деталей будет хотя бы одна стандартная, $\overline{C}$ – все три детали будут бракованными.

Данные события являются противоположными, по соответствующей теореме: $P(C) + P(\overline{C}) = 1$

$C_5^3 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = 10$ способами можно извлечь три бракованные детали.

По классическому определению: $P(\overline{C}) = \dfrac{C_5^3}{C_{15}^3} = \dfrac{10}{455} = \dfrac{2}{91}$.

Таким образом: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{2}{91} = \dfrac{89}{91} \approx 0{,}98$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $P(A) = \dfrac{45}{91} \approx 0{,}49$, б) $P(B) = \dfrac{20}{91} \approx 0{,}22$, $P(C) = \dfrac{89}{91} \approx 0{,}98$

Задача 33. В лотерее разыгрываются 1000 билетов, из которых 100 – выигрышные. Покупают три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?

Решение:

$C_{1000}^3 = \frac{1000!}{997!\cdot 3!} = \frac{998\cdot 999\cdot 1000}{6} = 166167000$ способами можно выбрать 3 билета из 1000.

$C_{100}^1 = 100$ способами можно выбрать один выигрышный билет.

$C_{900}^2 = \frac{900!}{898!\cdot 2!} = \frac{899\cdot 900}{2} = 404550$ способами можно выбрать безвыигрышных билета.

$C_{100}^1 \cdot C_{900}^2 = 100\cdot 404550 = 40455000$ способами можно выбрать искомую комбинацию билетов.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_{100}^1 \cdot C_{900}^2}{C_{1000}^3} = \frac{40455000}{166167000} = \frac{13485}{55389}$ – вероятность того, что среди трех купленных билетов будет один выигрышный.

Ответ: $p = \frac{13485}{55389} \approx 0{,}24$

Задача 34. В корзине 15 шаров, из них 5 – красных, 5 – синих и 5 – желтых. Достают наугад 4 шара. Какова вероятность того, что среди них 1 красный, 1 синий и 2 желтых шара?

Решение: найдём общее число исходов:

$C_{15}^4 = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{24} = 1365$ способами можно выбрать 4 шара из корзины.

Найдём количество благоприятствующих исходов:

$C_5^1 = 5$ способами можно выбрать один красный шар.

$C_5^1 = 5$ способами можно выбрать один синий шар.

$C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$ способами можно выбрать два желтых шара.

$C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^2 = 5\cdot 5\cdot 10 = 250$ способами можно выбрать искомую комбинацию шаров.

По классическому определению вероятности:

$p = \frac{C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^4} = \frac{250}{1365} = \frac{50}{273}$ – вероятность того, что среди четырех извлеченных шаров будет 1 красный, 1 синий и 2 желтых шара.

Ответ: $p = \frac{50}{273} \approx 0{,}18$

Задача 35. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

Решение: Найдем длину ребра куба в распиленных кубиках:
$l = \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{1000} = 10$ кубиков.

Кубиков с 3 окрашенными гранями: 8 (вершины куба)
Кубиков с двумя окрашенными гранями: 8 * 12 ребер = 96 кубиков.
Кубиков с одной окрашенной гранью: 8 * 8 * 6 граней = 384 кубиков.
Неокрашенных кубиков: 1000 – 8 – 96 – 384 = 512 кубиков.

$C_{1000}^1 = 1000$ способами можно извлечь 1 кубик.

$C_{96}^1 = 96$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями.

По классическому определению вероятности, вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани:

$$p = \frac{C_{96}^1}{C_{1000}^1} = \frac{96}{1000} = 0{,}096$$

Ответ: 0,096

Задача 36. Куб с окрашенными гранями распилен на $n = 216$ кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме 2 окрашенные грани.

Решение: Найдем длину ребра куба в распиленных кубиках:
$l = \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{216} = 6$ кубиков.

Кубиков с тремя окрашенными гранями: 8 (вершины куба)
Кубиков с двумя окрашенными гранями: 4 * 12 ребер = 48 кубиков.
Кубиков с одной окрашенной гранью: 4 * 4 * 6 граней = 96 кубиков.
Неокрашенных кубиков: 216 – 8 – 48 – 96 = 64 кубиков.

$C_{216}^3 = \frac{216!}{213! \cdot 3!} = \frac{214 \cdot 215 \cdot 216}{6} = 1656360$ способами можно извлечь 3 кубика.

$C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 = 48 \cdot \frac{63 \cdot 64}{2} = 96768$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями и два неокрашенных кубика.

$C_{96}^2 \cdot C_{64}^1 = \frac{95 \cdot 96}{2} \cdot 64 = 291840$ способами можно извлечь 2 кубика с одной окрашенной гранью и один неокрашенный кубик.

По правилу сложения комбинаций: $C_{48}^1 \cdot C_{64}^2 + C_{96}^2 \cdot C_{64}^1 = 96768 + 291840 = 388608$ способами можно извлечь 3 кубика с двумя окрашенными гранями

По классическому определению:

$p=\dfrac{C_{48}^1\cdot C_{64}^2+C_{96}^2\cdot C_{64}^1}{C_{216}^3}=\dfrac{388608}{1656360}\approx 0{,}23$ – вероятность того, что у трёх извлеченных кубика будет в сумме две окрашенных грани.

Ответ: $\approx 0{,}23$

Задача 37. Куб с окрашенными гранями распилен на $n=1000$ кубиков одинакового размера, которые перемешаны. Извлекаются 3 кубика. Найти вероятность того, что у них будет в сумме $k=3$ окрашенных грани.

Решение: Найдем длину ребра куба в пересчёте на распиленные кубики:
$l=\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{1000}=10$ кубиков.

Кубиков с 3 окрашенными гранями: 8 (вершины куба)
Кубиков с двумя окрашенными гранями: 8 * 12 ребер = 96 кубиков.
Кубиков с одной окрашенной гранью: 8 * 8 * 6 граней = 384 кубика.
Неокрашенных кубиков: 1000 – 8 – 96 – 384 = 512 кубиков.

$C_{1000}^3=\dfrac{1000!}{997!\cdot 3!}=\dfrac{998\cdot 999\cdot 1000}{6}=166167000$ способами можно извлечь 3 кубика (общее число исходов).

1) $C_8^1\cdot C_{512}^2=8\cdot\dfrac{511\cdot 512}{2}=1046528$ способами можно извлечь 1 кубик с тремя окрашенными гранями и два неокрашенных кубика.

2) $C_{96}^1\cdot C_{384}^1\cdot C_{512}^1=96\cdot 384\cdot 512=18874368$ способами можно извлечь 1 кубик с двумя окрашенными гранями, 1 кубик с одной окрашенной гранью и 1 неокрашенный кубик.

3) $C_{384}^3=\dfrac{382\cdot 383\cdot 384}{6}=9363584$ способами можно извлечь 3 кубика с одной окрашенной гранью.

Складываем количество благоприятствующих исходов:
$C_8^1\cdot C_{512}^2+C_{96}^1\cdot C_{384}^1\cdot C_{512}^1+C_{384}^3=1046528+18874368+9363584=29284480$ способами можно извлечь 3 кубика, суммарное количество окрашенных граней которых равно трём.

По классическому определению:

$p=\dfrac{C_8^1\cdot C_{512}^2+C_{96}^1\cdot C_{384}^1\cdot C_{512}^1+C_{384}^3}{C_{1000}^3}=\dfrac{29284480}{166167000}\approx 0{,}1762$ – искомая вероятность.

Ответ: $\approx 0{,}1762$